

上半平面上のある種の Privalov 空間について

岩手医科大学教養部 飯田 安保 (Yasuo Iida)

Department of Mathematics, School of Liberal Arts and Sciences,
Iwate Medical University

1. 単位円板上での Nevanlinna-type space について

定義 1-1 f を $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数とする。また、 $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする。

1. $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。

ここで $\log^+ x := \max(\log x, 0)$ である。

(注意) $f \in N$ のとき $f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta} \in T$ で存在する。

2. ある $\phi \in L^1(T)$, $\phi \geq 0$ に対し $\log^+ |f(z)| \leq Q[\phi](z)$ ($z \in U$) を満たすとき、 $f \in N_*$ とする。ただし右辺は U 上の Poisson 積分を表す。

3. $p > 1$ とする。 $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} (\log^+ |f(re^{i\theta})|)^p d\theta < \infty$ を満たすとき、 $f \in N^p$ とする。

4. $0 < q < \infty$ とする。 $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta < \infty$ を満たすとき、 $f \in H^q$ とする。

N を Nevanlinna class、 N_* を Smirnov class、 N^p を Privalov space、 H^q を Hardy space とよぶ。これらの空間のあいだには、包含関係 $H^q \subset N^p \subset N_* \subset N$ ($p > 1, 0 < q < \infty$) が成り立つ。

また N とその部分空間を総称して **Nevanlinna-type space** と呼ぶ。

定理 1-2 f を U 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

- (1) $f \in N$.

$$(2) \quad \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(re^{i\theta})|) d\theta < \infty \text{ が成り立つ.}$$

(3) $\log^+ |f(z)|$ が U 上 harmonic majorant を持つ.

定理 1-3 f を U 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

(1) $f \in N_*$.

(2) $f \in N$ かつ $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| d\theta$ が成り立つ.

(3) ある strongly convex な関数 φ に対して、

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} \varphi(\log^+ |f(re^{i\theta})|) d\theta < \infty \text{ が成り立つ.}$$

(注意) $\mathbf{R}$ 上の凸関数 φ が、 $\varphi \geq 0$ かつ非減少で、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$ であるとき、strongly convex と呼ぶ。

strongly convex な関数の例として、たとえば

$$\begin{aligned} \cdot \varphi(t) = e^{pt} \quad (p > 0) & \quad \cdot p > 1 \text{ に対し } \varphi(t) = \begin{cases} t^p & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

などがある。

定理 1-4 $p > 1$ とする。また、 f を U 上の正則関数とする。以下は互いに同値である。

(1) $f \in N^p$.

(2) $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} (\log(1 + |f(re^{i\theta})|))^p d\theta < +\infty$ が成り立つ.

(3) $(\log^+ |f(z)|)^p$ が U 上 harmonic majorant を持つ.

定理 1-2 ～ 定理 1-4 の結果のように、単位円板 U 上の Nevanlinna-type space については定義と同値な条件がいくつか知られており、それぞれの条件を各空間の定義として採用することもある。

しかし、このような U では互いに同値である条件を上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上に“そのまま”適用しても、それらが同値にならない場合がある。

2. 上半平面上の Nevanlinna-type space について

上半平面 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ における Nevanlinna-type space には、以下の①～③の流儀がある。

① harmonic majorant による定義

定義 2-1 f を D 上の正則関数とする。

1. $\log^+ |f(z)|$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、 $f \in N_0(D)$ とする。
2. ϕ を strongly convex な関数とする。 $\phi(\log^+ |f(z)|)$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、 $f \in H_\phi(D)$ とする。
また $N_0^*(D) := \bigcup \{H_\phi(D) \mid \phi : \text{strongly convex}\}$ とする。

(注意) $H_\phi(D)$ は Hardy-Orlicz space とよばれる。

3. $p > 1$ とする。 $(\log^+ |f(z)|)^p$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、 $f \in N_0^p(D)$ とする。

② Krylov(& Iida) による定義

定義 2-2 f を D 上の正則関数とする。

1. $\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} \log^+ |f(x+iy)| dx < \infty$ を満たすとき、 $f \in \mathfrak{N}$ とする。
2. ある $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$ に対し $\log^+ |f(z)| \leq P[\phi](z)$ ($z \in D$) を満たすとき $f \in \mathfrak{N}_*$ とする。ただし右辺は D 上の Poisson 積分を表す。
3. $p > 1$ とする。 $\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} (\log^+ |f(x+iy)|)^p dx < \infty$ を満たすとき、 $f \in \mathfrak{N}^p$ とする。

③ Mochizuki(& Iida) による定義

定義 2-3 f を D 上の正則関数とする。

1. $\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} \log(1 + |f(x+iy)|) dx < \infty$ を満たすとき、 $f \in N(D)$ とする。
2. ある $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$ に対し $\log(1 + |f(z)|) \leq P[\phi](z)$ ($z \in D$) を満たすとき、 $f \in N_*(D)$ とする。ただし右辺は D 上の Poisson 積分を表す。
3. $p > 1$ とする。 $\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} (\log(1 + |f(x+iy)|))^p dx < \infty$ を満たすと

き、 $f \in N^p(D)$ とする。

ここで注意が必要なのは単位円板の場合とは違って、上半平面上の Nevanlinna class の定義に相当する定義 2-1 の 1、定義 2-2 の 1、定義 2-3 の 1 は互いに同値ではないことである。

同様に、上半平面上の Smirnov class の定義に相当する定義 2-1 の 2、定義 2-2 の 2、定義 2-3 の 2 も互いに同値ではなく、上半平面上の Privalov space の定義に相当する定義 2-1 の 3、定義 2-2 の 3、定義 2-3 の 3 も互いに同値ではない。

このように、上半平面の場合はいくつと異なる Nevanlinna-type space が知られている。ここでは、①の「harmonic majorant による定義」での Privalov space に関する結果を報告する。

3. ①の定義による上半平面上の Nevanlinna-type space に関する結果

まず最初に、上半平面上の Hardy space の定義を与える。この場合は 2 通りの空間が考えられる。

定義 3-1 $p > 0$ とする。また f を D 上の正則関数とする。

1. $|f(z)|^p$ が D 上 harmonic majorant を持つとき、 $f \in H^p(D)$ とする。

2. $\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+iy)|^p dx < \infty$ を満たすとき、 $f \in \mathfrak{H}^p$ とする。

次の 2 つの定理は、Rosenblum と Rovnyak の著書の中で紹介されているものである。

定理 3-2([5]) f を D 上の正則関数とする。また、 D 上の有界正則関数全体を $H^\infty(D)$ で表す。

$$(1) \quad f \in N_0(D) \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^\infty(D), h \neq 0) .$$

$$(2) \quad f \in N_0^*(D) \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^\infty(D), h \text{ は } D \text{ での外関数}) .$$

ここで $h(t) \geq 0$, $\log h \in L^1(\mathbf{R}, (1+t^2)^{-1} dt)$ に対し、

$d(z) = \exp \left(\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z} \frac{1}{1+t^2} \log h(t) dt \right)$ の形の関数を 上半平面 D での外関数とよぶ。

定理 3-3([5]) f を D 上の正則関数とする。

$$(1) \quad f \in N_0(D) \iff \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ |f(x+iy)|}{x^2 + (y+1)^2} dx < \infty.$$

(2) $f \in N_0^*(D) \iff$ ある strongly convex な関数 ϕ に対して

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \frac{\phi(\log^+ |f(x+iy)|)}{x^2 + (y+1)^2} dx < \infty.$$

4. $N_0^p(D)$ に関する結果

定理 3-2、定理 3-3 を $N_0^p(D)$ について考えたのが次の定理である。

定理 4-1([2]) $p > 1$ とする。また f を D 上の正則関数とする。

$$(1) \quad f \in N_0^p(D) \iff f = \frac{g}{h} \quad (g, h \in H^\infty(D), h \text{ は } N_0^p(D) \text{ で可逆}).$$

$$(2) \quad f \in N_0^p(D) \iff \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \frac{(\log^+ |f(x+iy)|)^p}{x^2 + (y+1)^2} dx < \infty.$$

また、Nevanlinna 型空間に属する関数については因数分解定理が知られているが、 $N_0^p(D)$ では次のようになる：

定理 4-2([2]) $p > 1$ とする。 $f \in N_0^p(D)$, $f \neq 0$ は

$$f(z) = ae^{i\alpha z} b(z) d(z) g(z) \quad (z \in D) \dots\dots (*)$$

の形に一意に分解される。ここで、

(i) $a \in T$, $\alpha \geq 0$.

(ii) $b(z)$ は f の零点から構成される Blaschke 積.

$$(iii) \quad d(z) = \exp \left(\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z} \frac{1}{1+t^2} \log h(t) dt \right),$$

ただし $h(t) \geq 0$, $\log h \in L^1(\mathbf{R}, (1+t^2)^{-1} dt)$ で、さらに $\log^+ h \in L^p(\mathbf{R}, (1+t^2)^{-1} dt)$ が成り立つ。

$$(iv) \quad g(z) = \exp \left(\frac{1}{i} \int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z} d\mu(t) \right), \quad \text{ただし } \mu \text{ は } \mathbf{R} \text{ 上の有限実}$$

測度で、Lebesgue 測度に関して特異である。

逆に、 f が $(*)$ の形で表されるとき $f \in N_0^p(D)$ である。

定理 4-3([2]) $p > 1$ とする。また f を D 上の正則関数とする。このとき、以下が成り立つ。

f が $N_0^p(D)$ で可逆である $\iff f(z) = e^{g(z)}$ ($g(z) \in \mathfrak{H}^p$) と表される。

参考文献

- [1] Y. Iida, *Nevanlinna-type spaces on the upper half plane*, Nihonkai Math. J. **12** (2001), 113-121.
- [2] Y. Iida, *On Privalov space on the upper half plane*, submitted.
- [3] V. I. Krylov, *On functions regular in a half-plane*, Mat. Sb. **6** (48) (1939); Amer. Math. Soc. Transl. **32** (2) (1963), 37-81.
- [4] N. Mochizuki, *Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 609-620.
- [5] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994.