

孤立特異点の三種類の多重種数

九大理 石井 志保子

完備代数多様体を 多重種数 P_m の増大度 K で分類し
たように $n (\geq 2)$ 次元孤立特異点 (X, x) を何らかの 多
重種数の増大度で分類することと試みる。この多重種数とし
て何をとりかが問題であるが、ここでは、Kunzler, 渡辺の
多重種数 $\gamma_m(X, x)$, $\delta_m(X, x)$ に加えて、新たに 多重
種数 $d_m(X, x)$ を導入し、これらを組上にのせる。

結論を述べると、 $\gamma_m(X, x)$ の増大度 K_γ は、 $-\infty$ か、
 n のいずれかになる。一方、 $d_m(X, x)$ の増大度 K_d
は、 $-\infty, 0, 1, \dots, n-1$ のいずれかになる。また $\delta_m(X, x)$
の増大度 K_δ は、 d_m と δ_m の関係 (Th 4.2) により、
 $-\infty, 0, 1, \dots, n-2, n$ のいずれかになることがわかる ($n-1$
が、 T ではないことに注意)。この δ_m と d_m との関係により、
 $K_\delta(X, x) = K_d(X, x) \leq n-2$ か、又は、 $K_\delta(X, x) = K_d(X, x) + 1 = n$
のいずれかが成立することがわかるので、 K_δ による分類
と K_d による分類は、一致する。

とくに、特異点 (X, x) が $(n-1)$ 次元 non-singular variety E 上の cone になっている場合、 $K_d(X, x)$ は $K(E)$ と一致する。

ここで $n=2$ のとき、 K_Y による分類と、 K_d による分類(K_d によるものと同値) をみてみよう

K_d	K_g	K_Y	特異点
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	有理二重点
		2	商特異点 (i.e. $\mathbb{C}^2/G : G \text{ 有限群}$)
0	0	$\mathbb{Z}$	単純楕円型, カスプ型 またはそれらの有限群による商特異点上の $\mathbb{C}_G^*$ に由来したもの
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	その他すべての特異点

では、 $n=3$ のときはどうかだろうか？ 残念ながら、上記の様な表はまだ完成していない。しかし、 $\mathbb{Q}$ -Gorenstein ([I, 2]) や Gorenstein ([I, 1]) 等の仮定のもとに $K_d = K_g = 0$ なる特異点のことや、ある程度知られている。

また一般に、 $\mathbb{Q}$ -Gorenstein で $K_Y = -\infty$ なる特異点とは、canonical singularity である。これらについては、Reid, 森氏らの研究が良く知られている。

この小稿を通して、基礎体は常に $\mathbb{C}$ とする。

§1. 準備.

定義 1.1. 実数列 $a = \{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ に対し、次のように、 0 以上の整数 k が存在可きとき、" a_m は order k で増大可き" といい、 $a_m \sim m^k$ と表わす:

$$0 < \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m^k} < \infty$$

(この k を a_m の増大度ともいう)

注意 1.2. 勝手には実数列 $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ に対し 0 以上の増大度は存在しない。 $a_m = \log m$ を考えてみれば良い。

定義 1.3 (X, χ) : $n (\geq 2)$ 次元正規孤立特異点 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を良特異点解消 (i.e. 特異点解消であって、 $E := f^{-1}(x)_{\text{red}}$ が正規交叉因子に分解している) とする。 $m \in \mathbb{N}$ に対し、 $\gamma_m(X, \chi)$, $\delta_m(X, \chi)$, $d_m(X, \chi)$ を次の様に定義可き。

$$\gamma_m(X, \chi) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}))} \quad ([Kn])$$

$$\delta_m(X, \chi) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))} \quad ([W17])$$

$$d_m(X, \chi) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mE))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))}$$

注意 1.4. これらはいつでも、良特異点解消 f のとり方に依らない。また Knöller 渡辺により

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma_m(X, x)}{m^n} < \infty$$

が示されている。 $dm(X, x) \leq \delta_m(X, x) \leq \gamma_m(X, x)$ に注意すれば、 dm, δ_m, γ_m の増大度 はもし存在するならば、高々 n であるということがわかる。

以後 n 次元孤立正則特異点 (X, x) の良特異点解消 $f: \hat{X} \rightarrow X$ と、 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ と固定し、 $E = \sum_{i=1}^s E_i$ と既約分解する。

尚一 渡辺による補題を準備しよう。

補題 1.5. ([T-W]). $f: \hat{X} \rightarrow X$ が x の maximal ideal $\mathfrak{m}_x$ の blow up を通って分解できると仮定する。

$\mathcal{J} := f_* \mathcal{O}_{\hat{X}}(-\sum_{i=1}^s a_i E_i)$ $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく。

すると、 f のみにより定まる $\beta > 0$ が存在して、

任意の i に対し $\mathcal{J}$ に対し $\dim \mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathcal{J} \geq \beta(a_i)^n$

($i = 1, 2, \dots, s$) が成り立つ。

命題 1.6. ある 整数 $r > 0$ が存在し

$$P(\bar{X} - \varepsilon, \mathcal{O}_X(mK_{\bar{X}})) = P(\bar{X}, \mathcal{O}(m(K_{\bar{X}} + r\varepsilon)))$$

が任意の m について成立する.

(i) 補題 1.5 により示される.

§2. γ_m の増大度.

定理 2.1. 任意の n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し
次のいふことが成立する.

(i) $\gamma_m(X, x) = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{N})$

(ii) $\gamma_m(X, x) \sim m^n$

[証明]. (i) を否定した時に (ii) が成立することはいふ
良い. したがって $\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma_m(X, x)}{m^n} < \infty$ であるから, $2 < n$ のとき
 $0 < \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma_m(X, x)}{m^n}$ を示せば十分である.

仮定により $P(\bar{X} - \varepsilon, \mathcal{O}(m_0 K_{\bar{X}})) \cong P(\bar{X}, \mathcal{O}(m_0 K_{\bar{X}}))$ なる
 $m_0 > 0$ が存在する. 左の元では, ε 右の元には ε ではない
もの ω をとる. $\varphi_m: \mathcal{O}_X \rightarrow P(\bar{X} - \varepsilon, \mathcal{O}(mm_0 K_{\bar{X}}))$ と
 $\varphi_m(z) := f^*(z) \cdot \omega^m$ で定義する. $J^{(m)} := \varphi_m^{-1}(P(\bar{X}, \mathcal{O}(mm_0 K_{\bar{X}})))$
とすると, $J^{(m)} = f_{\#} \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^s \min\{m, \nu_{E_i}(\omega)\} \cdot 0 \in E_i)$ とかける.

ω の定義により、少くとも1つの i に対し、 E_i の次数は、 $mV_{E_i}(\omega)$ となる値に等しい。そこで補題 1.5 により、 $\dim \mathcal{O}_X/J^{(m)} \geq \beta(-mV_{E_i}(\omega))^n$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成立する。したがって、 $\dim \mathcal{O}_X/J^{(m)}$ は少くとも order n で増大する。一方 φ_m により inclusion:

$$\mathcal{O}_X/J^{(m)} \subset \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}})) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mm_0K_{\tilde{X}}))$$

が得られる。よって、この右辺の次元も増大する。 $V_{mm_0}(X, x)$ は少くとも order n で増大する。

§.3. d_m の増大度.

命題 3.1 n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し、 $d_m(X, x) \neq 0$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定する。すると、 $0 \leq k \leq n-1$, $m_0 > 0$ となる整数 k, m_0 が存在して、さらに実数 $\alpha, \beta > 0$ が存在し、

$$\alpha m^k \leq d_{mm_0}(X, x) \leq \beta m^k \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

が成立する。

補題 3.2. Z を $n (\geq 2)$ 次元非特異 quasi-projective variety, E を Z に交わる既約非特異 projective variety と

する. また D を Z 上の因子とすると, 制限写像
 $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(mD)) \rightarrow \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mD))$ の像を Λ_m と表し,
 この Λ_m に付いて決まる sublinear system $|\Lambda_m| \subset |mD|_E$
 の定義する有理写像を π_m と表しその像を W_m とする
 いま ある $m \in \mathbb{N}$ について $\Lambda_m \neq 0$ と仮定すると 正整
 数 m_0 と, 正の実数 α, β が存在して.

$$\alpha m^k \leq \dim \Lambda_{mm_0} \leq \beta m^k$$

が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成立する. ただし, $k = \max_{m \in \mathbb{N}} \dim W_m$

[証明]. 方法は [U] の Theorem 8.1 と同様 T の π を省略する.

[命題 3.1 の証明] X を特異点 (X, x) の affine 近傍とする. $f: X \rightarrow X$ を良特異点解消 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ とすると, $\tilde{X}$ は quasi-projective variety. Λ_m を制限写像 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}} + E))) \rightarrow \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E))$ の像, $\Lambda_m^{(i)}$ を制限写像 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}} + E))) \rightarrow \Gamma(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(mK_{\tilde{X}} + E))$ の像とする. ここで E_i は E の既約成分である. すると, 全射 $\Lambda_m \rightarrow \Lambda_m^{(i)}$ が任意の i について得られる. また, 単射 $\Lambda_m \hookrightarrow \bigoplus_i \Lambda_m^{(i)}$ が得られる. 命題の仮定とこの単射性により, ある $m \in \mathbb{N}$ と i に対して $\Lambda_m^{(i)} \neq 0$. この i に対して 補題 3.2. を用いれば, 整数 k_i, e_i ($0 \leq k_i \leq n-1$,

$e_i > 0$) と正の数 α_i, β_i が存在して $\alpha_i m^{k_i} \leq \dim \Lambda_{me}^{(i)} \leq \beta_i m^{k_i}$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成り立つ. このとき k_i の最大値を与える $p = k_1$ とする. 更にこれらの e_i の公約数をとることにより, e_i は共通の数 e で与えられるとよい. したがって $\alpha_i m^{k_i} \leq \dim \Lambda_{me}^{(i)} \leq \dim \Lambda_{me} \leq \sum_{i=1}^p \dim \Lambda_{me}^{(i)}$ を得る. k_1 の最大性により, $\beta > 0$ を適当に大きくとれば, 左辺 $\leq \beta m^{k_1}$ となる. (命題 3.1 の証明終).

定理 3.3. n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し, $\dim(X, x) \neq 0$ ならば $m \in \mathbb{N}$ が存在するとする. このとき, $0 \leq k \leq n-1$ ならば整数 k が存在して, $\dim(X, x) \sim m^k$ が成立する.

[証明] 一般の数列 $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ については, $\alpha m^k \leq a_m \leq \beta m^k$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) ならばとて, $a_m \sim m^k$ といえる. 我々の場合は, $\dim \Lambda_m^{(i)} \leq \dim \Lambda_{mm'}^{(i)}$ ($m, m' \in \mathbb{N}$) であるので定理の主張が従う.

§4. δ_m の増大度.

この節では, $\dim$ と δ_m の関連を明らかにする. 二枚

により, δ_m の増大度が定義され, 更にその増大度のとり得る値もわかる. 初めに, 補題を準備する. 証明は省略

補題 4.1. n 次元正規孤立特異点 (X, x) の良特異点解消 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が $\sqrt{I} = m_x$ と同じ様な $\mathcal{O}_X$ -ideal I の blow up で得られていなくてはならない. もし $\delta_m(X, x) \neq d_m(X, x)$ ならば $m \in \mathbb{N}$ が存在する. 更に $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}} + (m_0 + 1)E)) \neq \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}} + m_0 E))$ が成り立つ.

定理 4.2. n 次元正規孤立特異点 (X, x) について, 次は同値である:

- (i) $d_m(X, x) \neq \delta_m(X, x)$ for some $m \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\delta_m(X, x) \sim m^n$
- (iii) $d_m(X, x) \sim m^{n-1}$

[証明] まず (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示す. もし (ii) が成り立っていると, $d_m(X, x)$ の増大度の高さは $n-1$ となる. (x) より $d_m(X, x) \leq \delta_m(X, x)$ と同じ m が存在する. (iii) $\Rightarrow$ (i) かつ, 逆に (i) を仮定すると, ある m_0 に対し $\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}})) \neq \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m_0 K_{\tilde{X}} + m_0 E))$ となる. 左の元であるが右の元ではない. ところが ω となる.

この ω に対し、定理 2.1 の証明でや、 τ_1 と同様に ψ_m を定義し、 $J^{(m)} = \psi_m^{-1}(\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(\mu m_0 K_{\tilde{X}} + (\mu m_0 + 1)E)))$ とおくと、 $\dim \mathcal{O}_X / J^{(m)} \leq \dim_{m_0}(X, x)$ が得られる。 ω のとり方と、補題 1.5 により、左辺は order n で増大すること、 $\dim(X, x)$ も order n で増大することがわかる。

(i) $\Rightarrow$ 前の証明、良特異点解消 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を次の様にとる：
 f は、max ideal m_x の blow up を経由し、また f は、 $\sqrt{J} = m_x$ となる ideal J の blowing up である。

補題 4.1 により、 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(\mu_0 K_{\tilde{X}} + \mu_0 E)) \subseteq \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(\mu_0 K_{\tilde{X}} + (\mu_0 + 1)E))$ が成立すること、左の元ではあるが右の元では τ とい ω をとる添字の順序を替えて、 $i=1, \dots, t$ については、 $V_{E_i}(\omega) = -(\mu_0 + 1)$ 、 $i=t+1, \dots, s$ については、 $V_{E_i}(\omega) \geq -\mu_0$ とする。このとき、 $J^{(m)} = f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\sum_{i=1}^t (\mu_0 + 1)E_i - \sum_{i=t+1}^s E_i)$ とおくと、 $\psi_m: \mathcal{O}_X \rightarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(\mu m_0 K_{\tilde{X}}))$ と $\psi_m(\xi) = f^*(\xi) \cdot \omega^m$ で定義できると、この ψ_m により単射： $J^{(m-1)} / J^{(m)} \hookrightarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(\mu m_0 K_{\tilde{X}} + E)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(\mu m_0 K_{\tilde{X}} + (\mu m_0 + 1)E))$ が得られる。補題 1.5 により、 $\dim \mathcal{O}_X / J^{(m)}$

は少くとも n の増大度をもつ。したがって、 $\dim J^{(m-1)} / J^{(m)}$ は少くとも $n-1$ の増大度をもつ。よって、上記の単射の右辺の次元は、少くとも $n-1$ の増大度をもつ。

(iii) $\Rightarrow$ (i) の証明 (iii) の条件のもとで $d_m(X, X) = \delta_m(X, X)$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成立すると仮定して矛盾を示す。
制限写像 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}} + E))) \rightarrow \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E))$ の像を Λ_m , 制限写像 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}} + E))) \rightarrow \Gamma(E, \mathcal{O}_{E, (m(K_{\tilde{X}} + E))})$ の像を $\Lambda_m^{(i)}$ と書く. 条件 (iii) より $\dim \Lambda_m \sim m^{n-1}$ だから i について $\dim \Lambda_m^{(i)} \sim m^{n-1}$. このより i を 1 としよう. 補題 3.2 により $\pi_{\Lambda_m}: E_1 \rightarrow \mathbb{P}^L$ は $m \gg 0$ に対して *generically finite*. 十分大きい m を固定する. $\Sigma \subset E_1$ を π_{Λ_m} が $E_1 - \Sigma$ 上で *finite morphism* になるような最小の閉集合と可る.
さて我々はここで $K_{\tilde{X}} + E$ が *quasi-projective variety* $\tilde{X}_0 := \tilde{X} - \{(\bigcup_{i=1}^r E_i) \cup \Sigma \}$ 上 *ample* になることを示そう.
 $\tilde{X} - E$ は *quasi-affine variety* であるから, $K_{\tilde{X}} + E$ は $\tilde{X} - E$ の上で *ample* である. $\pi: \tilde{X} - E \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = \mathcal{O}_{\tilde{X}-E}(mK_{\tilde{X}} + mE)$ とする *locally closed immersion* と可る. $\tilde{\Lambda}_m \subset \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}})) = \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}} + E)))$ を $\pi^*(z_i)$ ($\{z_i\}_{i=0, \dots, N}$ は $\mathbb{P}^N$ の *coordinates*) と可る $N+1$ 個の制限写像 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(m(K_{\tilde{X}} + E))) \rightarrow \Gamma(E, \mathcal{O}_E(m(K_{\tilde{X}} + E)))$ による $\Lambda_m^{(1)}$ に全射にたどるような有限次元 *subspace* と可る. 可る有理写像 $\pi_m: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^{N'}$ は $\tilde{X}_0$ 上で *finite morphism* にたどる. (可る π_m は *ample* の性質から $\pi_m^*(\mathcal{O}(1))$

$= \mathcal{O}(m(K+E))$ も $\tilde{X}_0$ 上 ample である。

∴ $\tilde{X}_0$ 上の ample divisor $K_{\tilde{X}}+E$ に対し $M > 0$ と十分大きくとれば $M(K_{\tilde{X}}+E)+E_1$ もやはり ample である base point free になる。これより次の包含関係を得る。

$$\Gamma(\tilde{X}_0, \mathcal{O}(MK_{\tilde{X}}+ME)) \subsetneq \Gamma(\tilde{X}_0, \mathcal{O}(M(K_{\tilde{X}}+E)+E_1))$$

VII

III

$$\text{しかし } \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(M(K_{\tilde{X}}+E))) = \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(MK_{\tilde{X}}))$$

(仮定)

である。これに矛盾。これより (i) が成立しなくてはならぬ。(定理 4.2 の証明終)

系 4.3. n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し

$\delta_m(X, x) \neq 0$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在し得る。

すると $\delta_m(X, x) \sim m^k$ (k は 0 と n の間の $n-1$ 以外の整数)。

[証明] 定理 4.2 の同値条件が成立すると得る (i) より

$\delta_m(X, x) \sim m^n$. 定理 4.2 の条件が成立しないとき。

(i) の否定より $\delta_m(X, x) = d_m(X, x)$ ($\forall m \in \mathbb{N}$)

とすると右辺は (iii) の否定により $d_m(X, x) \sim m^k$

$k \leq n-2$.

§5. 多重種数の増大度による特異点の分類

§2.3.4 により γ_m, d_m, δ_m の増大度が定義できることになった。

定義 5.1. n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し、
 $\delta_m(X, x) = 0$ for every $m \in \mathbb{N}$ かつ $K_g(X, x) = -\infty$
 と定義し、 $\delta_m(X, x) \neq 0$ かつ m が存在するときは、
 $K_g(X, x) := \delta_m(X, x)$ の増大度 と定義する。 $\gamma_m(X, x)$
 $d_m(X, x)$ についても同様で、 $K_\gamma(X, x)$ $K_d(X, x)$ と
 定義する。

以下に §2.3.4 の結果を K_γ, K_g, K_d を用いてまとめよう。

系 5.2 n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対し、次が成り立つ：

- (i) $K_\gamma(X, x) = -\infty$ かつ n 。
- (ii) $K_g(X, x)$ は $-\infty$ 又は $0, 1, 2, \dots, n-2, n$ のうちのいずれかである。
- (iii) $K_d(X, x)$ は $-\infty$ 又は $0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$ のうちのいずれかである。
- (iv) $K_g(X, x) - K_d(X, x) \leq n-2$ 又は $K_g(X, x) - K_d(X, x) + 1 = n$ 。

命題 5.3 [T-W]. n 次元 $\mathbb{Q}$ -Gorenstein isolated singularity (X, x) に対し $K_J(X, x)$ は $-\infty$ か 0 か または 1 である.

定理 5.4 2 次元正規孤立特異点 (X, x) は §0 の表にあるように分類される.

[証明] $K_J(X, x) = -\infty$ ならば 2 次元正規孤立特異点 (X, x) は有理二重点であることは次の様に示される: まず $V(X, x) = 0$ より (X, x) は有理特異点である. したがって $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 特異点である. 再び $V_m(X, x) = 0$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) により canonical 特異点であることがわかる. 2 次元の canonical 特異点とは有理二重点のみである. したがって $K_J(X, x) = -\infty \iff (X, x)$ は高特異点. したがって同値は [W1] に於て証明済. $K_J(X, x) = 0$ ならば特異点の特異数付けは [Io4] においてなされる. この特異点とは $K_J(X, x) = 2$ である (系 5.2 (iv)).

定理 5.5 E を非特異な射影 $(n-1)$ -fold でありその上の ample invertible sheaf とする. $(X, x) \in V(\mathcal{L})$ の zero section とつづいて特異点とすると. $d_m(X, x) =$

$P_m(E)$ が任意の $m \in \mathbb{N}$ について成り立つ.

[証明] $\tilde{X} = V(\mathcal{L})$ とおくと.

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + mE)) = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E) \otimes \mathcal{L}^k)$$

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E)) = \bigoplus_{k \geq 1} \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E) \otimes \mathcal{L}^k)$$

$$\begin{aligned} \text{F) } d_m(X, \mathcal{L}) &= \dim \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + mE)) \setminus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E)) \\ &= \dim \Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E)) \\ &= P_m(E). \end{aligned}$$

文献.

[EGA] Grothendieck, A. & Dieudonné, J.: *Éléments de géométrie algébrique II*. Publ. Math. IHES. 8 (1961)

[Ii1] Itaka: On D-dimension of algebraic varieties
J. Math. Soc. Japan, 23 (1971) 356-373.

[Ii2] ———: On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties. *Complex Analysis and Algebraic Geometry: A collection of papers dedicated to K. Kodaira*. Iwanami-Cambridge 1977. 175-189.

- [Is 1] Ishii, S.: On isolated Gorenstein singularities. Math. Ann. 270 (1985) 541-554.
- [Is 2] ——— : Isolated $\mathbb{Q}$ -Gorenstein singularities of dimension Three. Advanced Studies in Pure Math. 8 (1986) 165-198.
- [Is 3] ——— : Small deformation of normal singularities. Math. Ann. 275 (1986) 139-148.
- [Is 4] ——— : Two dimensional singularities with bounded plurigenera δ_m are $\mathbb{Q}$ -Gorenstein singularities To appear in Proc. of Symp. of Singularities Iowa.
- [Iz] Izumi, S.: A measure of integrity for local analytic algebras. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985) 719-735.
- [K] Kawamata, Y.: The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math., 119 (1984) 95-110.
- [Kn] Knüppen, F.W.: 2-dimensionale Singularitäten und Differentialformen. Math. Ann. 206 (1973) 205-213.
- [L-T] Lejeune-Jalabert, M. & Teissier, B.: Clôture intégrale des idéaux et équi-singularité. École Poly-

technique 1974.

[S] Sakai, F.: Kodaira dimension of complements of divisors. Complex analysis and algebraic geometry: A collection of papers dedicated to K. Kodaira. Iwanami-Cambridge 1977, 239-257.

[T-W] Tomari & Watanabe: Not-log-canonical Gorenstein isolated singularities are of general type in the sense of L^2 -plurigenera of singularity. Preprint.

[U] Ueno, K.: Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Lecture Note in Math. 439. Springer-Verlag 1975.

[W1] Watanabe, K.: On plurigenere of normal isolated singularities I. Math Ann. 250 (1980) 65-94.

[W2] ——— : On plurigenere of normal isolated singularities II. Advanced Studies in Pure Math. 8 Complex Analytic Singularities (1986) 671-685.