

Spontaneous Singularity Formation in the Shape of
Vortex Sheet in Three-Dimensional Flow:
Analysis and Numerical Simulation

富大理 石原 卓
名大工 金田行雄

1. はじめに

自然界の多くの流れの中で、渦度はしばしば非常に薄い領域に集中する。渦面はこの様な領域を表わす基本的なモデルで、流れ場の接線成分の不連続面として定義される。渦面は流れ方向の摂動に対して不安定で、その増幅率は摂動の波数に比例すること (Kelvin-Helmholtz 不安定) が、良く知られている。また、この不安定性が原因で、渦巻き状の空間パターンを形成することも渦面の重要な特徴であるが、自由境界問題であるため非線形性が強く、その解析は困難である。

渦面の 2 次元的運動に対しては、Rosenhead(1931) の渦点近似による数値計算を初めとして、多くの研究がなされて来た (例えば、Krasny(1990) に引用されている文献参照)。解析的には、弱非線形の場合に、初期に滑らかな渦面が有限時間でその滑らかさを失うことが、Moore(1979) によって示された。渦面に現われる特異性の解明は、渦面のモデルとしての妥当性を考察する上で重要であるだけでなく、特異性の形が渦面巻上りの形を決定する要因になるとも考えられるため、非常に重要な問題である。Moore(1979) の得た結果は、Meiron, Baker & Orszag(1982)、Krasny(1986a)、Shelley(1992) 等により、数値的にも確認されている。

以上の研究では、渦面の運動を 2 次元的であると仮定しているが、運動が 3 次元的である場合は渦線の伸縮のダイナミクスが伴うため本質的に異なる問題になる。実在する流れの多くは 3 次元的であることを考えると渦面の運動の 3 次元的性質を解明することが必要である。また、渦面の 2 次元的運動の研究に比べ、3 次元的運動の研究は非常に少ない。そこで本研究の目的は、渦面の解析性に対して、渦面の運動の 3 次元性または渦線の伸縮のダイナミクスの及ぼす効果を明らかにすることである。

方針としては、まず、近年、Kaneda(1989,1990)、Caflisch(1989) により得られた、渦面の 3 次元的運動の方程式の Lagrange 表記を用いる。そこでは、時刻 t における渦面 S 上の点の位置ベクトルが、2 つの Lagrangian parameter λ_1 と λ_2 を用いて、 $\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)$ と表わされ、 $\mathbf{R}$ の時間発展は

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \text{p.v.} \int \int_S \frac{\mathbf{X} \times \mathbf{W}(\lambda'_1, \lambda'_2, t)}{|\mathbf{X}|^3} d\lambda'_1 d\lambda'_2, \quad (1)$$

により与えられる。ここで、p.v. は積分の主値を意味し、

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) - \mathbf{R}(\lambda'_1, \lambda'_2, t),$$

$$\mathbf{W}(\lambda_1, \lambda_2, t) = \gamma(\lambda_1) \frac{\partial \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)}{\partial \lambda_2},$$

である。 $\gamma(\lambda_1)$ は渦面の強さを表わし、ベクトル $\mathbf{W}$ の変化が渦線の伸びを反映している。この表記により渦度の発展が簡潔に表現され、解析及び数値計算が著しく簡単化される。

次に、渦面の強さを一様 $\gamma(\lambda_1) = 1$ 、初期の形を次の様に仮定し、その発展を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, 0) &= (\lambda_1, \lambda_2, 0) \\ &+ (\epsilon_2 \sin \lambda_2 \delta, 0, \epsilon_1 \sin \lambda_1), \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 δ は摂動の周期領域の縦横比を表わす。式 (2) において、 $\epsilon_2 = 0$ とすると Moore(1979) が仮定した初期値になる。

第 2 章では、初期摂動 (2) に対し、

$$0 < \epsilon_1 \ll 1, \quad \epsilon_2 = O(\epsilon_1), \quad (3)$$

を仮定し、Moore(1979) の解析を 3 次元的な場合に拡張することを考える。なお、これについては、Ishihara & Kaneda (1994a,b) にも記述があるため、ここでは結果だけを示す。第 3 章では、Krasny(1986b) の渦面の 2 次元運動の数値計算の手法を 3 次元に拡張し、渦面の 3 次元運動の数値計算を行う。そこでは、初期摂動の大きさを 2 つ考え、一方を弱非線形、他方を強非線形の場合とした。弱非線形の計算では、第 2 章で得られた結果との定性的な比較を目的とし、強非線形の計算では、解析的には捕えることのできない、渦面の運動の 3 次元的な性質を見ることを目的とする。

2. 渦面の 3 次元運動の弱非線形漸近解析

ここでは、弱非線形の場合 (3) に対して、式 (1) を基に、Moore(1979) の解析を 3 次元に拡張し、渦面の 3 次元運動の漸近解析を行った結果について述べる。時刻 t における渦面の形を次のようにフーリエ展開し、

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) &\equiv (\lambda_1, \lambda_2, 0) \\ &+ \sum_{n,m} \mathbf{A}_{n,m}(t) \exp\{i(\lambda_1 n + \lambda_2 \delta m)\}, \end{aligned}$$

フーリエ係数 $\mathbf{A}_{n,m}(t)$ の発展方程式を求め、それを近似的に解くことにより、 $\mathbf{A}_{n,m}(t)$ ($n = 1, 2, \dots$), ($m = 0, \pm 1$) の時刻 $t \gg 1$ での振る舞いを調べた。その結果、初期には n について、指数関数的に減衰していた $\mathbf{A}_{n,0}$ と $\mathbf{A}_{n,\pm 1}$ が、 $1 + t_c/2 + \ln(\epsilon_1 t_c/4) = 0$ で定義される時刻 $t_c = O(\ln \epsilon_1^{-1}) \gg 1$ において、次の様に振る舞うことが分かった：

$$\mathbf{A}_{n,0} = O(1/t_c) \propto n^{-5/2} \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_{n,\pm 1} = O(\epsilon_2 t_c) \propto n^{-3/2} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

これは、流れに垂直な方向の摂動があり、運動が3次元的な場合でも、時刻 t_c に渦面の形が解析的でなくなることを意味する。 $(t_c$ は、Moore(1979)により求められたものと同じである。) また、これらの結果から次の様に結論することができる：(1) 仮定(3)より、 $0 < \epsilon_2 t_c \ll 1/t_c$ だから、時刻 t_c での渦面の形はほとんど2次元的で、主にフーリエ係数 $A_{n,0}$ により決定される。(2) 渦線の伸縮(3次元性)を反映して、 $\mathbf{W}$ に特異性が現われ、その特異性の形はフーリエ係数 $A_{n,\pm 1}$ によって決定される。(流れに垂直な方向の摂動が無く、運動が2次元的な場合、 $\mathbf{W}$ は定ベクトルである。)

3. 数値計算

3.1 方法

この章の目的は、数値計算により、第2章で得られた結果(4)と(5)を確認すること、及び、初期摂動が大きく強非線形の場合に、3次元性が、渦面に現われる特異性にどう影響を及ぼすかを調べることである。数値計算の手法としては、渦面の2次元運動の数値計算(Krasny(1986))の方法を3次元に適用し、式(1)を次のように正則化する：

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{X} \times \mathbf{W}(\lambda'_1, \lambda'_2, t)}{(|\mathbf{X}|^2 + \epsilon^2)^{3/2}} d\lambda'_1 d\lambda'_2, \quad (6)$$

ここで、 ϵ は数値計算の便宜上導入されたスムージングパラメタで物理的意味はない。 $\epsilon \rightarrow 0$ で(6) $\rightarrow$ (1)であることが重要である。実際の数値計算では、 ϵ の幅に渦面を近似する点の数が十分あるようにしつつ、できるだけ小さく設定する。

この章での初期条件は、(2)に対し、摂動の波長を単位長さにするために、

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, 0) &= (\lambda_1, \lambda_2, 0) \\ &+ (\epsilon_2 \sin 2\pi \lambda_2, 0, \epsilon_1 \sin 2\pi \lambda_1), \end{aligned} \quad (7)$$

とした。簡単のため $\delta = 1$ としてある。(第2章での結果をこの章の単位で表わすためには、第2章の $\mathbf{R}$, λ_1 , λ_2 , ϵ_1 , ϵ_2 , t を各々 $2\pi\mathbf{R}$, $2\pi\lambda_1$, $2\pi\lambda_2$, $2\pi\epsilon_1$, $2\pi\epsilon_2$, $2\pi t$ で置き換えればよい。)

式(6)の右辺の積分領域を(7)の周期領域 $[0, 1] \times [0, 1]$ に帰着させるときに2重周期グリーン関数の取扱が問題になるが、これに関してはIshihara&Kaneda(1994b)に詳しい記述があるのでここでは省略する。(ただ、その中の式に幾つかタイプミスがあるのでこの場で訂正しておく。p155の式(26),(28),(29)中の $\beta^{-1/2} \rightarrow \beta^{1/2}$ 、式(33)中の $e^{(bm+\Delta y)^2/t} \rightarrow e^{-(bm+\Delta y)^2/t}$ 、式(34)中の $e^{(an+\Delta x)^2/t} \rightarrow e^{-(an+\Delta x)^2/t}$ 。p156にある $f(\Delta z, n, m)$, $g(\Delta z, n, m)$ の定義式中の $\exp\{-\pi^2(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2})\} \rightarrow \exp\{-\pi^2(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2})t\}$ 。)

渦面の離散化は、 (λ_1, λ_2) -空間の周期領域 $[0, 1] \times [0, 1]$ を各方向に等間隔に $N \times M$ 個の点で代表させて行った。これに伴い、積分は台形則で近似し、 $\mathbf{W}$ に現われる λ_2 による微分は中心差分で近似した。こうして構成される $3 \times N \times M$ 個の常微分方程式の時間発展は4次のルンゲクッタ法を用いて求めた。

以下の計算では、 $N \times M = 120 \times 30$ 、 $\Delta t = 0.02$ 、 $\epsilon = 0.025$ としている。 $(N \times M)$ の値は、主に計算時間の制限により決定される。 M に比べ N が大きい理由は、流れ方向により細かい構造ができるからである。) 2重周期グリーン関数の取扱の際に現われるパラメタは、Ishihara&Kaneda(1994b)と同じにしてある。

3.2 結果

3.2.1 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.01$ の場合 (弱非線形)

図1は、 $t = 0.16, 0.48, 0.72, 0.88$ における渦面の形を表わす。渦面は31本の渦線により表わされている。渦面の形はほとんど2次元的(流れに垂直な(y)方向の変化が小)であることが分かる。図2は、

$$\Omega \equiv \mathbf{W} \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda_1} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda_2} \right|,$$

により定義される渦度密度ベクトルの大きさを (λ_1, λ_2) -空間でみた鳥瞰図である。ここでも、流れに垂直な(λ_2)方向の変化はほとんど見られない。時刻 $t = 0.88$ における渦度密度ベクトルの大きさのピークの形は、(4)から結論できる特異性の形(カスプ)を反映していると考えられる。

次に、第2章の結果と比較するために、渦面を

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) &= (\lambda_1, \lambda_2, 0) \\ &+ \sum_{n,m} \mathbf{A}_{n,m}(t) \exp\{2\pi i(\lambda_1 n + \lambda_2 m)\}, \end{aligned}$$

のようにフーリエ展開し、フーリエ係数 $\mathbf{A}_{n,m}(t) \equiv (X_{n,m}, Y_{n,m}, Z_{n,m})$ の振る舞いを調べた。第2章の結果より $\epsilon_1 = 0.01$ の場合は、 $t_c \simeq 0.588$ と予想されるが、数値計算ではスムージングパラメタ ϵ を導入していること、渦面を $N \times M = 120 \times 30$ の点で近似していること、2重周期グリーン関数を近似的に取り扱っていることなどにより、定量的な比較は難しい。

そこで、比較のための予備実験として、 $\epsilon_1 = 0.01$ 、 $\epsilon_2 = 0$ 、すなわち運動が2次元的な場合に対して、Krasny(1986a)の方法を用いて、数値的に t_c を求めることを試みた。彼の方法では、スムージングパラメタを $\epsilon = 0$ としている。また、運動が2次元的なため、式(6)は λ_2 に関して積分でき、周期的グリーン関数も厳密な取り扱いが可能である。ただ、主値積分を台形則で近似する際、 $O(1/N)$ の誤差を含む。 t_c の見積りについては、Krasny(1986a)の導入した t_s^N を用いた。 t_s^N は、時刻 t の渦面を近似する点を $z(i, t)$ 、($i = 1, 2, \dots, N$)としたとき、最も隣接した2点間の距離

$$s_{\min}^N(t) \equiv \min_{i \neq j} (|z(i, t) - z(j, t)|)$$

が最小となる時刻として定義される。(Krasny(1986a)は、 $1/N \rightarrow 0$ で t_s^N はMoore(1979)の解析で得られる t_c と良く一致することを示している。) 渦面の3次元的な運動の数値計算では $N = 120$ としているため、 $N = 120$ に固定して測定した結果は $\epsilon_1 = 0.01$ に対して、 $t_s^{120} \simeq 0.72$ であった。

図3は、時刻 $t = 0.72$ における $\ln|X_{n,m}^2 + Z_{n,m}^2|$ 対 $\ln n$ のグラフを表わす。曲線群は上から順に $m = 0, 1, 2, \dots$, である。直線はモード $(n, 0), (n, 1)$ に対して第2章より予想されるグラフの傾き $-5/2, -3/2$ を示す。スムージングパラメタの導入によって高波数の増幅率が抑えられていることを考慮しても、両者の一致は確認できない。図4は、図3と同じグラフを $t = 0.88$ で見たものである。高波数はまだ指数関数的に減衰しているものの、 n の小さいところで理論的な傾きに近づく傾向を見ることができる。

3. 2. 2 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$ の場合 (強非線形)

図5は、 $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ における渦面の形を示す。図1と比べ複雑な形に発展していることが分かる。図6は、 $t = 0.3, 0.4$ における渦度密度ベクトルの大きさの (λ_1, λ_2) -空間でみた鳥瞰図である。図2と違い、ピークが2ヵ所現われている。これは渦面の形が2ヵ所で特異になることを示唆している。Krasny(1986a), Shelley(1992) 等は、渦面の2次元的運動の数値計算において、初期摂動が大きいとき特異性が2ヵ所で現われることを発見しており、図6に現われた2つのピークも初期摂動が大きいためであると考えられる。渦面の3次元的発展の効果は、流れに垂直な方向のピーク値の変動として現われている。これは、強非線形の場合、3次元的運動の結果現われる特異性は、2次元的運動の結果現われる特異性と本質的に異なる可能性があることを示唆する。

参考文献

- Caffisch, R.E., in *Proceedings of the Workshop on Mathematical Aspects of Vortex Dynamics*, edited by R.E. Caffisch, SIAM, Philadelphia, PA, 1989, p.1.
- Ishihara, T. & Kaneda, Y., 1994a *Spontaneous Singularity Formation in the Shape of Vortex Sheet in Three-dimensional Flow*, J. Phys. Soc. Jpn. **63** 388.
- Ishihara, T. & Kaneda, Y., 1994b 3次元的渦面の運動の解析と数値シミュレーション, 数理解析研究所講究録 **866** 149.
- Kaneda, Y., 1989 *The motion of a vortex sheet*, read at the meeting held in July, 1989 at the Research Institute of Mathematical Science, Kyoto University.
- Kaneda, Y., 1990 *A representation of the motion of a vortex sheet in a three-dimensional flow*, Phys. Fluids **A 2** 458.
- Krasny, R., 1986a *A study of singularity formation in a vortex sheet by the point vortex approximation*, J. Fluid. Mech. **167** 65.
- Krasny, R., 1986b *Desingularization of Periodic Vortex Sheet Roll-up*, J. Comp. Phys. **65** 292.

- Krasny,R.,1990 *Computing Vortex Sheet Motion*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, edited by Satake,I., Kyoto, Japan, 1990, p.1573.
- Meiron,D.I., Baker,G.R. & Orszag,S.A.,1982 *Analytical structure of vortex sheet dynamics. 1. Kelvin-Helmholtz instability*, J. Fluid. Mech. **114** 283.
- Moore,D.W.,1979 *The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet*, Proc. R. Soc. Lond **A 365** 105.
- Rosenhead,L.,1931 *The formation of vortices from a surface of discontinuity*, Proc. R. Soc. Lond **A 134** 170.
- Shelley,M.,1992 *A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method*, J. Fluid. Mech. **244** 493.

图 1

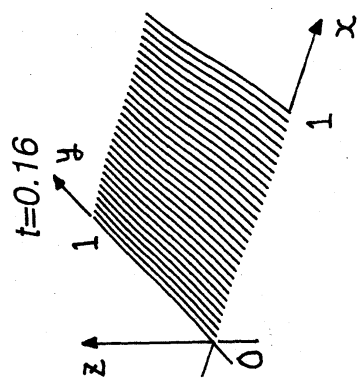
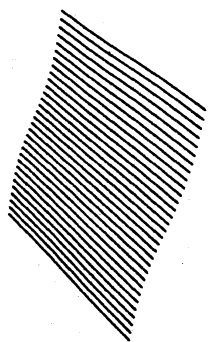
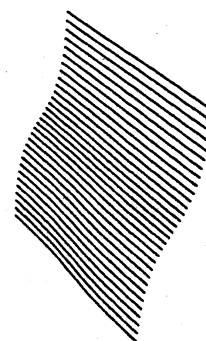
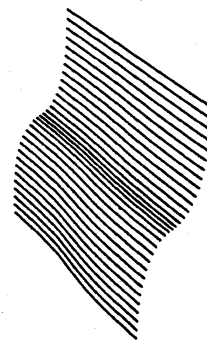
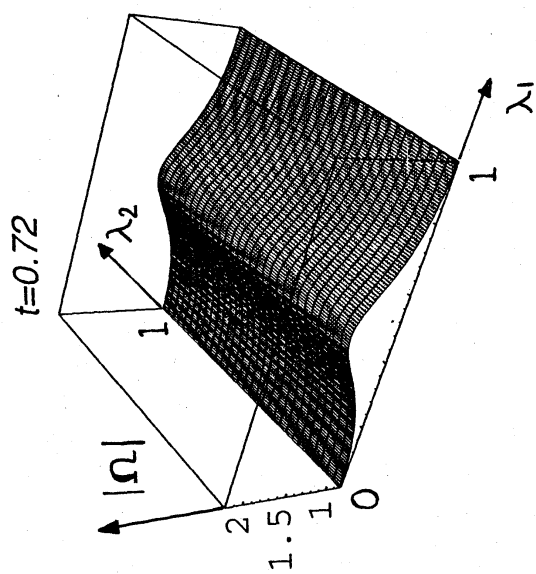
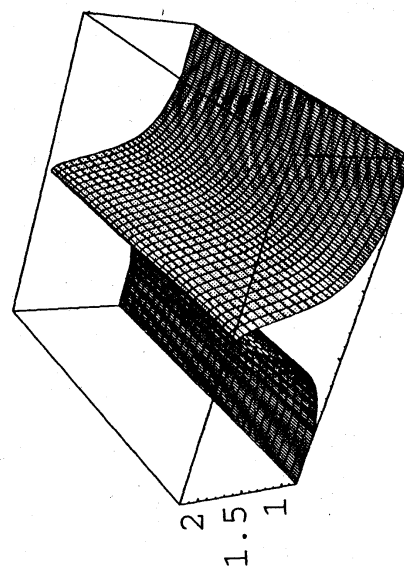

 $t=0.48$

 $t=0.72$

 $t=0.88$


图 2


 $t=0.88$


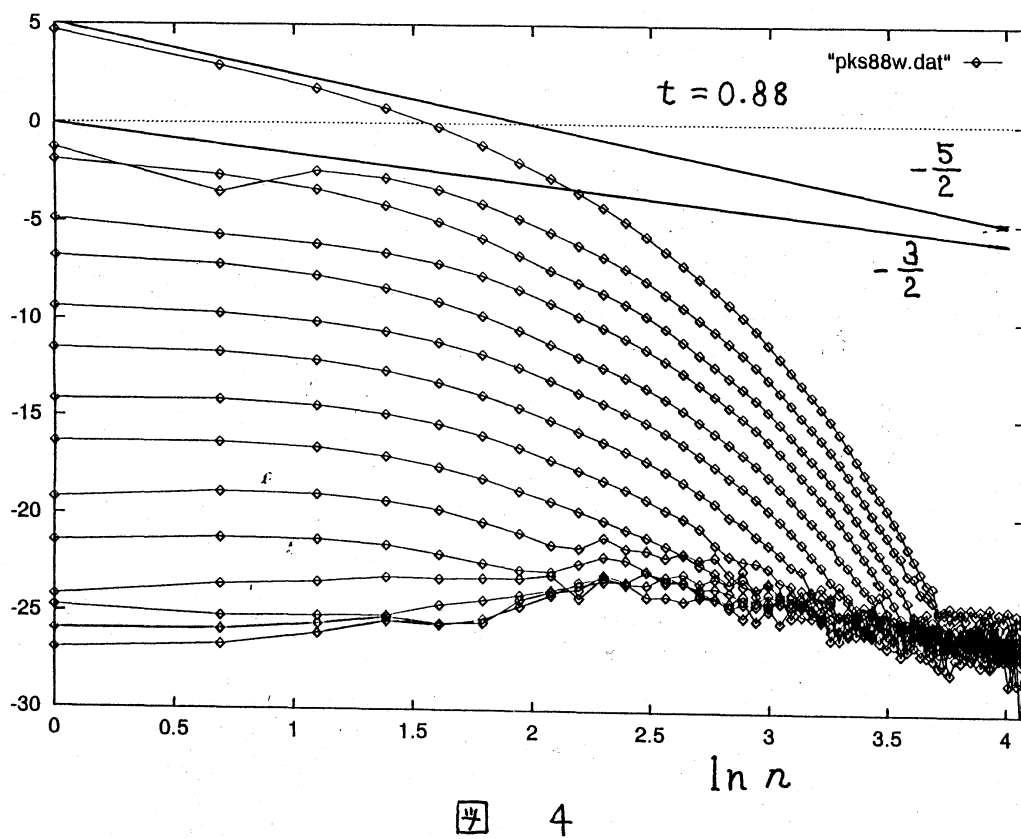
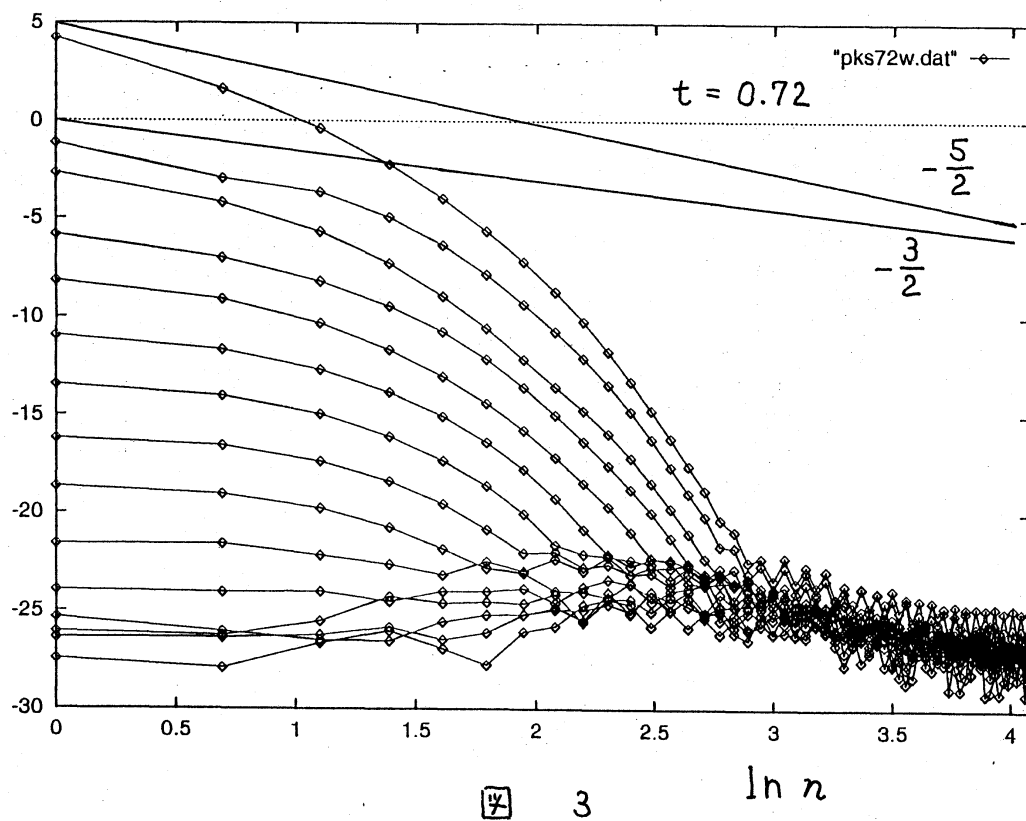
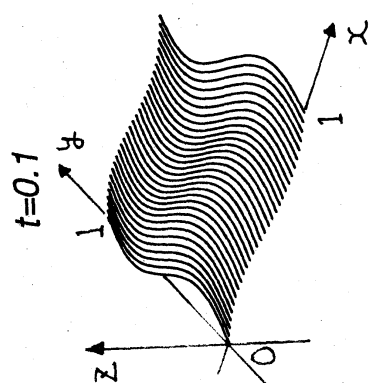


图 5



$t=0.2$



$t=0.3$

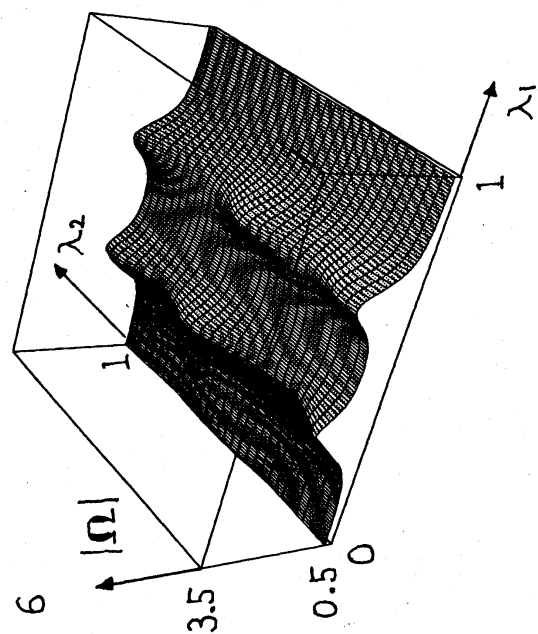


$t=0.4$



图 6

$t=0.3$



$t=0.4$

