

クラスター代数とセルオートマトン

Cluster algebras and cellular automata

千葉大学・教育学部数学教室* 野邊 厚

Atsushi Nobe

Faculty of Education, Chiba University

nobe@faculty.chiba-u.jp

概要

連続的なクイバーの変異とある群の台グラフへの作用が可換になる場合、対応するクラスター変数の列はその台グラフ上の離散力学系とみることができる。このような離散力学系の解は正値性と Laurent 性をもつため、超離散化の手法を適用してセルオートマトンを導出することが可能である。本稿においては、平行移動群 $T(2)$ の作用と可換なクイバーの変異から離散 KdV 方程式や離散戸田格子などの離散可積分系を導出し、これらに超離散化を適用して箱玉系を構成する。さらに、同様の手法を用いて A_∞ 型クイバーの変異から離散力学系を導出し、適当な仮定の下で、その時間発展はルール 204 ECA と見なせることを示す。また、このような離散力学系の一般解を構成する。本研究は、黒田謙吾氏（千葉大学）、間田潤氏（日本大学）、中田庸一氏（東京大学）との共同研究に基づいている。

1 はじめに

一般に、クラスター代数の変数（クラスター変数）は初期変数の正係数 Laurent 多項式になることが知られており、これらの性質をクラスター代数の Laurent 性 [1, 2, 4] および正値性 [12, 6] という。初期種子、すなわちクラスター変数とクイバー（もしくは交換行列）の組が与えられると、それらの定める変異によって次の種子が一意に構成される。この新しい種子に含まれるクラスター変数は初期クラスター変数の正係数 Laurent 多項式である。また、得られた種子により新たな変異が一意に定まるため、次々と変異を行うことが可能であり、その帰結として、初期クラスター変数の正係数 Laurent 多項式の列を構成することができる。このような変数列の集合が有限集合となると、対応するクラスター代数は有限型とよばれ、それ以外は無限型とよばれる。有限型クラスター代数については、有限次元 Lie 代数を用いた分類が得られている [2]。一方、このような変異列により生み出されるクラスター変数の列を離散力学系の軌道とみることができるので、初期種子を与えることは正値性および Laurent 性をもつ離散力学系を与えることと同値である。正値性や Laurent 性は離散力学系としての“良い性質”を表すと考えられており、実際、クラスター代数の変異と離散可積分系との間には密接な関係があることが知られている [3, 10, 11, 13, 19, 14, 18]。

一般に、離散力学系の独立変数はある格子上の点の座標を表しているが、クイバーの変異から得られる離散力学系においては、クイバーの台グラフ（underlying graph）の頂点の座標を表すとみるのが自然であろう。このことは、平面グラフであるクイバーから適当な平面への埋め込みを考えればより分かり易い。一般のクイバーとその変異に対しては、このような台グラフ＝格子はそのグラフ構造が変異によって変化してしまう。しかし、連続的なクイバーの変異とある群の台

*263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-3-3

グラフへの作用が可換なクイバーにおいては、そのグラフ構造の変化は群の作用により統制できるため、群作用に相当する変異列を1回の時間発展に対応させることで、固定された格子上の力学系と見ることが可能になる。さらに、このような固定された格子上の力学系に対しては、その正値性と Laurent 性によって、超離散化の手法を適用することが可能であり、クイバーの変異からセルオートマトンが構成できることになる。

本稿においては、はじめにクラスター代数を導入し、群 G の台グラフへの作用と可換な変異をもつ G クイバーを定義する。続けて、大久保により得られた、クイバーの変異から離散可積分系を導出する過程を概観し、超離散化を通して箱玉系を構成する。さらに、 A_∞ 型クイバーの変異から導かれる離散力学系が適当な仮定の下でルール 204 ECA と見なせることを示す。また、そのような離散力学系の一般解を構成する。

2 クイバーの変異

2.1 クラスター代数

はじめに、文献 [1, 2, 4] にしたがってクラスター代数を導入しよう。 $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \cdot, \oplus)$ を半体とし、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を群環 $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ 上の有理函数体 $\mathcal{F} = \mathbb{Q}\mathbb{P}(\mathbf{x})$ の生成元とする。また、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ を $\mathbb{P}$ の元の n 個組とし、 $B = (b_{ij})$ を n 次反対称化可能整数行列とする。三つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を種子とよび、 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, B をそれぞれクラスター、係数組、交換行列とよぶ。また、 $\mathbf{x}$ および $\mathbf{y}$ の要素をそれぞれクラスター変数および係数とよぶ。交換行列 B がとくに反対称行列であるとき、ループおよび2サイクルをもたないクイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ と次の規則で1対1に対応付けられる：

$$b_{ij} = \#\{\text{arrows } i \rightarrow j\} - \#\{\text{arrows } j \rightarrow i\}$$

ここで、 Q_0 は $1, 2, \dots, n$ でラベル付けられた頂点の集合、 Q_1 は矢 (有向辺) の集合であり、 $s: Q_1 \rightarrow Q_0$ ($t: Q_1 \rightarrow Q_0$) は各矢をその始点 (終点) に対応させる写像である。クイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ に対し、辺の向きを無視した無向グラフ $\bar{Q} = (Q_0, Q_1)$ を Q の台グラフ (underlying graph) という。交換行列 B の成分の絶対値のなす行列 $|B| := (|b_{ij}|)$ は $\bar{Q}$ の隣接行列を与える。

次に種子の変異を定義する。整数 $k \in [1, n]$ に対し、 k 方向の変異 μ_k は種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を種子 $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) =: (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ に移す。種子の各要素は次のように定める：

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik} [b_{kj}]_+ & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1)$$

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & j = k, \\ y_j y_k^{[b_{kj}]_+} (y_k \oplus 1)^{-b_{kj}} & j \neq k, \end{cases} \quad (2)$$

$$x'_j = \begin{cases} \frac{y_k \prod x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod x_i^{[-b_{ik}]_+}}{(y_k \oplus 1) x_k} & j = k, \\ x_j & j \neq k, \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $[a]_+ := \max(a, 0)$ for $a \in \mathbb{Z}$ とした。

各頂点から出る n 辺が $1, 2, \dots, n$ でラベル付けされた n 正則木を $\mathbb{T}_n$ とする。頂点 $t \in \mathbb{T}_n$ に種子 $\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B^t)$ に対応させ、ラベル k をもつ辺 $t \xrightarrow{k} t'$ の端点 t, t' に対応する種子 $\Sigma_t, \Sigma_{t'}$ は k 方向の変異で移り合うものとする。この対応付け $\mathbb{T}_n \ni t \mapsto \Sigma_t$ をクラスターパターンとよぶ。

種子 Σ_t の各要素を次のように表す：

$$\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t}), \quad \mathbf{y}_t = (y_{1;t}, \dots, y_{n;t}), \quad B^t = (b_{ij}^t).$$

与えられたクラスターパターン $\mathbb{T}_n \ni t \mapsto \Sigma_t$ に対し、そのパターンに含まれるすべてのクラスターの合併集合を $\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}_t = \{x_{i;t} \mid t \in \mathbb{T}_n, 1 \leq i \leq n\}$ とおく。このとき、 $\mathcal{X}$ の生成する有理関数体 $\mathcal{F}$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数 $\mathcal{A} := \mathbb{ZP}[\mathcal{X}]$ を与えられたクラスターパターンに付随するクラスター代数とよぶ。

$u_1, u_2, \dots, u_m$ が自由に生成する乗法群を $\text{Trop}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ とする。さらに、加法 $\oplus$ を次で定義すると、 $\text{Trop}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ は半体となる：

$$\prod_{j=1}^m u_j^{a_j} \oplus \prod_{j=1}^m u_j^{b_j} = \prod_{j=1}^m u_j^{\min(a_j, b_j)} \quad (a_j, b_j \in \mathbb{Z})$$

半体 $(\text{Trop}(u_1, u_2, \dots, u_m), \cdot, \oplus)$ をトロピカル半体とよぶ。 $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ および $\mathbf{y}_{t_0} = (y_{1;t_0}, y_{2;t_0}, \dots, y_{n;t_0})$ のとき、クラスター代数 $\mathcal{A}$ は頂点 $t_0 \in \mathbb{T}_n$ でトロピカル係数をもつという [4]。

2.2 Gクイバー

交換行列 $B = (b_{ij})$ に対し、 B の Cartan 行列 $C(B) = (c_{ij})$ を次で定める：

$$c_{ij} = 2\delta_{ij} - |b_{ij}|$$

ただし、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である。対応する Cartan 行列 $C(B)$ の型 X に応じて、 X 型の交換行列 B もしくは X 型のクイバー Q とよぶことがある。

反対称整数行列はループおよび2サイクルをもたないクイバーに1対1に対応するので、(1)で与えられる交換行列 B の k 方向の変異 $B' = \mu_k(B)$ から、対応するクイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ の k 方向の変異 $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t') = \mu_k(Q)$ を導くことができる：

1. 任意の $i, j \neq k$ に対し

$$p := \#\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = i, t(\alpha) = k\}, \quad q := \#\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = k, t(\alpha) = j\}$$

とおき、頂点 i から頂点 j に向かう pq 本の矢を Q に加える。

2. 頂点 k に出入りするすべての矢の向きを逆にする。

3. 1, 2 で得られたクイバーから2サイクルをすべて取り除いたものを $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ とする。

いま、群 G はクイバー Q の頂点集合 Q_0 へ作用すると仮定する。このとき、群 G のクイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ への作用 $gQ = (gQ_0, gQ_1, s_g, t_g)$ ($g \in G$) を次のように定める；すべての頂点 $i, j \in Q_0$ に対し次が成り立つ：

$$\#\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = i, t(\alpha) = j\} = \#\{\alpha \in gQ_1 \mid s_g(\alpha) = g^{-1}(i), t_g(\alpha) = g^{-1}(j)\}$$

定義 1 $m \in \mathbb{N}$ とする。クイバー Q に対する次のような変異列を考える：

$$Q =: Q(0) \xleftarrow{\mu_1} Q(1) \xleftarrow{\mu_2} \dots \xleftarrow{\mu_m} Q(m)$$

ただし, μ_k は頂点 $k \in Q_0$ における変異を表す. とくに, Q_0 が無限集合のとき

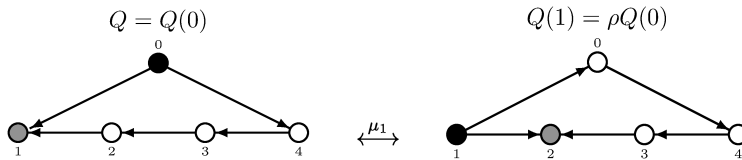
$$Q(\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q(m)$$

と定める. また, G を頂点集合 Q_0 に作用する群とする. このとき, ある $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ およびある $g \in G$ に対して $Q(m) = gQ(0)$ が成り立つならば, Q は G クイバーであるという. とくに, G が n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ であり, $g = \rho^m \in \mathfrak{S}_n$ の場合, Q は周期 m の周期クイバーであるという [5].

定義 2 クイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ において, 吸い込みおよび湧き出しを次のように定める:

1. 頂点 $j \in Q_0$ は吸い込み (sink) である $\iff j \notin s(Q_1) := \{s(\alpha) \in Q_0 \mid \alpha \in Q_1\}$ かつ $j \in t(Q_1) := \{t(\alpha) \in Q_0 \mid \alpha \in Q_1\}$.
2. 頂点 $j \in Q_0$ は湧き出し (source) である $\iff j \in s(Q_1)$ かつ $j \notin t(Q_1)$.

例 1 $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$ に対する周期 1 の周期クイバー Q :



ここで, $\bullet$ および $\bullet$ はそれぞれ吸い込みおよび湧き出しを表す. クイバー Q の交換行列 B およびそのカルタン行列 $C(B)$ は次の通り:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

よって, $C(B)$ は $A_4^{(1)}$ 型の Cartan 行列である.

注意 1 吸い込み (湧き出し) $j \in Q_0$ に対しては, 定義より $q = \#\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = k, t(\alpha) = j\} = 0$ ($p = \#\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = i, t(\alpha) = k\} = 0$) が成り立つので, クイバー Q における吸い込み (湧き出し) j 方向の変異は, j に入る (出る) 矢の向きを反転させるだけで実現できる.

吸い込みにおける変異のみで周期的になる周期クイバーを吸い込み型クイバーとよぶ.

定義 3 (Fordy – Marsh [5]) G をクイバー Q の頂点集合 Q_0 に作用する群とする. また, Q は G クイバーであり, ある $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対し $Q(m) = gQ(0)$ ($g \in G$) が成り立つと仮定する. このとき, $Q(i)$ ($0 \leq i \leq m$) の頂点 i がすべて吸い込みのとき, Q を吸い込み型クイバーとよぶ. とくに, Q が周期 m の周期クイバーのとき, Q を周期 m の吸い込み型クイバーとよぶ.

周期 1 の吸い込み型クイバーである例 1 は次のように一般化できる.

命題 1 任意の $1 \leq m \leq \lceil N/2 \rceil$ に対し, $A_{N-1}^{(1)}$ 型の吸い込み型クイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ が存在する. とくに m と N が互いに素のとき, Q は周期 m の吸い込み型クイバーとなる.

(証明) 次のクイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ が周期 m の吸い込み型クイバーであることを示す.

$$Q_0 = (0, 1, \dots, N-1), \quad Q_1 = ((0, 1), (1, 2), \dots, (N-1, 0))$$

ただし, 辺 $(i, j) \in Q_1$ は頂点 i と頂点 j を結ぶものとする. また, 頂点 $1, 3, \dots, 2m-1 \in Q_0$ は吸い込みであり, 頂点 $0, 2, \dots, 2m-2 \in Q_0$ は湧き出しであると仮定する. その他の頂点は湧き出しでも吸い込みでもなく次をみたすものとする:

$$s(i, i+1) = i+1, \quad t(i, i+1) = i \quad \text{for } i = 2m, 2m+1, \dots, N-1$$

頂点は $N+1$ 個あるので, このような頂点の取り方が可能になる最小の m は 1 であり, 最大の m は $\lceil N/2 \rceil$ である.

はじめに, 湧き出し $1 \in Q_0$ における変異 μ_1 を行くと, 頂点 1 に出入りする矢の向きが逆になり, 1 は吸い込みとなる. 続けて, 湧き出し 3 における変異 μ_3 を行くと, 頂点 3 に出入りする矢の向きが逆になり, 3 は吸い込みとなる. 2 回の変異 μ_1, μ_3 によって, 頂点 2 に出入りする矢はちょうど 1 回ずつ反転するので, 元々湧き出しであった頂点 2 は吸い込みとなる. 以下同様に変異 $\mu_5, \mu_7, \dots, \mu_{2m-1}$ を行くと, 元々吸い込みであった頂点 $1, 3, \dots, 2m-1$ は湧き出しとなり, 元々湧き出しであった頂点 $2, 4, \dots, 2m-2$ および元々湧き出しでも吸い込みでもなかった頂点 $2m$ が吸い込みとなる. このとき, 元々湧き出しであった頂点 0 および元々湧き出しでも吸い込みでもなかった頂点 $2m, 2m+1, \dots, N-1$ は湧き出しでも吸い込みでもない. よって, Q から吸い込みのみにおける m 回の変異で得られるクイバー $\mu_{2m-1} \circ \dots \circ \mu_3 \circ \mu_1(Q)$ は, 置換

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & N-1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & N-2 & N-1 \end{pmatrix}$$

を Q に作用させた ρQ に他ならない. ゆえに, Q は $\mathfrak{S}_N$ クイバーである. とくに m と N が互いに素のとき, $\sigma^m = \rho$ をみたす $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ が存在するので, 周期 m の吸い込み型クイバーである. また, このような変異の過程で得られるすべてのクイバーは $A_{N-1}^{(1)}$ 型である. ■

3 $T(2)$ クイバーと箱玉系

離散可積分系の時間発展と見なすことのできるクイバーの変異が存在する. このようなクイバーの変異は, 超離散化を通して, 箱玉系の時間発展と見なすこともできる. ここでは, [19] にしたがって, 離散 KdV 方程式および離散戸田格子の時間発展とそれぞれ等価なクイバーの変異を示す. また, 両者から箱玉系の時間発展をそれぞれ導く.

3.1 離散 KdV 方程式

次のクイバー $Q(0, 0)$ を考えよう:

$$\begin{aligned} Q(0, 0) &= (Q_0(0, 0), Q_1(0, 0), s_{(0,0)}, t_{(0,0)}), \\ Q_0(0, 0) &= \{(\ell, n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid \ell = 0, 1, n \geq 1 \text{ or } \ell \geq 0, n = 0\}, \\ Q_1(0, 0) &= \left\{ \begin{array}{l} \{(\ell, n) \rightarrow (\ell, n+1) \mid \ell = 0, 1, n \geq 0\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell+1, n-1) \mid \ell = 0, n \geq 1\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n-1) \mid \ell = 1, n \geq 1\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n) \mid \ell \geq 1, n = 0\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n) \mid \ell \geq 2, n = 0\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell+2, n) \mid \ell \geq 0, n = 0\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし, $(\ell, n) \rightarrow (\ell', n')$ は頂点 (ℓ, n) から頂点 (ℓ', n') へ向かう矢を表す. 頂点のラベルを通して, $Q(0, 0)$ を実平面 $\mathbb{R}^2$ に自然に埋め込むことができる (図 1).

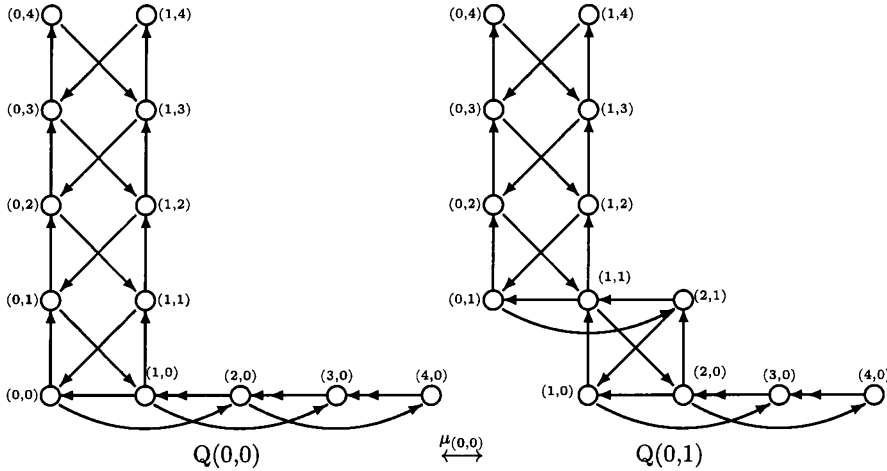


図 1: 離散 KdV 方程式に対応するクイバーの変異.

クイバー $Q(0, 0)$ の頂点集合 $Q_0(0, 0)$ に対して, 頂点 (ℓ, n) 上の初期クラスター変数を σ_ℓ^n とする. クラスター変数 σ_j^k の (ℓ, n) 方向の変異 $\mu_{(\ell, n)}$ に対して, (3) より

$$\mu_{(\ell, n)}(\sigma_j^k) = \sigma_j^k \quad \text{for } (j, k) \neq (\ell, n)$$

である. 一方, $(\ell, n) = (0, 0)$ のとき, $\mu_{(0, 0)}(\sigma_0^0)$ は次の交換関係により定まる:

$$\mu_{(0, 0)}(\sigma_0^0) = \frac{y_{(0, 0)} \sigma_1^0 + \sigma_2^0}{(y_{(0, 0)} \oplus 1) \sigma_0^0}$$

新しく得られたクラスター変数 $\mu_{(0, 0)}(\sigma_0^0)$ を σ_2^1 とおき, クイバー $\mu_{(0, 0)}(Q(0, 0))$ を $Q(0, 1)$ とおく. $Q(0, 1)$ の頂点のうち, σ_2^1 に対応するものを $(2, 1)$ とおき, その他は $Q(0, 0)$ と同じラベルで表す. 頂点のラベルを通して, クイバー $Q(0, 1)$ を $\mathbb{R}^2$ に埋め込むことができる (図 1).

ここで, $Q(0, 0)$ における頂点 $(0, 0)$ の隣接関係と $Q(0, 1)$ における頂点 $(0, 1)$ の隣接関係はラベルの付け方を除いて一致していることに注意すると, $Q(0, 1)$ の $(0, 1)$ における変異 $Q(0, 2) := \mu_{(0, 1)}(Q(0, 1))$ は次のクラスター変数の変異を導くことが分かる; $(\ell, n) = (0, 1)$ に対して

$$\mu_{(\ell, n)}(\sigma_j^k) = \begin{cases} \sigma_j^k & (j, k) \neq (\ell, n) \\ \frac{y_{(\ell, n)} \sigma_{\ell+1}^{n+1} + \sigma_{\ell+2}^n \sigma_\ell^{n+1}}{(y_{(\ell, n)} \oplus 1) \sigma_\ell^n} & (j, k) = (\ell, n) \end{cases} \quad (5)$$

新しく得られたクラスター変数を $\mu_{(\ell, n)}(\sigma_\ell^n) =: \sigma_{\ell+2}^{n+1}$ とおき, $\sigma_{\ell+2}^{n+1}$ に対するクイバー $\mu_{(\ell, n)}(Q)$ の頂点を $(\ell+2, n+1)$ とおく. 頂点のラベルを通して, クイバー $\mu_{(\ell, n)}(Q)$ を $\mathbb{R}^2$ に埋め込む.

以下同様に, 無限個の変異列 $\{\mu_{(0, n)}\}_{n \geq 0}$ を初期クイバー $Q(0, 0)$ に作用させる:

$$Q(0, 0) \xrightarrow{\mu_{(0, 0)}} Q(0, 1) \xrightarrow{\mu_{(0, 1)}} Q(0, 2) \xrightarrow{\mu_{(0, 2)}} Q(0, 3) \xrightarrow{\mu_{(0, 3)}} \dots$$

ここで, $Q(0, n+1) := \mu_{(0,n)}(Q(0, n))$ と帰納的に定めた. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(0, n)$ として得られるクイバーを $Q(1, 0)$ とおく. $Q(1, 0)$ の頂点集合 $Q_0(1, 0)$ と辺集合 $Q_1(1, 0)$ はそれぞれ次のようになる:

$$Q_0(1, 0) = \{(\ell, n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid \ell = 1, 2, n \geq 1 \text{ or } \ell \geq 0, n = 0\},$$

$$Q_1(1, 0) = \left\{ \begin{array}{l} \{(\ell, n) \rightarrow (\ell, n+1) \mid \ell = 1, 2, n \geq 0\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell+1, n-1) \mid \ell = 1, n \geq 1\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n-1) \mid \ell = 2, n \geq 1\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n) \mid \ell \geq 2, n = 0\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n) \mid \ell \geq 3, n = 0\}, \\ \{(\ell, n) \rightarrow (\ell+2, n) \mid \ell \geq 1, n = 0\} \end{array} \right\}$$

いま, 2次元平行移動群 $T(2)$ のクイバーへの作用を考えよう. とくに, 平行移動 $T(2) \ni \tau_{-1} : (i, j) \mapsto (i-1, j)$ に対して次が成り立つ:

$$Q(1, 0) = \tau_{-1}Q(0, 0)$$

$\ell = 0$ の場合と同様に, $\ell \geq 1$ に対しても, $Q(\ell, n+1) := \mu_{(\ell,n)}(Q(\ell, n))$ ($n \geq 0$) および $Q(\ell+1, 0) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\ell, n)$ と定める. このとき, 変異列 $\{\mu_{(\ell,n)}\}_{n=0,1,\dots}$ により移り合うクイバー $Q(\ell+1, 0)$ および $Q(\ell, 0)$ は, 平行移動群 $T(2)$ の作用でも移り合う. すなわち, 変異列 $\{\mu_{(\ell,n)}\}_{n=0,1,\dots}$ の作用と平行移動 $\tau_{-1} \in T(2)$ の作用とが可換である. こうして次の命題を得る.

命題 2 すべての $\ell \geq 0$ に対して次が成り立つ:

$$Q(\ell+1, 0) = \tau_{-1}Q(\ell, 0)$$

すなわち, $Q(\ell, 0)$ は $T(2)$ クイバーである. ■

このようにして, 変異列 $\{\mu_{(\ell,n)}\}_{n \geq 0}$ のクイバー $Q(\ell, 0)$ への作用は ℓ の値に依らないことが分かった. したがって, $\mu := \{\mu_{(\ell,n)}\}_{n \geq 0}$ の作用をクラスター $(\sigma_\ell^0, \sigma_\ell^1, \dots)$ の時間発展と見なすことができる:

$$\mu : (\sigma_\ell^0, \sigma_\ell^1, \dots) \mapsto (\sigma_{\ell+1}^0, \sigma_{\ell+1}^1, \dots) \quad \text{for } \ell \geq 0 \quad (6)$$

さらに, (6) は離散 KdV 方程式の時間発展と見なすことができる.

命題 3 半体を $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ とし, 初期係数を次のように与える:

$$\begin{aligned} y_{(0,0)} &= \frac{1}{\delta}, & y_{(0,n)} &= \frac{1+\delta}{\delta} \quad (n \geq 1), \\ y_{(1,0)} &= \frac{1}{1+\delta}, & y_{(1,n)} &= \frac{\delta}{1+\delta} \quad (n \geq 1), \\ y_{(\ell,0)} &= 1 \quad (\ell \geq 2) \end{aligned}$$

このとき, 交換関係 (5) は離散 KdV 方程式の双線形形式 [7]

$$(1+\delta)\sigma_{\ell-1}^n \sigma_{\ell+1}^{n+1} = \delta \sigma_{\ell+1}^n \sigma_{\ell-1}^{n+1} + \sigma_\ell^{n+1} \sigma_\ell^n \quad (7)$$

に他ならない.

(証明) はじめに, $(\ell, n) = (0, 0)$ とする. 頂点 $(0, 0)$ の隣接頂点における初期係数は次のように与えられている:

$\frac{1+\delta}{\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	
$\frac{1}{\delta}$	$\frac{1}{1+\delta}$	1

$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$
$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$

ここで, 右側の表は対応するセルにある係数のラベルを与える. このとき, σ_2^1 を与える変異 $\mu_{(0,0)}$ における交換関係は次のようになり, 主張は成り立つ:

$$\sigma_2^1 \sigma_0^0 = \frac{y_{(0,0)} \sigma_1^1 \sigma_1^0 + \sigma_2^0 \sigma_1^0}{(y_{(0,0)} \oplus 1)} = \frac{\sigma_1^1 \sigma_1^0 + \delta \sigma_2^0 \sigma_1^0}{(1 + \delta)}$$

ここで, 右上隅セル $(2, 1)$ 上の σ_2^1 を定める交換関係に表れる係数は左下隅セル $(0, 0)$ 上の $y_{(0,0)}$ のみであることに注意.

一方, この変異 $\mu_{(0,0)}$ によって, 係数は次のようになる:

$\frac{1}{\delta}$	1	δ
	$\frac{1}{\delta}$	$\frac{1}{1+\delta}$

$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$
$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$

ただし, 係数の交換関係 (2):

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & j = k, \\ y_j y_k^{[b_{kj}] + (y_k \oplus 1)^{-b_{kj}}} & j \neq k, \end{cases}$$

に注意して次のように計算した:

$$\begin{aligned} \mu_{(0,0)}(y_{(0,0)}) &= \delta, \\ \mu_{(0,0)}(y_{(0,1)}) &= \frac{y_{(0,1)} y_{(0,0)}}{y_{(0,0)} + 1} = \frac{1}{\delta}, \quad \mu_{(0,0)}(y_{(2,0)}) = \frac{y_{(2,0)} y_{(0,0)}}{y_{(0,0)} + 1} = \frac{1}{1 + \delta}, \\ \mu_{(0,0)}(y_{(1,0)}) &= y_{(1,0)} (y_{(0,0)} + 1) = \frac{1}{\delta}, \quad \mu_{(0,0)}(y_{(1,1)}) = y_{(1,1)} (y_{(0,0)} + 1) = 1 \end{aligned}$$

続けて, 頂点 $(0, 1)$ の隣接頂点における係数を表示する.

$\frac{1+\delta}{\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$	
$\frac{1}{\delta}$	1	δ

$(0, 2)$	$(1, 2)$	$(2, 2)$
$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$

右上隅セル $(2, 2)$ 上の σ_2^2 を定める交換関係に表れる係数は左下隅セル $(0, 1)$ 上の $y_{(0,1)}$ のみであるので, $(\ell, n) = (0, 1)$ に対しても主張は成り立つ.

一方, この変異 $\mu_{(0,1)}$ によって, 係数は次のようになる:

$\frac{1}{\delta}$	1	δ
	$\frac{1+\delta}{\delta}$	$\frac{\delta}{1+\delta}$

$(0, 2)$	$(1, 2)$	$(2, 2)$
$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$

(8)

ここでは次のように計算した:

$$\begin{aligned} \mu_{(0,1)} \circ \mu_{(0,0)}(y_{(0,1)}) &= \frac{1}{\mu_{(0,0)}(y_{(0,1)})} = \delta, \\ \mu_{(0,1)} \circ \mu_{(0,0)}(y_{(0,0)}) &= \frac{\mu_{(0,0)}(y_{(0,0)}) \mu_{(0,0)}(y_{(0,1)})}{\mu_{(0,0)}(y_{(0,1)}) + 1} = \frac{\delta}{1 + \delta}, \\ \mu_{(0,1)} \circ \mu_{(0,0)}(y_{(1,1)}) &= \mu_{(0,0)}(y_{(1,1)}) (\mu_{(0,0)}(y_{(0,1)}) + 1) = \frac{1 + \delta}{\delta}, \\ \mu_{(0,1)} \circ \mu_{(0,0)}(y_{(0,2)}) &= \frac{\mu_{(0,0)}(y_{(0,2)}) \mu_{(0,0)}(y_{(0,1)})}{\mu_{(0,0)}(y_{(0,1)}) + 1} = \frac{1}{\delta}, \\ \mu_{(0,1)} \circ \mu_{(0,0)}(y_{(1,2)}) &= \mu_{(0,0)}(y_{(1,2)}) (\mu_{(0,0)}(y_{(0,1)}) + 1) = 1 \end{aligned}$$

(8) において、上側のセル $(0, 2), (1, 2), (2, 2)$ 上の係数は一つ前の変異 $\mu_{(0,0)}$ を行った後のセル $(0, 1), (1, 1), (2, 1)$ 上の係数とすべて同じであり、初期条件よりそれらの上方のセル上の係数は一致しているので、次の変異 $\mu_{(0,2)}$ に対する交換関係においても主張は成り立つ。

また、(8) における下側のセル $(0, 1), (1, 1), (2, 1)$ 上の係数は $\mu_{(0,n)}$ ($n \geq 2$) により変化しないが、これらは初期係数に平行移動 τ_{-1} を作用させたものに一致するので、次の時間発展 $\{\mu_{(1,n)}\}_{n \geq 0}$ においても同様に主張は成り立つ。よって、すべての時間発展 $\{\mu_{(\ell,n)}\}_{n \geq 0}$ ($\ell \geq 0$) について主張は成り立つ。 ■

さて、新しい従属変数を導入しよう：

$$u_n^\ell := \frac{\sigma_\ell^n \sigma_{\ell-1}^{n+1}}{\sigma_\ell^{n+1} \sigma_{\ell-1}^n}, \quad v_n^\ell := \frac{\sigma_{\ell+1}^n \sigma_{\ell-1}^n}{(\sigma_\ell^n)^2} \quad \text{for } \ell \geq 1, n \geq 0$$

このとき、離散 KdV 方程式の双線形形式 (7) から次を得る：

$$(1 + \delta) \frac{1}{u_n^{\ell+1}} = \delta u_n^\ell + \frac{1}{v_n^\ell}$$

さらに、 u_n^ℓ, v_n^ℓ の定義より再帰的に次の関係が導かれる：

$$\frac{1}{v_n^\ell} = \frac{u_{n-1}^{\ell+1}}{u_{n-1}^\ell} \frac{1}{v_{n-1}^\ell} = \frac{u_{n-1}^{\ell+1}}{u_{n-1}^\ell} \frac{u_{n-2}^{\ell+1}}{u_{n-2}^\ell} \frac{1}{v_{n-2}^\ell} = \dots = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{\ell+1}}{u_k^\ell} \frac{1}{v_0^\ell}$$

ここで、境界条件

$$v_0^\ell = \frac{\sigma_{\ell+1}^0 \sigma_{\ell-1}^0}{(\sigma_\ell^0)^2} = 1 \quad \text{for } \ell \geq 1$$

を仮定すると

$$\frac{1}{v_n^\ell} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{\ell+1}}{u_k^\ell}$$

より、(半無限) 離散 KdV 方程式を得る：

$$(1 + \delta) \frac{1}{u_n^{\ell+1}} = \delta u_n^\ell + \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{\ell+1}}{u_k^\ell} \quad (9)$$

このとき、 $\ell \geq 1$ に対し、変異の列 $\mu = \{\mu_{(\ell,n)}\}_{n \geq 0}$ が時間発展

$$(u_0^\ell, u_1^\ell, \dots) \mapsto (u_0^{\ell+1}, u_1^{\ell+1}, \dots)$$

を与える。

よく知られているように、(9) において、 $\delta = e^{-1/\varepsilon}$ 、 $u_n^\ell = e^{U_n^\ell/\varepsilon}$ とおき ($\varepsilon > 0$)、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとると、超離散 KdV 方程式を得る [21]：

$$U_n^{\ell+1} = \min \left[1 - U_n^\ell, \sum_{k=-1}^{n-1} (U_k^\ell - U_k^{\ell+1}) \right] \quad (10)$$

U_n^ℓ を時刻 ℓ において n 番目の箱に入っている玉の個数 (0 または 1) とすると、(10) は箱玉系の時間発展を与える [20]。

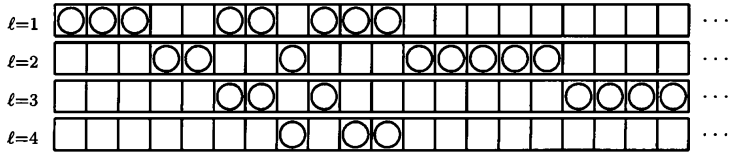


図 2: 箱玉系の時間発展例. 箱のラベルは右方向に増加するようにとる.

例 2 図 2 に箱玉系の時間発展例を示す. ただし, 初期条件を次のようにとった:

$$\begin{cases} U_n^1 = 1 & n = 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, \\ U_n^1 = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このようにして, クイバー (4) の変異列 μ から, 離散 KdV 方程式および箱玉系の時間発展が導かれることが示された.

3.2 離散戸田格子

離散 KdV 方程式と同様に, 離散戸田格子の時間発展もあるクイバーの変異と見なすことができる. 次のクイバー $Q(0, 0)$ を考えよう:

$$\begin{aligned} Q(0, 0) &= (Q_0(0, 0), Q_1(0, 0), s_{(0,0)}, t_{(0,0)}), \\ Q_0(0, 0) &= \{(\ell, n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid \ell = 0, 1, n \geq 0, \ell + 2n = 0, n < 0 \text{ or } \ell + 2n = 1, n < 0\}, \\ Q_1(0, 0) &= \left\{ \begin{aligned} &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell, n+1) \mid \ell = 0, 1, n \geq 0\}, \\ &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell+1, n-1) \mid \ell = 0, n \geq 1\}^2, \\ &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n) \mid \ell = 1, n \geq 0\}^2, \\ &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n) \mid \ell + 2n = 1, n < 0\}^2, \\ &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n+1) \mid \ell + 2n = 0, n < 0\}^2, \\ &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell+2, n-1) \mid \ell + 2n = 1, n \leq 0\}, \\ &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell+2, n-1) \mid \ell + 2n = 0, n \leq 0\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, $\{*\}^2$ は集合 $\{*\}$ に含まれる矢が 2 本ずつ存在することを表す.

クイバー Q の頂点集合 Q_0 に対して, 頂点 (ℓ, n) 上の初期クラスター変数を σ_ℓ^n とする. クラスター変数 σ_j^k の (ℓ, n) 方向の変異 $\mu_{(\ell,n)}$ に対して, (3) より

$$\mu_{(\ell,n)}(\sigma_j^k) = \sigma_j^k \quad \text{for } (j, k) \neq (\ell, n)$$

である. 一方, $(\ell, n) = (0, 0)$ のとき, $\mu_{(\ell,n)}(\sigma_\ell^n)$ は次の交換関係により定まる:

$$\mu_{(\ell,n)}(\sigma_\ell^n) = \frac{y_{(\ell,n)}(\sigma_{\ell+1}^n)^2 + \sigma_{\ell+2}^{n-1}\sigma_\ell^{n+1}}{(y_{(\ell,n)} \oplus 1)\sigma_\ell^n} \quad (12)$$

新しく得られたクラスター変数を $\mu_{(0,0)}(\sigma_0^0) =: \sigma_2^0$ とおき, クイバー $\mu_{(0,0)}(Q(0, 0))$ を $Q(0, 1)$ とおく. また, $Q(0, 1)$ の頂点のうち, σ_2^0 に対する頂点を $(2, 0)$ とおき, その他は $Q(0, 0)$ と同じとする. $Q(0, 1)$ における頂点 $(0, 1)$ の隣接関係は, $Q(0, 0)$ における頂点 $(0, 0)$ の隣接関係とラベル

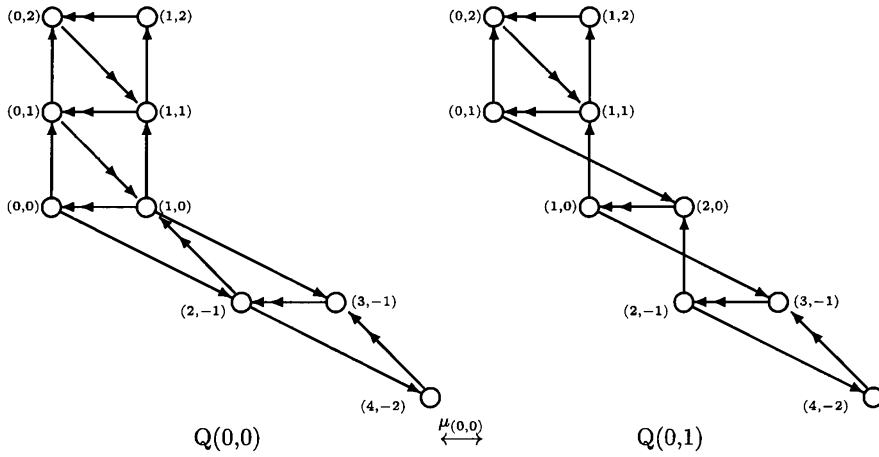


図 3: 離散戸田格子の時間発展に対応するクイバーの変異.

付けを除いて一致している。したがって、以下同様にクラスター変数 $\mu_{(0,n)}(\sigma_0^n) =: \sigma_2^n$ およびクイバー $Q(0, n+1) := \mu_{(0,n)}(Q(0, n))$ ($n \geq 0$) を定めることができる。クイバー $Q(0, n+1)$ の頂点のうち、 σ_2^{n+1} に対応する $(2, n+1)$ 以外は $Q(0, n)$ と同じである。頂点のラベルを通して、クイバー $Q(0, n)$ を $\mathbb{R}^2$ に自然に埋め込む (図 3)。

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(0, n)$ の定めるクイバーを $Q(1, 0)$ とおく。続けて、 $Q(1, n+1) := \mu_{(1,n)}(Q(1, n))$ ($n \geq 0$) とおき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(1, n)$ の定めるクイバーを $Q(2, -1)$ とおく。このとき、平行移動 $T(2) \ni \tau_{-2}^1 : (i, j) \mapsto (i-2, j+1)$ に対し、次が成り立つ：

$$Q(2, -1) = \tau_{-2}^1 Q(0, 0)$$

$\ell \geq 1$ に対しても、同様に $Q(\ell, n+1) := \mu_{(\ell,n)}(Q(\ell, n))$ ($n \geq \lceil -\frac{\ell}{2} \rceil$) とおく。また、交換関係 (12) により新しく得られたクラスター変数を $\mu_{(\ell,n)}(\sigma_\ell^n) =: \sigma_{\ell+2}^n$ とおく。 $Q(\ell, n+1)$ の頂点のうち、 $\sigma_{\ell+2}^n$ に対する頂点を $(\ell+2, n)$ とおく。また、 ℓ が偶数のとき $Q(\ell+1, -\frac{\ell}{2}) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\ell, n)$ と定め、 ℓ が奇数のとき $Q(\ell+1, -\frac{\ell+1}{2}) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\ell, n)$ と定める。こうして次の命題を得る。

命題 4 すべての $\ell \geq 0$, $\ell+2n=0, 1$ に対して次が成り立つ：

$$Q(\ell+2, n-1) = \tau_{-2}^1 Q(\ell, n)$$

すなわち、 $Q(\ell, n)$ は $T(2)$ クイバーである。 ■

したがって、変異列 $\mu := \{\mu_{\ell,n}\}_{n \geq \lceil -\frac{\ell}{2} \rceil}$ の作用をクラスター

$$\left(\sigma_\ell^{\lceil -\frac{\ell}{2} \rceil}, \sigma_\ell^{\lceil -\frac{\ell}{2} \rceil+1}, \dots \right) \quad \text{for } \ell \geq 0$$

の時間発展と見ることができる。さらに、この作用は離散戸田格子の時間発展と等価である。

命題 5 半体を $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot) = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$ とし、初期係数をすべて $y_{(\ell,n)} = 1$ とする。このとき、交換関係 (12) は離散戸田格子の双線形形式 [8]

$$\sigma_{\ell-1}^n \sigma_{\ell+1}^n = \sigma_{\ell+1}^{n-1} \sigma_{\ell-1}^{n+1} + (\sigma_\ell^n)^2 \quad (13)$$

に他ならない。

(証明) トロピカル半体上の初期係数のとり方より、係数は常に1である。よって、明らかに主張は成り立つ。 ■

ここで、新しい従属変数を導入しよう。

$$I_n^\ell := \frac{\sigma_\ell^{n-1} \sigma_{\ell+1}^n}{\sigma_\ell^n \sigma_{\ell+1}^{n-1}}, \quad V_n^\ell := \frac{\sigma_\ell^{n+1} \sigma_{\ell+1}^{n-1}}{\sigma_\ell^n \sigma_{\ell+1}^n} \quad \text{for } \ell \geq 0, n \geq \lceil -\frac{\ell}{2} \rceil + 1$$

とおくと、境界条件 $\sigma_{-2n}^n = 0, \sigma_{1-2n}^n = 1$ ($n \leq 0$) のもとで、(13) より、(半無限) 離散戸田格子を得る [9] :

$$I_n^{\ell+1} = I_n^\ell + V_n^\ell - V_{n-1}^{\ell+1}, \quad V_n^{\ell+1} = \frac{I_{n+1}^\ell V_n^\ell}{I_n^{\ell+1}} \quad (14)$$

さらに、正数 $\varepsilon > 0$ に対し、従属変数 Q_n^ℓ および W_n^ℓ を次のように定める :

$$I_n^\ell = e^{-Q_n^\ell/\varepsilon}, \quad V_n^\ell = e^{-W_n^\ell/\varepsilon}$$

これらを (14) に代入し、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとると超離散戸田格子を得る [15] :

$$\begin{cases} Q_n^{\ell+1} = \min [W_n^\ell, Q_n^\ell - X_n^\ell], \\ X_n^\ell = \min_{1 \leq k \leq n+(\ell-1)/2} \left[0, \sum_{j=1}^k (W_{n-j}^\ell - Q_{n-j}^\ell) \right], \\ W_n^{\ell+1} = Q_{n+1}^\ell + W_n^\ell - Q_n^{\ell+1}, \\ Q_n^{2-2n} = \infty \quad (n \leq 1) \end{cases} \quad (15)$$

W_n^ℓ を空き箱の連続する個数、 Q_n^ℓ を玉の入った箱の連続する個数とし、これらを交互に並べた初期状態 $W_1^0 Q_2^0 W_2^0 Q_3^0 \dots$ を仮定すると、(15) は箱玉系の時間発展を与える。

例 3 初期条件を次のようにとると、(15) は例 2、図 2 の箱玉系の時間発展を与える。

$$\begin{aligned} W_1^0 = 0, W_2^0 = 2, W_n^0 = 1 \quad & \text{for } n \geq 3, \\ Q_2^0 = 3, Q_3^0 = 2, Q_4^0 = 3, Q_n^0 = 0 \quad & \text{for } n \geq 5 \end{aligned}$$

このようにして、クイバー (11) の変異列 μ から、離散戸田格子および箱玉系の時間発展が導かれることが示された。

4 A_∞ 型クイバーとセルオートマトン

離散 KdV 方程式や離散戸田格子と同様に、 $T(2)$ クイバーから離散力学系を構成することができる。ここでは、さらに吸い込み型クイバーとなるものを考える。次のクイバー $Q(0, 0) = (Q_0(0, 0), Q_1(0, 0), s_{(0,0)}, t_{(0,0)})$ を導入しよう :

$$\begin{aligned} Q_0(0, 0) &= \{(\ell, n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid \ell = 0 \text{ or } n = 0\}, \\ Q_1(0, 0) &= \left\{ \begin{aligned} &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell, n-1) \mid \ell = 0, n \geq 1\}, \\ &\{(\ell, n) \rightarrow (\ell-1, n) \mid \ell \geq 1, n = 0\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

頂点 $(0, 0)$ のみが吸い込みであり、他の頂点は吸い込みでも湧き出しでもないことに注意 (図 4)。適切な変異の列により、 $Q(0, 0)$ は吸い込み型クイバーになることを示す。

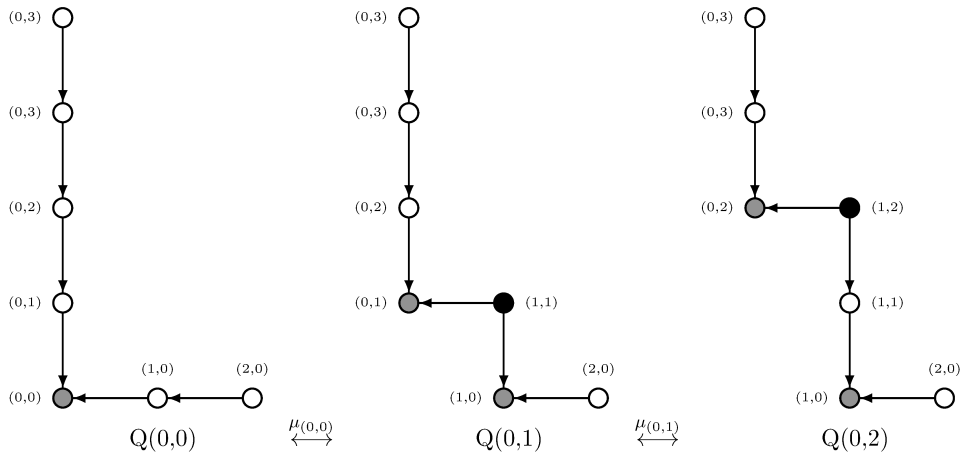


図 4: A_∞ 型クイバーの変異. 吸い込みでの変異のみを適用する, 吸い込み型クイバーである.

ここでは, 簡単のため, 半体を $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot) = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$ とし, 初期係数をすべて $y_{(\ell, n)} = 1$ と仮定する (すなわち, 係数なしの場合を考える).

交換行列 $B(0, 0)$ は次のような三重対角行列である:

$$B(0, 0) = \begin{pmatrix} \cdots & (0, 2) & (0, 1) & (0, 0) & (1, 0) & (2, 0) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ (0, 2) & \ddots & 0 & 1 & & & \\ (0, 1) & & -1 & 0 & 1 & & \\ (0, 0) & & & -1 & 0 & -1 & \\ (1, 0) & & & & 1 & 0 & -1 \\ (2, 0) & & & & & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

頂点 $(0, 0)$ のみが吸い込みなので, $(0, 0)$ 行 ($(0, 0)$ 列) は $-1, 0$ ($(0, 1)$ のみ) からなり, 他の行 (列) は $-1, 0, 1$ からなる. 交換行列 $B(0, 0)$ の Cartan 行列 $C(B(0, 0))$ は A_∞ 型である.

クイバー $Q(0, 0)$ に対する初期クラスターを $(\{\sigma_\ell^n \mid \ell = 0 \text{ or } n = 0\})$ とする. クイバー $Q(0, 0)$ から変異 $\mu_{(0, 0)}$ により得られたクイバー $\mu_{(0, 0)}(Q)$ を $Q(0, 1)$ とおく. クラスター変数 σ_j^k の $(0, 0)$ 方向の変異 $\mu_{(0, 0)}$ に対して, (3) より

$$\mu_{(0, 0)}(\sigma_j^k) = \sigma_j^k \quad \text{for } (j, k) \neq (0, 0)$$

である. よって, クイバー $Q(0, 1)$ の頂点のうち, $(0, 0)$ 以外は $Q(0, 0)$ と同じラベルで表す. 一方, $\mu_{(0, 0)}(\sigma_0^0) =: \sigma_1^1$ とおくと, σ_1^1 は次の交換関係により定まる:

$$\sigma_1^1 \sigma_0^0 = 1 + \sigma_1^0 \sigma_0^1$$

クラスター変数 σ_1^1 に対応する $Q(0, 1)$ の頂点を $(1, 1)$ とおき, $Q(0, 1)$ を $\mathbb{R}^2$ へ埋め込む (図 4). このとき, 頂点 $(0, 1)$ は吸い込みとなり, $(1, 1)$ は湧き出しとなる. 続けて, $(0, 1)$ 方向の変異 $\mu_{(0,1)}$ に対して

$$\mu_{(0,1)}(\sigma_j^k) = \begin{cases} \sigma_j^k & (j, k) \neq (0, 1) \\ \frac{1 + \sigma_1^1 \sigma_0^2}{\sigma_0^1} & (j, k) = (0, 1) \end{cases}$$

となる. $Q(0, 1)$ から変異 $\mu_{(0,1)}$ により得られたクイバー $\mu_{(0,1)}(Q(0, 1))$ を $Q(0, 2)$ とおく. また, クラスター変数を $\mu_{(0,1)}(\sigma_0^1) =: \sigma_1^2$ とおき, 対応する $Q(0, 2)$ の頂点を $(1, 2)$ とおく. クイバー $Q(0, 2)$ を $\mathbb{R}^2$ へ埋め込むと図 4 のようになる. また, 頂点のラベルに対応して交換行列のラベルも変更するものとする.

以下同様に, クイバー $Q(0, n)$ に対して, 吸い込み σ_0^n における変異 $\mu_{(0,n)}$ を適用すると, クイバー $Q(0, n+1) := \mu_{(0,n)}(Q(0, n))$ が得られる. 新しいクラスター変数 σ_1^{n+1} は次の交換関係で得られる:

$$\sigma_1^{n+1} \sigma_0^n = 1 + \sigma_1^n \sigma_0^{n+1}$$

クラスター変数 σ_1^{n+1} に対応するクイバー $Q(0, n+1)$ の頂点を $(1, n+1)$ とおく.

ここで, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(0, n)$ の定めるクイバーを $Q(1, 0)$ とおくと, $Q(1, 0)$ の頂点集合は

$$\{\sigma_j^k \mid j = 1 \text{ or } k = 0\}$$

である. したがって, 平行移動 $T(2) \ni \tau_{-1} : (i, j) \mapsto (i-1, j)$ に対し, 次が成り立つ:

$$Q(1, 0) = \tau_{-1} Q(0, 0)$$

同様に $\ell \geq 1$ に対し, $Q(\ell, n+1) := \mu_{(\ell,n)}(Q(\ell, n))$ ($n \geq 0$) とおく. 新しいクラスター変数 $\sigma_{\ell+1}^{n+1}$ は次の交換関係で得られる:

$$\sigma_{\ell+1}^{n+1} \sigma_\ell^n = 1 + \sigma_{\ell+1}^n \sigma_\ell^{n+1} \quad (16)$$

また, $Q(\ell+1, 0) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\ell, n)$ と定める. $Q(\ell+1, 0)$ の頂点集合は

$$\{\sigma_j^k \mid j = \ell+1 \text{ or } n = 0\}$$

である.

命題 6 すべての $\ell \geq 0$ に対して次が成り立つ:

$$Q(\ell+1, 0) = \tau_{-1} Q(\ell, 0)$$

すなわち, $Q(\ell, 0)$ は $T(2)$ クイバーである. また, すべての変異は吸い込みにおいて与えられるので, $Q(\ell, 0)$ は吸い込み型クイバーでもある. ■

このようにして, $\mu := \{\mu_{(\ell,n)}\}_{n \geq 0}$ の作用をクラスター $(\sigma_\ell^0, \sigma_\ell^1, \dots)$ の時間発展と見なすことができる:

$$\mu : (\sigma_\ell^0, \sigma_\ell^1, \dots) \mapsto (\sigma_{\ell+1}^0, \sigma_{\ell+1}^1, \dots) \quad \text{for } \ell \geq 0$$

さらに, この変異列に現れるすべてのクイバー $Q(\ell, n)$ に対応する交換行列 $B(\ell, n)$ の Cartan 行列は A_∞ 型であるため, これらは A_∞ 型の吸い込み型クイバーといえる.

4.1 超離散化

さて、新しい従属変数を導入しよう。

$$u_n^\ell := \frac{\sigma_\ell^{n+1}}{\sigma_\ell^n}$$

このとき、境界条件 $\sigma_\ell^0 = 1$ ($\ell \geq 0$) のもと、(16) より次を得る：

$$u_n^{\ell+1} = u_n^\ell + \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^\ell u_k^{\ell+1}} \quad (17)$$

さらに、正数 $\varepsilon > 0$ に対し、 $u_n^\ell = e^{U_n^\ell/\varepsilon}$ とおいて (17) に代入し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると次の区分線形写像力学系を得る：

$$\begin{cases} U_n^{\ell+1} = \max [U_n^\ell, -X_{n-1}^\ell], \\ X_n^\ell = \sum_{k=0}^n (U_k^\ell + U_k^{\ell+1}) \end{cases} \quad (18)$$

初期値を適切にとると、区分線形写像力学系 (18) は定常進行波解をもつ線形セルオートマトンとなる。

命題 7 すべての $n \geq 0$ に対し $U_n^0 \in \{0, 1\}$ と仮定する。このとき、区分線形写像力学系 (18) はルール 204 ECA (Elementary Cellular Automaton) の時間発展を表す。

(証明) 初期値を $\{0, 1\}$ にとれば

$$X_n^0 \geq 0 \quad \text{for } n \geq 0$$

が成り立つので、(18) より

$$U_n^1 = U_n^0 \in \{0, 1\} \quad \text{for } n \geq 0$$

が成り立つ。よって、すべての $\ell \geq 0$ に対して

$$X_n^\ell \geq 0 \quad \text{for } n \geq 0$$

したがって

$$U_n^{\ell+1} = U_n^\ell \in \{0, 1\} \quad \text{for } n \geq 0$$

が成り立つ。こうして (18) は線形化され、ルール 204 ECA となる。 ■

4.2 一般解

Somos 4 や Somos 5 などの、クイバーの変異から得られる離散力学系の一般解の構成法が中田により得られている [17]。 A_∞ 型クイバーの変異から得られる離散力学系 (16) に対しても、同様に一般解を構成することができる [16]。

命題 8 $j \geq 1$ および $t \geq 1$ に対し, (16) の一般解 σ_j^t は次のような初期クラスター変数 σ_ℓ^n ($\ell = 0$ or $n = 0$) の正係数 Laurent 多項式で与えられる:

$$\sigma_j^t = \frac{\sigma_j^0 \sigma_0^t}{\sigma_0^0} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq j-1 \\ 0 \leq m \leq t-1}} \frac{\sigma_j^0 \sigma_0^t \sigma_0^0}{\sigma_k^0 \sigma_{k+1}^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \quad (19)$$

(証明) $j \geq 0$ および $t \geq 0$ に対し, A_j, B^t を次のように定める:

$$A_j := \prod_{\ell=0}^j \sigma_\ell^0, \quad B^t := \prod_{n=0}^t \sigma_0^n$$

また, σ_j^t は初期変数の Laurent 多項式であるので, その分母と分子をそれぞれ $\hat{\sigma}_j^t$ および $\bar{\sigma}_j^t$ で表すことにする:

$$\sigma_j^t = \frac{\bar{\sigma}_j^t}{\hat{\sigma}_j^t} \quad (20)$$

ただし, $\hat{\sigma}_j^t$ および $\bar{\sigma}_j^t$ はそれぞれ初期変数 σ_j^0 ($j \geq 0$) および σ_0^t ($n \geq 0$) の多項式である.

いま, $\hat{\sigma}_j^t$ は次で与えられるものと仮定する:

$$\hat{\sigma}_j^t = \sigma_0^0 A_{j-1} B^{t-1} \quad (21)$$

このとき, $\bar{\sigma}_j^t$ が次のように表されることを示せばよい:

$$\bar{\sigma}_j^t = A_j B^t C_{j-1}^{t-1}, \quad C_{j-1}^{t-1} := \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq j-1 \\ 0 \leq m \leq t-1}} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_k^0 \sigma_{k+1}^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} + 1 \right) \quad (22)$$

実際, 仮定 (21) および (22) のもとで $\bar{\sigma}_j^t / \hat{\sigma}_j^t$ を計算すると (19) を得る. また, 仮定 (20) および (21) のもと, (16) は次のように表される:

$$\bar{\sigma}_j^t \hat{\sigma}_{j-1}^{t-1} = (\sigma_0^0)^2 A_{j-2} A_{j-1} B^{t-2} B^{t-1} + \bar{\sigma}_j^{t-1} \bar{\sigma}_{j-1}^t \quad (23)$$

よって, (22) が (23) をみたすことを示せば主張は成り立つ.

まず, (23) の右辺は次のように計算できる.

$$(\sigma_0^0)^2 A_{j-2} A_{j-1} B^{t-2} B^{t-1} + \bar{\sigma}_j^{t-1} \bar{\sigma}_{j-1}^t = A_{j-1} A_j B^{t-1} B^t \left(\frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^{t-1} \sigma_0^t} + C_{j-1}^{t-2} C_{j-2}^{t-1} \right)$$

ここで, $C_{j-1}^{t-2} C_{j-2}^{t-1}$ を取り出して計算しよう.

$$\begin{aligned} C_{j-1}^{t-2} &= C_{j-2}^{t-2} + \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}}, \\ C_{j-2}^{t-1} &= C_{j-1}^{t-1} - \sum_{0 \leq m \leq t-1} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \end{aligned}$$

を用いて, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
C_{j-1}^{t-2} C_{j-2}^{t-1} &= \left(C_{j-2}^{t-2} + \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \right) \left(C_{j-1}^{t-1} - \sum_{0 \leq m \leq t-1} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \right) \\
&= C_{j-2}^{t-2} C_{j-1}^{t-1} - C_{j-2}^{t-2} \sum_{0 \leq m \leq t-1} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} + C_{j-1}^{t-1} \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \\
&\quad - \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \sum_{0 \leq m \leq t-1} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \\
&= C_{j-2}^{t-2} C_{j-1}^{t-1} - C_{j-2}^{t-2} \sum_{0 \leq m \leq t-1} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} + C_{j-1}^{t-1} \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \\
&= C_{j-2}^{t-2} C_{j-1}^{t-1} - C_{j-2}^{t-2} \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} - C_{j-2}^{t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^{t-1} \sigma_0^t} \\
&\quad + C_{j-2}^{t-2} \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} + \sum_{0 \leq k \leq j-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_k^0 \sigma_{k+1}^0 \sigma_0^{t-1} \sigma_0^t} \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \\
&= C_{j-2}^{t-2} C_{j-1}^{t-1} - \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^{t-1} \sigma_0^t} - \sum_{\substack{0 \leq k \leq j-2 \\ 0 \leq m \leq t-2}} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_k^0 \sigma_{k+1}^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^{t-1} \sigma_0^t} \\
&\quad + \sum_{0 \leq k \leq j-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_k^0 \sigma_{k+1}^0 \sigma_0^{t-1} \sigma_0^t} \sum_{0 \leq m \leq t-2} \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^m \sigma_0^{m+1}} \\
&= C_{j-2}^{t-2} C_{j-1}^{t-1} - \frac{(\sigma_0^0)^2}{\sigma_{j-1}^0 \sigma_j^0 \sigma_0^{t-1} \sigma_0^t}
\end{aligned}$$

したがって

$$(23) \text{ の右辺} = A_{j-1} A_j B^{t-1} B^t C_{j-2}^{t-2} C_{j-1}^{t-1} = \bar{\sigma}_j^t \bar{\sigma}_{j-1}^{t-1} = (23) \text{ の左辺}$$

を得る。よって主張は示された。 ■

5 まとめ

対称群の作用と可換な変異列をもつクイバー（周期クイバー）を拡張し、群 G の台グラフへの作用と可換な変異列をもつ G クイバーを定義した。とくに、 G が 2 次元平行移動群 $T(2)$ のとき、適切な $T(2)$ クイバーの変異列から離散 KdV 方程式や離散戸田格子などの離散可積分系の時間発展が構成できることを示した。クラスター代数の正值性と Laurent 性からこのような離散力学系は超離散化可能であり、実際にこの両者から箱玉系が導出できる。さらに、 $T(2)$ クイバーかつ吸い込み型クイバーである A_∞ 型クイバーから、同様の手続きにより離散力学系を導出し、一般解を求めた。さらに、この離散力学系から超離散化を通してルール 204 ECA を構成した。ルール 204 ECA は線形波動解をもつ CA であり、線形・非線形両方の波動現象を示す CA がそれぞれ得られたことになる。本稿で考察した A_∞ 型クイバーは吸い込みを一つしか持たないものであったが、 $T(2)$ クイバーとして吸い込みの数を増やすことももちろん可能であり、そのようなクイバーに対する離散力学系はより複雑な挙動を示すことが数値実験などから分かっている。すなわち、吸い込みの配置が CA のルールに相当すると考えられる。このような一般の A_∞ 型クイバーから得られる離散力学系について考察することは今後の課題である。

謝辞 本研究は科学研究費補助金（基盤研究 (C) 課題番号 26400107）の助成を受けている。

参考文献

- [1] Fomin S and Zelevinsky A, “Cluster algebras I: Foundations”, *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2002), 497-529
- [2] Fomin S and Zelevinsky A, “Cluster algebras II: Finite type classification”, *Invent. Math.*, **154** (2003), 63-121
- [3] Fomin S and Zelevinsky A, “Y-systems and generalized associahedra”, *Ann. of Math.* **158** (2003) 977-1018
- [4] Fomin S and Zelevinsky A, “Cluster algebras IV: Coefficients”, *Compositio Math.*, **143** (2007), 112-164
- [5] Fordy A and Marsh R, “Cluster mutation-periodic quivers and associated Laurent series”, *J. Algebr. Comb.* **34** (2011) 19-66
- [6] Gross M, Hacking P, Keel S and Kontsevich M, “Canonical bases for cluster algebras”, *Preprint arXiv:1411.1394v2* (2014)
- [7] Hirota R, “Nonlinear Partial Difference Equations. I. A Difference Analogue of the Korteweg-de Vries Equation”, *J. Phys. Soc. Japan.* **43** (1977) 1424-1433
- [8] Hirota R, “Nonlinear Partial Difference Equations. II. Discrete-Time Toda Equation”, *J. Phys. Soc. Japan.* **43** (1977) 2074-2078
- [9] Hirota R, Tsujimoto S and Imai T 1993 “Difference scheme of soliton equations” in *Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems* edited by Christiansen P L, Eilbeck J G and Parmentier R D (New York: Plenum Press)
- [10] Inoue R, Iyama O, Kuniba A, Nakanishi T and Suzuki J, “Periodicities of T-systems and Y-systems”, *Nagoya Math. J.* **197** (2010) 59-174
- [11] Kanki M, Mada J and Tokihiro T, “Integrability criterion in terms of coprime property for the discrete Toda equation”, *J. Math. Phys* **56** (2015) 022706
- [12] Lee K and Schiffler R, “Positivity for cluster algebras”, *Ann. Math.* **182** (2015) 73-125
- [13] Mase T, “The Laurent phenomenon and discrete integrable systems”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B41** (2013)43-64
- [14] Mase T, “Investigation into the role of the Laurent property in integrability”, *J. Math. Phys.* **57** (2016) 022703
- [15] Nagai A, Tokihiro T and Satsuma J, “Ultra-discrete Toda molecule equation”, *Phys. Lett. A* **244** (1998) 383-388
- [16] 中田庸一, 「…方程式の初期値問題の解法」, セミナーノート (2016)

- [17] Nakata Y, “The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations”, *Preprint* arXiv:1701.04262 (2017)
- [18] Nobe A, “Mutations of the cluster algebra of type $A_1^{(1)}$ and the periodic discrete Toda lattice”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016) 285201
- [19] Okubo N, “Discrete integrable systems and cluster algebras”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B41** (2013) 25-42
- [20] Takahashi D and Satsuma J, “A soliton cellular automaton”, *J. Phys. Soc. Japan*, **59** (1990) 3514-3519
- [21] Tsujimoto S and Hirota R, “Ultradiscrete KdV Equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **67** (1998) 1809-1810