

マルチレベル・モンテカルロ法による経路依存オプションの評価

住本 賢吾^{*1}, 清水 雄斗^{*1}, 穴太 克則^{*2}

^{*1}: 芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門

^{*2}: 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

Kengo Sumimoto^{*1}, Yuto Shimizu^{*1}, Katsunori Ano^{*2}

^{*1}: Graduate School of Engineering and Science, Shibaura Institute of Technology

^{*2}: Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology

概要

マルチレベル・モンテカルロ法は, Giles[1] が標準的なモンテカルロ法において計算コストが掛かる問題を解消するために発案された手法である. そして, Giles[1] の論文発表以降, 現在もコンピュータシミュレーション・ファイナンス, 応用確率論の領域で活発に検証と研究が行われている. 本稿では, 経路依存オプションに対してマルチレベル・モンテカルロ法は効果を発揮するかの検証と最適行使境界を求める際に適用することで効率化できるかの検証を行った.

1 はじめに

アメリカン・プット・オプションのオプション価格は解析的に求めることができていない. そのため, 数値計算によって価格推定が行われている. 数値計算手法はこれまでに様々なものが提案されているが, その中でモンテカルロ法は, 精度がパス数にのみ依存する点と複雑なモデルに対しての対応が容易である点において優れた手法である. 2008 年に Giles[1] によって, オプション価格を求める手法として, 標準的なモンテカルロ (Standard Monte Carlo, SMC) 法をより効率化させたマルチレベル・モンテカルロ (Multilevel Monte Carlo, MLMC) 法が提唱された.

シミュレーションにより, アメリカン・プット・オプション価格評価において, 資産過程が幾何ブラウン運動に従う場合だけでなくジャンプ拡散過程においても, MLMC 法は SMC 法よりも優れていることは確認されている[7]. 本稿では, さらに経路依存オプション (ラシアン・オプションとアジアン・オプション) においても同様の結果が得られるのか検証した. また, それらのオプションの最適行使境界に対しての MLMC 法の適用を試みた.

本稿の構成は以下である. 2 節にて, MLMC 法の概要を記載. 3 節では, 本研究で用いた経路依存オプションの説明. 4 節では, 各オプションでシミュレーションを行った結果を記載. 5 節では, 最適行使境界に対しての MLMC 法の適用の結果を記載している.

2 マルチレベル・モンテカルロ法

SMC 法では時間幅を 1 種類だけ使用するが, MLMC 法では図 1 のようにレベル 0 からレベル L までの $L+1$ 種類の時間幅を用いて推定を行う. 各レベルの時間幅 h_ℓ は $h_\ell = T/2^\ell$ で与えられる. SMC 法では, 推定の際にオプション価格の推定値 $\hat{Y}$ を, ペイオフを P とすると N 本のパスを用いて $\hat{Y} = E[\hat{P}] = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{P}^{(i)}$

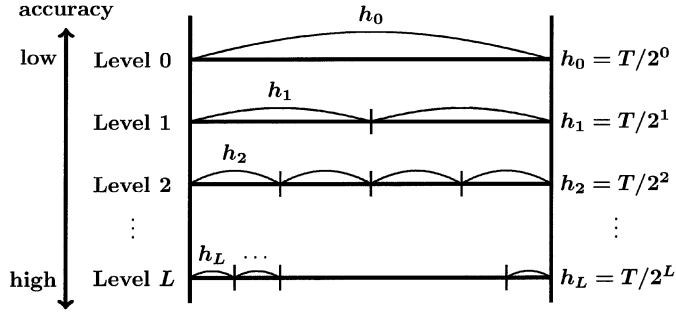


図1 MLMC 法での時間幅の取り方

と推定していたが, MLMC 法では

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\hat{P}_L] &= \mathbb{E}[\hat{P}_0] + \sum_{\ell=1}^L \mathbb{E}[\hat{P}_\ell - \hat{P}_{\ell-1}] \\
 &= \frac{1}{N_\ell} \sum_{i=1}^{N_\ell} \hat{P}_\ell^{(i)} + \sum_{\ell=1}^L \left\{ \frac{1}{N_\ell} \sum_{i=1}^{N_\ell} (\hat{P}_\ell^{(i)} - \hat{P}_{\ell-1}^{(i)}) \right\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

と分割して, 推定を行う. (1) 式の各レベルのパス数 N_ℓ 本を最適に選ぶことで計算コストを削減できる. 要求する平均二乗誤差 (Mean-Square-Error, MSE) を $O(\varepsilon^2)$ としたとき, SMC 法では時間幅 h を $h = O(\varepsilon)$ としたときの計算コストは $O(Nh^{-1}) = O(\varepsilon^{-3})$ となるが, MLMC 法では $O(\varepsilon^{-2}(\log \varepsilon)^2)$ に削減できる. 計算コストの削減を保証しているのが定理 2.1 である.

定理 2.1 (Complexity Theorem) Let P denote a functional of the solution of $\{S_t\}_t$, and, let $\hat{P}_\ell$ denote the corresponding level ℓ numerical approximation using a numerical discretisation with time step $h_\ell = \frac{T}{2^\ell}$. If there exists independent estimators $\hat{Y}_\ell$ based on N_ℓ Monte Carlo samples, and positive constants $\alpha \geq \frac{1}{2}$, β , c_1 , c_2 , c_3 , such that

- (i) $|\mathbb{E}[\hat{P}_\ell - P]| \leq c_1 h_\ell^\alpha$,
- (ii)

$$\mathbb{E}[\hat{Y}_\ell] = \begin{cases} \mathbb{E}[\hat{P}_0] & (\ell = 0), \\ \mathbb{E}[\hat{P}_\ell - \hat{P}_{\ell-1}] & (\ell > 0), \end{cases}$$

$$\text{(iii) } V[\hat{Y}_\ell] \leq c_2 N_\ell^{-1} h_\ell^\beta,$$

$$\text{(iv) } C_\ell \leq c_3 N_\ell h_\ell^{-1}, \text{ where } C_\ell \text{ is the computational complexity of } \hat{Y}_\ell,$$

then there exists a positive constant c_4 such that for any $\epsilon < e^{-1}$ there are values L and N_ℓ for which the multilevel estimator $\hat{Y} = \sum_{\ell=0}^L \hat{Y}_\ell$ has a mean-square-error with bound

$$\text{MSE} \equiv \mathbb{E}[(\hat{Y} - \mathbb{E}[P])^2] < \epsilon^2$$

with a computational complexity C with bound

$$C \leq \begin{cases} c_4 \epsilon^{-2} & (\beta > 1), \\ c_4 \epsilon^{-2} (\log \epsilon)^2 & (\beta = 1), \\ c_4 \epsilon^{-2 - (\gamma - \beta)/\alpha} & (0 < \beta < 1). \end{cases}$$

定理 2.1 では、平均二乗誤差が条件を達成することを保証しているが、実際に数値計算を行う際にはいくつかの仮定をする必要がある。このことを踏まえて構築されたものが以下のアルゴリズムである。

Step1 レベル $L = 0$ とおく。

Step2 初期サンプルパス数 N_L を設定し、 V_L を推定する。

Step3 (2) 式を用いて最適な N_ℓ , $\ell = 0, \dots, L$ を定める。

Step4 それぞれのレベルで定めたパス数 N_ℓ 本を用いて評価する。

Step5 レベル L が 2 以上のとき、(3) 式を用いて収束しているか確認する。収束していた場合は値を出す。

Step6 レベルが 2 未満、または収束しなかった場合、レベルを 1 上げて Step2 にもどる。

$$N_\ell = \left\lceil 2\varepsilon^{-2} \sqrt{V_\ell h_\ell} \left(\sum_{\ell=0}^L \sqrt{V_\ell / h_\ell} \right) \right\rceil \quad (2)$$

$$\left| \hat{Y}_L - 2^{-1} \hat{Y}_{L-1} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} (2^2 - 1) \varepsilon \quad (3)$$

Step2 であらかじめ設定した初期サンプルパス数 N_L 本を用いて V_L を仮に推定することで数値計算を行っている。Step3 以降では、各レベルごとに最適なパス数を更新しながら推定をしていく。

3 経路依存オプション

3.1 アジアン・オプション

アジアン・オプションとは、対象となるペイオフ関数がある期間に渡る、原資産価格の平均に依存するオプションである。平均の抽出方法は連続抽出平均と離散抽出平均の 2 種類があり、それぞれ次の式で与える。

$$\text{連続抽出平均: } G(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S(u) du.$$

$$\text{離散抽出平均: } G(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j).$$

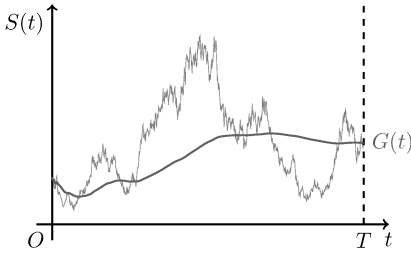
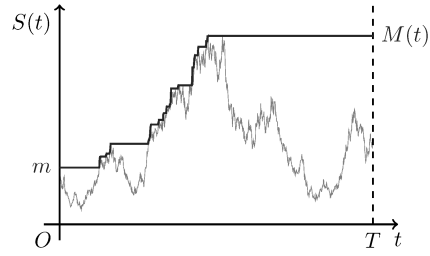
ただし、 $S(t)$ は原資産、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ であり、上記の $G(t)$ を含んだ式を用いてアジアン・オプションは価格算出を行う。 $G(t)$ は原資産 $S(t)$ と比べて値の変化が小さいため (図 2 参照)、ペイオフを求める際に重大な影響を与えにくくなっていることがアジアン・オプションの特徴である。

3.2 ラシアン・オプション

ラシアン・オプションとは、対象となるペイオフ関数がある期間に渡る、原資産価格の最大値に依存するオプションである。つまり、次の最大値過程 $M(t)$ を用いてラシアン・オプションの価格算出を行う。

$$M(t) = \left(\max_{0 \leq u \leq t} S(u) \right) \vee M(0).$$

ただし、 $S(t)$ は原資産、最大値過程 $M(t)$ の初期値 $M(0)$ は $M(0) = m \geq S(0) > 0$ で与える。この $M(t)$ の挙動を図示したのが図 3 である。

図2 アジアン・オプション： $G(t)$ の挙動図3 ラシアン・オプション： $M(t)$ の挙動

4 価格評価のシミュレーション

経路依存オプションでの価格評価に関して MLMC 法は SMC 法よりも分散や計算コストを減少させることが出来るか検証した。また、シミュレーションの条件として次を仮定した。推定アルゴリズムには Longstaff-Schwartz Method(LSM) を使用した。

- 原資産 S は幾何ブラウン運動 (Geometric Brownian Motion, GBM) またはジャンプ拡散過程 (Jump Diffusion Process, JDP) に従う。また、この原資産 S から離散抽出平均 G (アジアン・オプション) や最大値過程 M (ラシアン・オプション) を求める。
- 原資産 S の連続項は幾何ブラウン運動 $dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ に従う。
- SMC 法での時間幅の長さは $h = 1/2^7$ 。
- MLMC 法での最小レベルは 1, 最大レベルは 7。
- 基底関数 (LSM で使用) は Laguerre 関数 $L_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!} e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots, 4$) を使用する。

なお、全てのシミュレーションの結果において MLMC 法と SMC 法の価格は当然のことながら一致したことから、価格の結果については割愛する。

4.1 原資産が幾何ブラウン運動に従う場合のアメリカン・アジアン・プット・オプション

シミュレーションでは、次のインプットを与えて検証した。

$$S(0) = 1, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5.$$

- 分散 (図 4 参照)：サンプルパスの本数が少ないとき (1 万本, 2 万本のとき) は SMC 法の分散が MLMC 法の分散と比べて同じくらいの値になったり, (こちらの結果とは別にシミュレーションを行ったときに) SMC の分散の方が小さくなったりする場合もあった。しかし、サンプルパスの本数が十分に多いとき (5 万本以上のとき) は、安定して MLMC 法の分散の方が SMC 法の分散よりも小さくなった。このときの MLMC 法の分散の減少率は SMC 法と比較して、およそ 80% 近く抑えることができた。
- 計算時間 (図 5 参照)：計算時間は同じサンプルパスの本数で見ると SMC 法の方が MLMC 法よりも短くなってしまった。MLMC 法の SMC 法と比較したときの計算時間の増加率は、サンプルパスの本数が多くなって増加率が安定してきたところでは、およそ 20 ~ 25% となった。

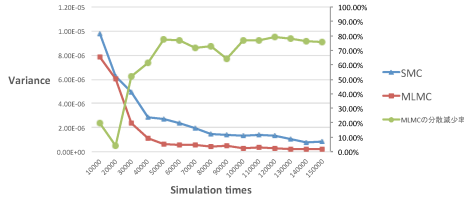


図 4 アジアン (GBM)-分散

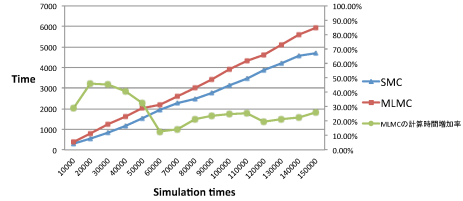


図 5 アジアン (GBM)-計算時間

4.2 原資産がジャンプ拡散過程に従う場合のアメリカン・アジアン・プット・オプション

次のインプットを与えて検証した.

$$S(0) = 1, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i}) \quad (Y_i \sim N(\mu, 0.3)).$$

ジャンプの大きさをそれぞれ変えた 3 種類のシミュレーションを行った. ジャンプの大きさについては次の通りである. また, 計算時間の結果については図 5 と類似していたので, 割愛する.

- 図 6: $\mu = -\log 2$ (ジャンプ時に, その時点の原資産価格 $S(t)$ を平均 50% 減少させる),
- 図 7: $\mu = -\log 10/9$ (ジャンプ時に, その時点の原資産価格 $S(t)$ を平均 10% 減少させる),
- 図 8: $\mu = -\log 10$ (ジャンプ時に, その時点の原資産価格 $S(t)$ を平均 90% 減少させる),
- 分散 (図 6, 7, 8 参照): 原資産が幾何ブラウン運動に従う場合はサンプルパスの本数が少ないと SMC 法の方が分散が小さくなるというケースもあったが, こちらの結果ではサンプルパスの本数に関係なく, 常に MLMC 法の方が SMC 法よりも分散は大幅に小さくなった. このときの MLMC 法の分散の減少率は SMC 法と比較して, 少なくとも 90% 前後, 多いときで 90% 以上であった.

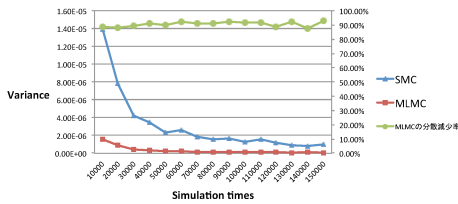


図 6 アジアン (JDP1)-分散

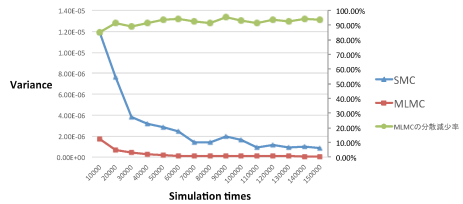


図 7 アジアン (JDP2)-分散

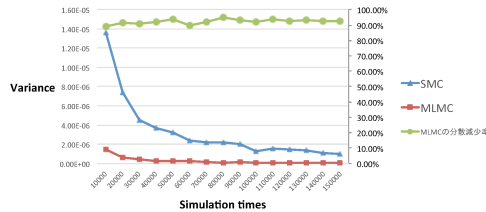


図 8 アジアン (JDP3)-分散

4.3 原資産が幾何ブラウン運動に従う場合のラシアン・オプション

4.3.1 ラシアン・プット・オプションの場合

インプット： $S(0) = m = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 1$, $T = 1$, $K = 1.5$.

- 分散 (図 9 参照)：サンプルパスの本数に関係なく、SMC 法の方が MLMC 法よりも大幅に分散が小さくなってしまった。SMC 法と MLMC 法を比較したときの分散の減少率は、およそ 96 ~ 98% 近くであった。
- 計算時間 (図 10 参照)：同じサンプルパスの本数で見るとこちらも SMC 法の方が MLMC 法よりも短くなってしまった。MLMC 法を SMC 法と比較したときの計算時間の増加率は、サンプルパスの本数が多くなって増加率が安定してきたところではおよそ 75 ~ 80% であった。

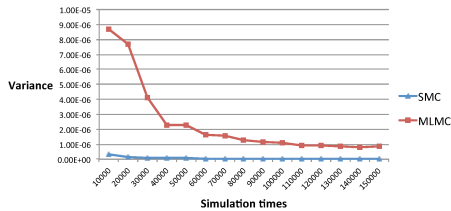


図 9 ラシアン・プット (GBM)-分散

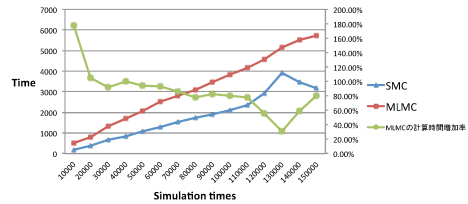


図 10 ラシアン・プット (GBM)-計算時間

4.3.2 ラシアン・コール・オプションの場合

インプット： $S(0) = m = 2$, $r = 0.05$, $\sigma = 1$, $T = 1$, $K = 1.5$.

- 分散 (図 11 参照)：多くの場合で MLMC 法の方が分散は小さくなったが、一部サンプルパスの本数が十分にあっても SMC 法の方が小さくなる場合もあった。MLMC 法の方が分散が小さいときに SMC と比較したときの分散の減少率は、サンプルパスの本数が多くなって分散減少率が比較的安定したところではおよそ 20% 近くであった。
- 計算時間 (図 12 参照)：同じサンプルパスの本数で見ると、こちらは SMC 法の方が MLMC 法よりも短くなってしまった。MLMC 法の SMC 法と比較したときの計算時間の増加率は、サンプルパスの本数が多くなって増加率が安定してきたところではおよそ 20 ~ 35% となった。

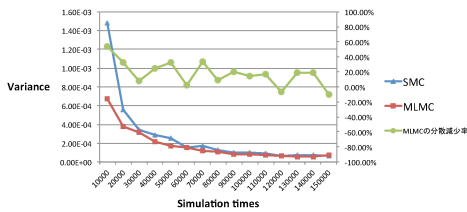


図 11 ラシアン・コール (GBM)-分散

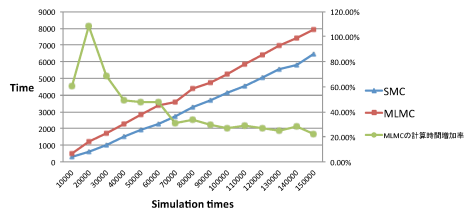


図 12 ラシアン・コール (GBM)-計算時間

4.4 原資産がジャンプ拡散過程に従う場合のラシアン・オプション

4.4.1 ラシアン・プットの場合

インプット： $S(0) = m = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 1$, $T = 1$, $K = 1.5$,

$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i}) \quad (Y_i \sim N(-\log 2, 0.3)).$$

- 分散 (図 13 参照)：ジャンプ拡散過程においてもサンプルパスの本数に関係なく、SMC 法の方が MLMC 法よりも大幅に分散が小さくなってしまった。SMC 法と MLMC 法を比較したときの分散の減少率は、およそ 96 ~ 98% であった。
- 計算時間 (図 14 参照)：同じサンプルパスの本数で見るとこちらも SMC 法の方が MLMC 法よりも短くなってしまった。MLMC 法の SMC 法と比較したときの計算時間の増加率は、およそ 20% 前後であり、サンプルパスの本数が多いと若干減少傾向にあるという結果となった。

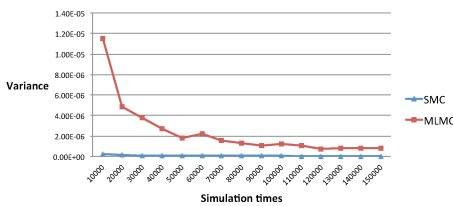


図 13 ラシアン・プット (JDP)-分散

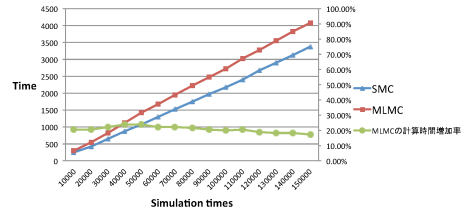


図 14 ラシアン・プット (JDP)-計算時間

4.4.2 ラシアン・コール・オプションの場合

インプット： $S(0) = m = 2$, $r = 0.05$, $\sigma = 1$, $T = 1$, $K = 1.5$,

$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i}) \quad (Y_i \sim N(-\log 2, 0.3)).$$

- 分散 (図 15 参照)：多くの場合で MLMC 法の方が分散は小さくなったが、一部サンプルパスの本数が十分にあっては僅かに SMC 法の方が小さくなる場合もあった。MLMC 法の方が分散が小さいときに SMC 法と比較したときの分散の減少率は、およそ 20 ~ 40% であった。
- 計算時間 (図 16 参照)：同じサンプルパスの本数で見るとこちらは SMC 法の方が MLMC 法よりも短くなってしまった。MLMC 法の SMC 法と比較したときの計算時間の増加率は、サンプルパスの本数が多くなって増加率が安定してきたところではおよそ 20% 弱となった。

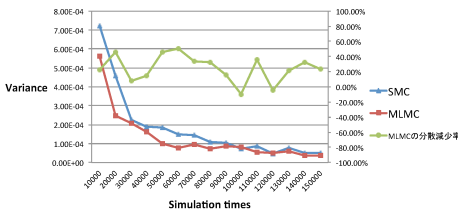


図 15 ラシアン・コール (JDP)-分散

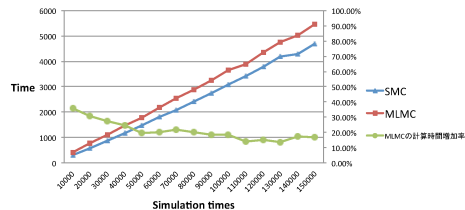


図 16 ラシアン・コール (JDP)-計算時間

4.5 価格評価シミュレーションの結論

以上のシミュレーションより、

- アジアン・オプションでは、サンプルパスの本数が十分に多ければ MLMC 法は SMC 法よりも計算時間の増加率に比べて分散を減少させることに効果的なので、MLMC 法の方が適している。
- ラシアン・オプションでは、原資産がジャンプ拡散過程に従う場合のラシアン・コールでは分散を小さくすることを重視するのであれば MLMC 法の方が適しているが、それ以外の場合は SMC 法の方が適している。すなわち、MLMC 法はラシアン・オプションの価格評価では多くの場合で使い物にならないという結果となった。

5 最適行使境界

アメリカン・オプションには現在時刻 t で権利行使した方が得られる利益の期待値が大きい領域と権利行使せずに保持し続けた方が利益の期待値が大きい領域が存在する。これらをそれぞれ停止領域、継続領域と呼び、その境界を最適行使境界と呼ぶ。原資産価格が停止領域に入った場合、その時刻に権利行使するものとする。図 17 はアメリカン・プット・オプションにおける最適行使境界の例である。

本研究では、バックワード・サーチ法に MLMC 法を適用して高速化を図った。以降、5.1 で MLMC 法の適用部分の説明と 5.2 でシミュレーションを行った場合の結果を記載する。

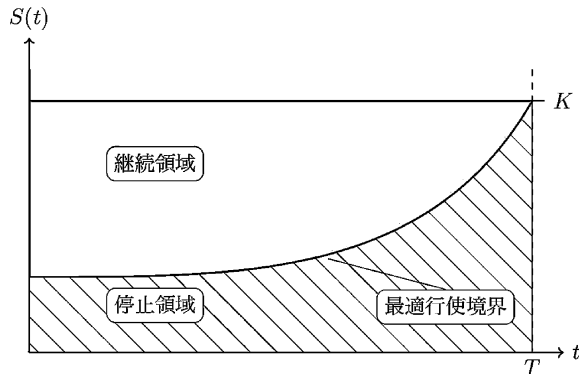


図 17 アメリカン・プット・オプションにおける最適行使境界の例

5.1 バックワード・サーチ法

アメリカン・オプションでは、その時点で権利行使した価値 (早期行使価値) の推定は簡単にできるが、権利行使せずに継続し続けた価値 (継続価値) の推定は残りの時刻に依存するため難しい。初期時刻の継続価値を推定することは難しいが、満期では以降継続できなくなるため、満期から後ろ向きに戻っていくことで推定が可能になる。

バックワード・サーチ法は、モンテカルロ法によって生成された点を用いて満期時から後ろ向きに動的計画法を用いて最適行使境界を推定していく手法である。この手法では、ある時刻での継続価値をその時刻の各点から発生させたパスを用いて推定する。以下に、バックワード・サーチ法のアルゴリズムを記載する。

期間 T を M 分割した点を t_i とする ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$). また, ペイオフ関数を $f(\cdot)$ とする.

Step1 はじめに n 本のパス $S_1, \dots, S_n$ を生成する.

Step2 t_M のときは, これ以上継続できないため, 境界 $b(t_M) = K$ とおく.

Step3 以降の処理を簡単にするため $S(t_i)$ を昇順に並び替えたものを $S'(t_i)$ とする.

Step4 各 $S'(t_i)$ を始点とし, m 本のパスを生成する.

Step5 それぞれのパスで早期行使価値 $e'_j(t_i)$ と継続価値 $c'_j(t_i)$ を推定する. ($1 \leq j \leq m$)

5.1 $e'_j(t_i)$ はその時点で権利行使するため $f(S'_j(t_i))$ となる.

5.2 $c'_j(t_i)$ は以下の停止時刻型モンテカルロ法によって推定する. τ は, 最初に停止領域内に入る時点であり, その時点でのペイオフを t_i まで戻したものの期待値をとる.

$$c'_j(t_i) = E[\exp\{-r(\tau - t_i)\}f(S'_j(\tau))]$$

$$\tau := \inf_{t_i \leq t \leq t_M} \{t : S_t \leq b(t_i)\}$$

Step6 最適行使境界 $b(t_i)$ の推定を行う.

6.1 $e'_j(t_i)$ と $c'_j(t_i)$ を $j = 1$ から順に比較する.

6.2 $e'_j(t_i) \leq c'_j(t_i)$ をはじめて満たすとき, この間に境界が存在すると仮定できるため, 4つのベクトル a_1, a_2, b_1, b_2 を以下のように定義する.

$$a_1 = (S'_{j-1}(t_i), e'_{j-1}(t_i)), \quad a_2 = (S'_j(t_i), e'_j(t_i)),$$

$$b_1 = (S'_{j-1}(t_i), c'_{j-1}(t_i)), \quad b_2 = (S'_j(t_i), c'_j(t_i)).$$

6.3 このとき, 4つの交点を境界 $b(t_i)$ とする.

Step7 i を $i - 1$ とし, $i = 1$ となるまで繰り返す.

バックワード・サーチ法では, モンテカルロ法を用いて各時刻での点を生成し, 継続価値を推定するために, その各点から再度, モンテカルロ法を用いてパスを生成しているが, 本稿では, 5.2の継続価値を求めるために使用する停止時刻型モンテカルロ法に MLMC 法を適用してシミュレーションを行った.

5.2 最適行使境界の推定

先の停止時刻型モンテカルロ法に SMC 法と MLMC 法を適用してシミュレーションを行い, 比較をした. このとき, バックワード・サーチ法の外側 (Step1) のモンテカルロ法の試行回数は 1 万本で固定した. また, 評価項目を計算時間, 各点における平均二乗誤差の和の 2 つとした. 条件として原資産過程に幾何ブラウン運動, 初期値 $S(0) = 100$, 金利 $r = 0.05$, ボラティリティ $\sigma = 0.3$, 満期 $T = 1$, 権利行使価格 $K = 110$ と仮定した.

この条件の下で, アメリカン・プット・オプション, アジアン・プット・オプション, ラシアン・プット・オプションの 3 種類でシミュレーションを行った (図 18-図 21).

シミュレーションの結果, 計算誤差に関しては, アメリカン・プット・オプション, アジアン・プット・オプション, ラシアン・プット・オプションのどれも要求精度を満たすことができた (図 19, 20, 21 参照). ここで要求精度 ε^{-1} とは, SMC 法におけるパス数に相当する. しかし, 計算時間に関しては 3 種類のすべてで同じような結果となり, MLMC 法の方が SMC 法のものよりも計算時間がかかるという結果となった (図 18 参照. アジアン, ラシアンについては差が見られなかったため割愛).

これは, 外側のモンテカルロ法をそのままにし, 内側のモンテカルロ法部分のみを MLMC 法に置き換えたことにより, うまく精度を調節できずに必要以上の推定をしたために起きたと考えられる. 外側のモンテカルロ法も MLMC 法に置き換えて, 推定することで相互に精度を推定することが今後の課題である.

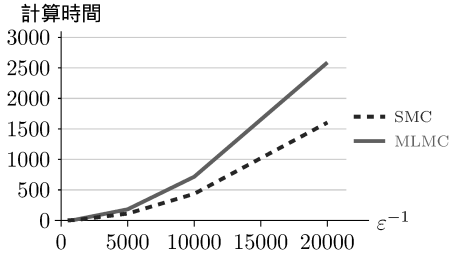


図 18 アメリカン：計算時間-要求精度

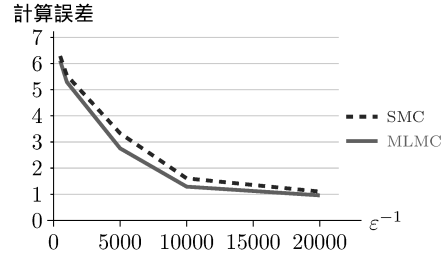


図 19 アメリカン：計算誤差-要求精度

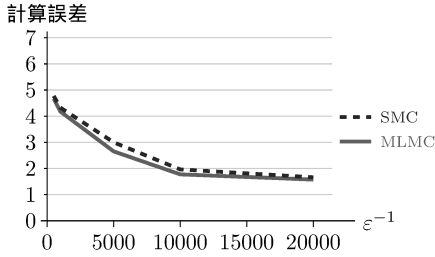


図 20 アジアン：計算誤差-要求精度

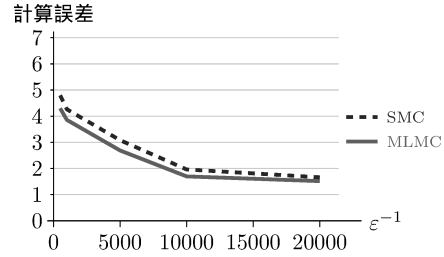


図 21 ラシアン：計算誤差-要求精度

6 おわりに

本稿では経路依存オプションに対する MLMC 法の効果の検証と最適行使境界に対する MLMC 法の適用を行った。

結果、経路依存オプションに関しては、アジアン・オプションにおいては計算時間の増加率と比較して分散が減少しており、MLMC 法による効率化を確認できたが、ラシアン・オプションに関しては確認できなかった。

また、最適行使境界に対する適用では、MLMC 法を用いて SMC 法と同等の精度を出すために SMC 法よりも計算時間が必要となった。最適行使境界の計算時間の削減が今後の課題である。

参考文献

- [1] M. B. Giles. Multilevel Monte Carlo path simulation. *Operations Research*, Vol. 56, No. 3, pp. 607–617, 2008.
- [2] G. Peskir and A. N. Shiryaev. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Birkhäuser Basel, 2006.
- [3] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, pp. 113–147, 2001.
- [4] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models*. Springer, 2008.
- [5] 乾仁, 穴太克則. ゲーム・オプションに対するマルチレベル・モンテカルロ・シミュレーションと分析. 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1939, pp. 104–113, 2014.
- [6] 鈴木 淳生, 瀬古 進, 穴太 克則. Jump-diffusion process を持つゲームオプションの価格付けと両プレイヤーの最適行使境界に関する数値計算について 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1241, pp. 19–29, 2001.
- [7] 住本賢吾, 穴太克則. ジャンプ拡散過程上のアメリカン・プット・オプションに対するマルチレベル・モンテカルロシミュレーション. 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1990, pp. 97–104, 2016.