

圧縮性完全流体の初期境界値問題

北大理 上見 練太郎

はじめに. 完全流体の方程式系は L. Euler により 18 世紀に確立されている。この境界値問題は初期値問題のように線形化すると特性境界値問題になり手がつけられていなかったが, 1979 年 D. G. Ebin [2] がこの問題にアタックして初期速度が subsonic かつ初期密度が定数に近いとき時間について解の局所存在定理を証明した。この報告の目的は初期条件についての上の条件を仮定しなくても同じ結果が成立することと示めすことにある。

1. 結果. 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域 Ω において, 完全流体は次の方程式系で支配される:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{p(p)}{p} \nabla p &= K \\ \frac{dp}{dt} + p \operatorname{div} v &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } (0, T) \times \Omega,$$

ここで, d/dt は物質微分,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla, \quad v \cdot \nabla = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

2', $v(t, x) = (v_1, v_2, v_3)$, $K(t, x) = (K_1, K_2, K_3)$, $p(t, x)$, $\phi(p(t, x))$ はそれぞれ流体の速度, 外力, 密度, 圧力を表わす。更に, 物理的要請より ρ , $\rho'(\rho)$ は正とす。この方程式系に対して次の初期, 境界条件を課す:

$$(2) \quad v(0) = v_0, \quad p(0) = p_0 \quad \text{on } \Omega,$$

$$(3) \quad \langle v, n \rangle = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega,$$

ここで, $\langle v, n \rangle$ は速度と外向法単位ベクトル n との内積を表すものとす。

我々の結果は次の通り 2' である。

定理. (v_0, p_0, K) が $H^s(\Omega, \mathbb{R}^4) \times X^s(T, \Omega, \mathbb{R}^3)$ ($s \geq 3$) に属しかつ order s までの整合条件をみたすとす。このとき, 適当に T_1 ($0 < T_1 \leq T$) ととり初期境界値問題 (1) - (3) は一意的な解 $(v, p) \in X^s(T_1, \Omega, \mathbb{R}^4)$ をもつ。

上で使用した関数空間 $X^s = X^s(T, \Omega, \mathbb{R}^m)$ は次の様に定義したものである。

$$X^s = \bigcap_{k=0}^s C^k([0, T]; H^{s-k}(\Omega, \mathbb{R}^m)),$$

$$\|f\|_{X^s} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{k=0}^s \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t) \right\|_{s-k}.$$

注 1. 一意性は 2' の Serrin [3] より証明される。

注2. 解の data (v, p, K) に関する連続性は X^{s-1} -category で成立する。

注3. 上の結果は方程式系(1)にエントロピー S についての方程式 $dS/dt = 0$ を加えても成立する。

定理の証明の方針はあらく言うとも $Ebin[2]$ にしたがうが、主たる変更は次の通りである。第一は方程式系(1)と同値なものとして integro-differential equations の系を使用したことであり、これは楕円型境界値問題の可解性にかかわる。第二は、いまのベタ方程式系の中にある二階双曲型方程式に [2] とちがう解釈を与えたことである^(*)。第三に、ベクトル場 v の gradient part により精密な評価式を与えたことである。

紙数の関係で証明の詳細を記すことはできないので、Agemi [1] でおぎなうていただきたい。

2. 同値な方程式系.

[2] のように、 $g = \log p$, $a(g) = p'(e^g)$ とおくと、(1)は

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dg}{dt} + \operatorname{div} v &= 0 \\ \frac{dv}{dt} + a(g) \nabla g &= K \end{aligned}$$

(*) このことは最近得た結果 — マルチハ数 M をパラメータとして含む圧縮性方程式系の解が $M \rightarrow 0$ としたとき、非圧縮性方程式系の解に近づく — においても重要な役割を果たす。

と同値になる。境界 $\partial\Omega$ はこの方程式系に対し 2 特性的なものとして変形する。まず, (4) の第一式に d/dt を作用して

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \operatorname{div} \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla (\operatorname{div} v) = 0$$

を得る。これを (4) の第一式に代入し, 6' の恒等式

$$(5) \quad \operatorname{div}((v \cdot \nabla)u) = v \cdot \nabla(\operatorname{div} u) + \operatorname{tr}((Dv)(Du)),$$

より $Dv = (\partial v_j / \partial x_k)$, を用いると

$$(6) \quad \frac{d^2 g}{dt^2} - \operatorname{div}(a(g)\nabla g) = \operatorname{tr}((Dv)^2) - \operatorname{div} K, \quad \text{in } (0, T) \times \Omega.$$

(6) 式に対応する初期条件及び境界条件は (2) (3) (4) 式より

$$(7) \quad g(0) = g_0, \quad \partial g / \partial t(0) = -(v_0 \cdot \nabla g_0 + \operatorname{div} v_0) \quad \text{on } \Omega,$$

$$(8) \quad \langle (v \cdot \nabla)v + a(g)\nabla g - K, n \rangle = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega.$$

さて, 残りの方程式系を得るために, ベクトル場 v を solenoidal と gradient parts に $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ において直交分解しよう。

$$v = w + \nabla f = Pv + Qv,$$

ここで w は $\operatorname{div} w = 0$ in Ω , $\langle w, n \rangle = 0$ on $\partial\Omega$ をみたす solenoidal な部分である。なお, ∇f は楕円型境界値問題

$$(9) \quad \Delta f = \operatorname{div} v \quad \text{in } \Omega, \quad \langle \nabla f, n \rangle = \langle v, n \rangle \quad \text{on } \partial\Omega,$$

の解として与えられる。まず, f についての方程式は (3), (9), 及び (4) の第一式から次のようになることが分る;

$$(10) \quad \Delta f = -\frac{dg}{dt} \quad \text{in } (0, T) \times \Omega,$$

$$\langle \nabla f, n \rangle = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega.$$

$w = Pv$ についての方程式は P を (4) の $\mathcal{A}$ -式に作用させて

$$\frac{\partial w}{\partial t} + P((v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)\nabla f) - K = -P(a(g)\nabla g + (\nabla f \cdot \nabla)\nabla f)$$

を得る。ところが

$$a(g)\nabla g = \nabla \int_0^g p'(e^y) dy, \quad (\nabla f \cdot \nabla)\nabla f = \nabla \langle \nabla f, \nabla f \rangle / 2$$

と gradient としておけるから、結局

$$(11) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + P((v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)\nabla f) = PK$$

$$w(0) = Pv_0$$

が w についての方程式系である。

逆に, $(w, f, g) \in (6), (7), (8), (10), (11)$ の解とすると
 $v = w + \nabla f$ とおくことにより (v, g) が (2), (3), (4) の
 解となることを [2] で証明されている。しかし, 我々がここ
 で使用する方程式系は楕円型境界値問題の可解性を考慮に入
 れて, (10) の代わりに積分項を含む次の方程式を採用する;

$$(10)' \quad \Delta f = -\frac{dg}{dt} + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{dg}{dt} dx \quad \text{in } (0, T) \times \Omega,$$

$$\langle \nabla f, n \rangle = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega,$$

ここで, $|\Omega|$ は Ω の volume を表わす。

次に, 我々は (6), (7), (8), (10)', (11) の解 (w, f, g) が
 (6), (7), (8), (10), (11) の解となること, 即ち,

$$b(t) = \int_{\Omega} \frac{dg}{dt} dx = 0$$

となることを示そう。まず, (7) と発散定理より

$$b(0) = - \int_{\partial\Omega} \langle v_0, n \rangle dS = 0$$

を得る。最後の等式は整合条件 $\langle v_0, n \rangle = 0$ を用いた。次に, w が solenoidal であることより $\Delta f = \operatorname{div} v$ が成立することと注意して, (5), (6), (10) より次の等式を得る;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{dg}{\partial t} &= \frac{d^2 g}{dt^2} - v \cdot \nabla \left(\frac{dg}{dt} \right) \\ &= \operatorname{div} \left((v \cdot \nabla) v + a(g) \nabla g - k \right). \end{aligned}$$

この z'' , 発散定理と境界条件 (8) を用いると $\partial b / \partial t(t) = 0$ となり, 結局 $b(t) = 0$ が結論される。

注4. 境界上 $\langle v, n \rangle = 0$ ならば, 二階双曲型方程式 (6), (7), (8) は非特性的初期境界値問題となることに注意されたい。

3. 整合条件

$(v, g) \in X^s$ が (2), (3), (4) の解であるとするとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(0) &= - (v_0 \cdot \nabla g_0 + \operatorname{div} v_0) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0) &= - ((v_0 \cdot \nabla) v_0 + a(g_0) \nabla g_0) + k(0) \end{aligned}$$

が成立する。更に, (4) を t で微分することにより $\partial^k v / \partial t^k$, $\partial^k g / \partial t^k$ ($k = 1, \dots, s$) の初期値は帰納的に (v_0, g_0, k) 及びそれらの微分を用いて表わすことが出来る。このとき, $\partial^k v / \partial t^k$, $\partial^k g / \partial t^k$ ($k = 1, \dots, s$) は $t = 0$ で方程式 (4) をみたすという。次に, 境界条件 (3) を t で微分して,

$$(12)_k \quad \langle \partial^k v / \partial t^k(0), n \rangle = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \quad (k = 0, \dots, s-1)$$

が (v_0, g_0, k) とその微分についての関係式であることが

わが。このとき, $(12)_k$ ($k=0, \dots, s-1$) を s 次の整合条件 という。

本稿でよく使用する関数の積についての評価式について述べておこう。3次元(2次元でも以下適用する)領域 Ω で、 $H^s(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ($s \geq 2$) が algebra をなすこと, Sobolev の補題 $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$, 及び L^2 又は H^1 評価式としては

$$\|f_1 f_2\|_0 \leq C \|f_1\|_0 \|f_2\|_2, \quad \|f_1 f_2\|_0 \leq C \|f_1\|_1 \|f_2\|_1,$$

$$\|f_1 f_2\|_1 \leq C \|f_1\|_1 \|f_2\|_1$$

を使用する。ここで, C は Ω と微分階数に依存する定数であり, 以下も同じ意味で使用する。

4. 線型化方程式とその解の評価式

この節では $(v, g) \in X^s$ ($s \geq 3$) が以下の条件を満たすように仮定されたとする。

$$\langle v, n \rangle = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \quad a(g) > 2d > 0,$$

$$a(g) - \langle v, n \rangle^2 > d \quad \text{on } (0, T) \times \cup(\partial\Omega), \quad v' > 0,$$

$$(v(0), g(0)) = (v_0, g_0) \quad \text{及} \quad \partial^k v / \partial t^k, \partial^k g / \partial t^k \text{ は}$$

$t=0$ で方程式(4)を満たす。

最初に, $\hat{g}$ についての線型化方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{g}}{dt^2} - \operatorname{div}(a(g) \nabla \hat{g}) &= F & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ (13) \quad \hat{g}(0) &= g_0, \quad \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}(0) = g_1 & \text{on } \Omega, \\ \langle \nabla \hat{g}, n \rangle &= h & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

を考へよう。こゝで、

$$F = \operatorname{tr}((Dv)^2) - \operatorname{div} K, \quad g_1 = -(v_0 \cdot \nabla g_0 + \operatorname{div} v_0),$$

$$h = \langle K - (v \cdot \nabla)v, n \rangle / \alpha(g).$$

$\alpha(g) > d$, $\langle v, n \rangle = 0$ だから、境界は (13) に對して非特異的であることがわかる。更に、 s 次の整合条件 (12)_k ($k = 0, 1, \dots, s-1$) は初期境界値問題 (13) の data (g_0, g_1, h, F) に對する s 次の整合条件になった。こゝで、

命題 1. 初期境界値問題 (13) は一意的な解 $\hat{g} \in X^s(T)$ をもち、次の評価式をみたす：

$$(14) \quad \|\hat{g}(t)\|_{X^1}^2 \leq p e^{pt} \left(\|\hat{g}(0)\|_{X^1}^2 + \int_0^t \|F(t)\|_0^2 dt + \|h\|_{Y_2, (0,T) \times \partial\Omega}^2 \right)$$

$$(15) \quad \|\hat{g}(t)\|_{X^s}^2 \leq q(t) e^{pt} \left(\|\hat{g}(0)\|_{X^s}^2 + \|F(0)\|_{X^{s-2}}^2 + p \left(\int_0^t \|F(t)\|_{X^{s-1}}^2 dt + \|h\|_{Y_2, (0,T) \times \partial\Omega}^2 \right) \right).$$

注 5. (14), (15) 式における p は $\|v\|_{X^s}$, $\|g\|_{X^s}$ の多項式を表わし、 $q(t)$ は $\|v(t)\|_{X^{s-1}}$, $\|g(t)\|_{X^{s-1}}$ の多項式を表わす。以下、本稿では上の記号を使用する。

注 6. $\langle v, n \rangle = 0$ より $v \cdot \nabla$ は tangential, $s \geq 2$, $-\langle (v \cdot \nabla)v, n \rangle = \langle v, (v \cdot \nabla)n \rangle$ は低階と考へることが出来る。

次に、 $\hat{g}$ についての線型化方程式

$$(16) \quad \begin{aligned} \Delta \hat{f} &= G && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \langle \nabla \hat{f}, n \rangle &= 0 && \text{on } (0, T) \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

と考へる。こゝで

$$G = -\frac{d\hat{g}}{dt} + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{d\hat{g}}{dt} dx,$$

かつ $\hat{g}$ は (13) の解である。

注 17. [2] における線型化方程式は

$$-\Delta \hat{f} = \partial \hat{g} / \partial t + w \cdot \nabla \hat{g} + \nabla \hat{f} \cdot \nabla \hat{g}$$

であり, このため $\|\hat{g}(0)\|_{X^S}$ が十分小, 即ち, 密度が定数に近いという条件がつけられたのである。

命題 2. 境界値問題 (16) は定数 ε と ε の一意的な解 $\hat{f} \in X_1^S$ をもち, 次の評価式をみたす;

$$(17) \quad \|\nabla \hat{f}\|_{X_1} \leq C \|G\|_{X_0},$$

$$(18) \quad \|\nabla \hat{f}\|_{X_1^S} \leq g(t) \|\hat{g}(t)\|_{X^3}.$$

注 8. X_1^S は X^S の定義における s 階微分をとった Banach 空間である。

最後に, $\hat{w}$ についての線型化方程式

$$(19) \quad \begin{aligned} \partial \hat{w} / \partial t + P(w \cdot \nabla \hat{w} + (\hat{w} \cdot \nabla) \nabla \hat{f}) &= PK && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \hat{w}(0) &= P v_0 && \text{on } \Omega, \end{aligned}$$

と考へる。こゝで, $\hat{f}$ は (16) の解である。

命題 3. 初期値問題 (19) は一意的な解 $\hat{w} \in X^s$ があり、次の評価式をみたす；

$$(20) \quad \|\hat{w}(t)\|_{X_1} \leq e^{p't} \|\hat{w}(0)\|_{X_1} + \int_0^t e^{p'(t-\tau)} \|PK(\tau)\|_{X_1} d\tau,$$

$$(21) \quad \|\hat{w}(t)\|_{X_1^s} \leq e^{p'(t)} \|\hat{w}(0)\|_{X_1^s} + \int_0^t e^{p'(t-\tau)} \|PK(\tau)\|_{X_1^s} d\tau,$$

$$(22) \quad \left\| \frac{\partial^s \hat{w}}{\partial t^s}(t) \right\|_0 \leq C (\|v(t)\|_{X^{s-1}} + \|\nabla \hat{f}\|_{X_1^s}) \|\hat{w}(t)\|_{X_1^s},$$

ここで、 $p' = C (\|v\|_{X_1^s} + \|\nabla \hat{f}\|_{X_1^s})$ である。

今我々は三つの方程式系 (13), (16), (19) を用いて次の命題を証明することができよう。

命題 4. $\nabla \hat{f}$ は X^s に属し、次の評価式をみたす；

$$(23) \quad \left\| \frac{\partial^s}{\partial t^s} \nabla \hat{f}(t) \right\|_0 \leq g(t) (\|\hat{g}\|_{X_1^3} + \|\hat{v}\|_{X_1^3}) \\ + C (\|v(t)\|_{X^{s-1}} \|v\|_{X_1^s} + \|K\|_{X^s}),$$

ここで、 $\hat{v} = \hat{w} + \nabla \hat{f}$ である。

注 9. 評価式 (23) は [2] では我々としていなかった。

5. 定理の証明.

前節の初めに与えられた (v, g) に対し、方程式 (13), (16), (19) の解を $(\hat{v}, \hat{g})$ ($\hat{v} = \hat{w} + \nabla \hat{f}$) とすると、一つの写像を

$$\Phi(v, g) = (\hat{v}, \hat{g})$$

が与えられる。定理は不動点定理を用いて証明される。

Iterations を行う X^s の部分集合を定めよう。まず

$$A = \|v_0\|_{X^s} + \|g_0\|_{X^s} + \|F\|_{X^s}$$

とおき,

$$4d = \min_{|y| \leq CA} a(y) \quad (d > 0)$$

ここで d を定義する。ここで、Sobolev の補題 $\|g_0\|_\infty \leq C \|g_0\|_2$ を用いた。次に $\langle v_0, n \rangle = 0$ を考慮に入れ、

$$a(g_0(x)) - \langle v_0(x), n \rangle^2 \geq 2d \quad \text{in } U$$

が成立するように $\partial\Omega$ の近傍 U を一つ定める。この d, U を用いて,

$$\begin{aligned} E(C, T) = \{ (v, g) \in X^s(T) ; (v(0), g(0)) = (v_0, g_0), \partial^k v / \partial t^k \\ \partial^k g / \partial t^k \ (k=1, \dots, s-1) \text{ は } t=0 \text{ で方程式 (4) をみたす, } \langle v, n \rangle = 0 \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega, a(g) \geq 2d, \\ a(g) - \langle v, n \rangle^2 \geq d \text{ on } (0, T) \times U, \\ \|v\|_{X^s(T)} + \|g\|_{X^s(T)} \leq C \} \end{aligned}$$

とおく。

命題 5. Ω と AK のみに依存する定数 C, T, δ がとれて,

$\|v(0)\|_{X^{s-1}} \leq \delta$ ならば $E(C, T)$ は重なり変でない。

これを証明するためには次のように示す。

補題 1. $\partial^k \hat{w} / \partial t^k, \partial^k \hat{g} / \partial t^k$ ($k=1, \dots, s-1$) は $t=0$ で方程式 (4) をみたす。

証明. $\hat{w}$ と $\hat{g}$ との初期条件より

$$\hat{w}(0) = w_0, \quad \hat{g}(0) = g_0, \quad \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}(0) = -(v_0 \cdot \nabla g_0 + \operatorname{div} v_0),$$

ここで、 $v_0 = w_0 + \nabla f_0$ である。まず、

$$\hat{v}(0) = v_0$$

を示めよう。このためには $\nabla \hat{f}(0) = \nabla f_0$, 即ち, $\nabla(\hat{f}(0) - f_0)$ が solenoidal であることを示めよう。これは, (16)を用いて

$$\operatorname{div}(\nabla \hat{f}(0) - \nabla f_0) = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \langle v_0, n \rangle dS = 0$$

$$\langle \nabla \hat{f}(0) - \nabla f_0, n \rangle = \langle v_0, n \rangle = 0$$

より示す。次に,

$$(24) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0) = -((v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(q_0)\nabla q_0 - K(0))$$

を示めよう。(13), (16)を用いて,

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\hat{q}}{dt} &= \frac{d^2\hat{q}}{dt^2} - v \cdot \nabla \left(\frac{d\hat{q}}{dt} \right) \\ &= \operatorname{div}((v \cdot \nabla)\hat{v} + a(q)\nabla\hat{q} - K) + \operatorname{tr}((Dv)^2 - (Dv)(D\hat{v})). \end{aligned}$$

(16)を t で微分して, (25)を $t=0$ で評価すると,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \hat{f}(0) + Q((v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(q_0)\nabla q_0 - K(0)) \right) \\ = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \langle (v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(q_0)\nabla q_0 - K(0), n \rangle dS = 0. \end{aligned}$$

これは, 一次の整合条件 (12)₁ を用いた。よって,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \hat{f}(0) = -Q((v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(q_0)\nabla q_0 - K(0))$$

を得る。方程式 (19) を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{w}(0) = -P((v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(q_0)\nabla q_0 - K(0))$$

も容易に導かれるから, (24) が証明されたことになる。

$\partial^2 \hat{q} / \partial t^2$ が $t=0$ で方程式 (4) を満たすことは (24) と (25) から示す。一般には (25) と (19) を t で微分して帰納的に示される。

命題5の証明. $\|v\|_{X^3(T)} + \|g\|_{X^3(T)} \leq C$ ならば $\|\hat{v}\|_{X^3(T)} + \|\hat{g}\|_{X^3(T)} \leq C$ となる C, T の存在を示めると十分であろう。
不等式 (15), (18), (23) の $g(t)$ の処理には

$\|v(t)\|_{X^{s-1}} + \|g(t)\|_{X^{s-1}} \leq \|v(0)\|_{X^{s-1}} + \|g(0)\|_{X^{s-1}} + 2Ct$
を使用する。 A と C に関する2つの多項式を $p_j(A, C)$ とおくと,

$$\|\bar{F}\|_{X^{s-1}}, \|h\|_{S-Y_2, (0, T) \times \partial\Omega} \leq p_1(A, C)$$

$$\|\hat{g}(0)\|_{X^s}, \|\bar{F}(0)\|_{X^{s-2}} \leq p_2(A)$$

が成り立つから, (15) 式より

$$\|\hat{g}(t)\|_{X^s}^2 \leq e^{p_3(C)t} (p_4(A) + p_5(A, C)T)$$

を得る。ここで, T_1 を

$$p_3(C)T_1 \leq 1, \quad p_5(A, C)T_1 \leq p_4(A)$$

と選ぶようにすると

$$(26) \quad \|\hat{g}(t)\|_{X^s}^2 \leq 4\sqrt{p_4(A)} \quad 0 \leq t \leq T_1.$$

同様にし、不等式 (18), (21), (22), (26) より

$$(27) \quad \|\hat{g}(t)\|_{X^s}^2 + \|\hat{w}(t)\|_{X^s} + \|\nabla \hat{f}(t)\|_{X_1^s} \leq p_6(A)$$

が $0 \leq t \leq \min(T_1, T_2)$ で成り立つように T_2 をとることができ。更に, 不等式 (23) と (27) より

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^s}{\partial t^s} \nabla \hat{f}(t) \right\|_0 &\leq (p_7(A) + p_8(C))t + p_6(A) \\ &\quad + CC(\|v(0)\|_{X^{s-1}} + Ct + A) \end{aligned}$$

を得る。よって, T_3 と $\|v(0)\|_{X^{s-1}}$ を

$$(p_6(A)p_8(C) + CC^2)T_3 \leq p_6(A)p_7(A) + CA,$$

$$(28) \quad cC \|v(0)\|_{X^{s-1}} \leq p_6(A) p_7(A) + cA$$

と p_8 のように κ 選ぶと,

$$(29) \quad \left\| \frac{\partial^s}{\partial t^s} \nabla \hat{f}(t) \right\|_0 \leq 3(p_6(A) p_7(A) + cA)$$

が $0 \leq t \leq \min(T_1, T_2, T_3)$ に $\nabla \hat{f} \in Z$ が成立する。故に, (26)

— (29) より

$$C \geq 4\sqrt{p_4(A)} + p_6(A)(1 + 3p_7(A)) + 3cA$$

$$T \leq \min(T_1, T_2, T_3)$$

$$\delta \leq (p_6(A) p_7(A) + cA) / cC$$

p_8 は T, C, δ が決まればものごとく定まるとわかる。

次の段階として, Φ の不動点を求めるために $E(C, T)$ に X^1 に Φ の metric を導入しよう;

$$d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2)) = \|v_1 - v_2\|_{X^1(T)} + \|g_1 - g_2\|_{X^1(T)}$$

$$(v_1, g_1), (v_2, g_2) \in E(C, T).$$

注 10 [2] における metric は w, g について X^1 , ∇f については X^1_1 であった。

命題 6. 任意の ε ($0 < \varepsilon < 1$) に對して, ε, Ω, A のみに依存する定数 T, δ があって, $\|v_0\|_2 < \delta$ ならば

$$d_T(\Phi(v_1, g_1), \Phi(v_2, g_2)) \leq \varepsilon d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2))$$

が成立する。

証明. $(\hat{v}_j, \hat{g}_j) = \Phi(v_j, g_j)$ ($j=1, 2$) とし, $\hat{g} = \hat{g}_1 - \hat{g}_2$, $\hat{w} = \hat{w}_1 - \hat{w}_2$, $\nabla \hat{f} = \nabla(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)$ とおくと, $\hat{g}, \hat{w}, \hat{f}$ は

次の方程式系をみたす。

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \frac{d^2 \hat{g}}{dt^2} - \operatorname{div}(a(g_1) \nabla \hat{g}) = \hat{F} && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\
 & \hat{g}(0) = \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}(0) = 0 && \text{on } \Omega, \\
 & \langle \nabla \hat{g}, n \rangle = \hat{h} && \text{on } (0, T) \times \partial \Omega,
 \end{aligned}$$

$$\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}, \quad d/dt = \partial/\partial t + v_1 \cdot \nabla$$

$$\hat{h} = \langle K - (v_1 \cdot \nabla) v_1, n \rangle / a(g_1) - \langle K - (v_2 \cdot \nabla) v_2, n \rangle / a(g_2),$$

$$\begin{aligned}
 \hat{F} = & \operatorname{tr}((Dv_1)^2 - (Dv_2)^2) + \operatorname{div}(a(g_1) - a(g_2) \nabla \hat{g}_2) \\
 & - 2(v_1 - v_2) \cdot \nabla \left(\frac{\partial \hat{g}_2}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (v_1 - v_2) \cdot \nabla \hat{g}_2 + \\
 & (v_2 \cdot \nabla)(v_2 \cdot \nabla \hat{g}_2) - (v_1 \cdot \nabla)(v_2 \cdot \nabla \hat{g}_2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \Delta \hat{f} = \hat{G} && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\
 & \langle \nabla \hat{f}, n \rangle = 0 && \text{on } (0, T) \times \partial \Omega,
 \end{aligned}$$

$$\dot{\cdot} = \frac{d}{dt},$$

$$\hat{G} = -\left(\frac{d\hat{g}}{dt} + (v_1 - v_2) \cdot \nabla \hat{g}_2\right) + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{d\hat{g}}{dt} + (v_1 - v_2) \cdot \nabla \hat{g}_2\right) dx.$$

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + P((v_1 \cdot \nabla) \hat{w} + (\hat{w} \cdot \nabla) \nabla f_1) = P\hat{K} && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\
 & \hat{w}(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\dot{\cdot} = \frac{d}{dt},$$

$$-\hat{K} = (v_1 - v_2) \cdot \nabla \hat{w}_2 + (\hat{w}_2 \cdot \nabla)(\nabla f_1 - \nabla f_2).$$

方程式(30)の解 $\hat{g}$ に対し不等式(14)を適用し

$$(33) \quad \|\hat{g}_1 - \hat{g}_2\|_{X^1(T)} \leq p_1(A, C) T d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2))$$

が成立することが分る。更に, (31) の解 $\hat{f}$ に不等式 (17) と適用して, (33) を用いると

$$(34) \quad \|\nabla \hat{f}_1 - \nabla \hat{f}_2\|_{X^0(T)} \leq p_2(A, C) T d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2)).$$

同様にして, (32) の解 $\hat{w}$ に不等式 (20) を適用して

$$(35) \quad \|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|_{X^1(T)} \leq p_3(C) T d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2))$$

を得る。

さて, 問題は $\partial(\nabla \hat{f})/\partial t$ の評価である。これは次の補題により, この補題の手法は命題 4 の証明にも用いられる。

補題 2.

$$(36) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \nabla(\hat{f}_1 - \hat{f}_2) \right\|_{X^0(T)} \leq C \|v_0\|_2 \|v_1 - v_2\|_{X^1_1(T)} + p_4(C, A) T d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2)).$$

命題 (6) は不等式 (33) - (36) よりしたがう。

補題 2 の証明. $\hat{f}_j$ について 2 の方程式を t で微分して, 関係式 (25) を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial t} &= \operatorname{div} u_j - \operatorname{tr}((Du_j)^2 - (Du_j)(D\hat{v}_j)) \\ &\quad - \frac{1}{124} \int_{\Omega} (\operatorname{div} u_j - \operatorname{tr}((Du_j)^2 - (Du_j)(D\hat{v}_j))) dx, \end{aligned}$$

ここで,

$$u_j = K - a(g_j) \nabla \hat{g}_j - \langle v_j, \nabla \rangle \hat{v}_j.$$

更に,

$$G_j = \operatorname{div} u_j - \operatorname{tr}((Du_j)^2 - (Du_j)(D\hat{u}_j))$$

$$\nabla b_j = Qu_j$$

とおき, $\hat{f}_j$ と $\hat{g}_j$ と κ に対する境界条件を考慮に入れ, 次の Δ に対する境界値問題を導く。

$$\begin{aligned} (37) \quad & \Delta \left(\frac{\partial}{\partial t} (\hat{f}_1 - \hat{f}_2) - (b_1 - b_2) \right) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (G_2 - G_1) dx \\ & - \operatorname{tr}((Du_1)^2 - (Du_2)^2 + (Du_2)(D\hat{u}_2) - (Du_1)(D\hat{u}_1)), \\ & \langle \nabla \frac{\partial}{\partial t} (\hat{f}_1 - \hat{f}_2) - \nabla(b_1 - b_2), n \rangle \\ & = \langle (v_1 \cdot \nabla)(\hat{u}_1 - u_1) - (v_2 \cdot \nabla)(\hat{u}_2 - u_2), n \rangle \end{aligned}$$

$f = \partial(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)/\partial t + (b_1 - b_2)$ とおき, b_j を適当に選ぶと

$$\int_{\Omega} f dx = 0$$

とすることができる。よって, Green の公式より (37) を含め

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_0^2 & \leq \int_{\partial\Omega} |\langle (v_1 \cdot \nabla)(\hat{u}_1 - u_1) - (v_2 \cdot \nabla)(\hat{u}_2 - u_2), n \rangle f| dS \\ & + \int_{\Omega} |\operatorname{tr}((Du_1)^2 - (Du_2)^2 + (Du_2)(D\hat{u}_2) - (Du_1)(D\hat{u}_1)) f| dx \end{aligned}$$

を得る。~~これは~~ 体積分の積分関数は

$$|f \partial u_j \text{ or } f \partial \hat{u}_j| \times |\partial(v_1 - v_2) \cap \partial(\hat{u}_1 - \hat{u}_2)|$$

の和であるからこれらの積分は次で評価される;

$$\begin{aligned} (38) \quad & \varepsilon \|f\|^2 + \varepsilon^{-1} (C \|v_0\|_2 \|v_2 - v_1\|_1 \\ & + P_5(C, A) T d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2))). \end{aligned}$$

たとへば,

$$\int_{\Omega} |f \partial v_1 \partial (v_1 - v_2)| dx \leq \|f \partial v_1\|_0 \|\partial (v_1 - v_2)\|_0$$

$$\leq C \|f\|_1 \|v_1\|_2 \|v_1 - v_2\|_1$$

$$\leq \varepsilon \|f\|_1^2 + \varepsilon^{-1} C^2 (\|v_0\|_2 + Ct) \|v_1 - v_2\|_1^2.$$

境界上の積分も同様に (38) で評価される。(38)の右辺にあらわれの $\|f\|_0$ は Poincaré の補題

$$\|f\|_0 \leq C (\|\nabla f\|_0 + |\int_{\Omega} f(x) dx|) = C \|\nabla f\|_0$$

を用いて, ε と t を十分に小さくして左辺にもつておくことができる。
結局 $\|\nabla f\|_0$ の評価式として, (34), (35) も用いて

$$(39) \quad \|\nabla f\|_0 \leq C \|v_0\|_2 \|v_1 - v_2\|_1 + p_0(C, A) T d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2))$$

を得ることにする。よって, f, b_j の定義と (33)–(35), (39) を用いて補題 2 の不等式 (36) が証明される。

定理の証明 T と $\|v(0)\|_{X^{s-1}}$ を命題 5.6 が成立するような十分に小さくすると, Φ は contraction となるから Φ は $E(C, T)$ の X^1 -metric による closure 上の不動点 (v, g) をもつことが分り, その (v, g) が X^s に属することもまた方程式 (4) の解となることが結論できる。

最後に, 初期値に関する制限 $\|v(0)\|_{X^s}$ が 1.1 を取除くためにスケールの変換を行う。

$$g_\lambda = g, \quad v_\lambda = \lambda v, \quad a_\lambda = \lambda^2 a, \quad K_\lambda = \lambda^2 K, \quad t_\lambda = t/\lambda$$

とおくと, $(v_\lambda(t_\lambda, x), g_\lambda(t_\lambda, x), a_\lambda, K_\lambda)$ が方程式 (4)

をみたすことと (v, g, a, K) がそうであることと同等である。
関係式 $\partial^k v_\lambda / \partial t_\lambda^k = \lambda^{k+1} \partial^k v / \partial t^k$ が成立することから, λ を十分小さいとすることにより上の制限はとれぬ。

6. $\hat{g}$ の評価式

$\hat{f}$, $\hat{w}$ の評価式 (命題 2.3) は楕円型境界値問題, 非圧縮性流体の問題と同様の手法で得られぬ。 $\hat{g}$ の評価式 (命題 1) はふたつ擬微分作用素を用いるが, ここではそれを用いないで通常の方法を徹底させぬ。方程式 (13) の h に対して,

$$\langle \nabla f_1, n \rangle = h \quad \text{on } (0, T) \times \partial \Omega$$

$$\|f_1\|_{k+1, (0, T) \times \Omega} \leq C \|h\|_{k-\gamma_2, (0, T) \times \partial \Omega} \quad (k=1, \dots, s)$$

をみたすような $f_1 \in H^{s+1}((0, T) \times \Omega)$ をとり, (13) の代わりに境界条件が 0 となる問題

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} - \operatorname{div}(a(g) \nabla f_2) = F - \frac{d^2 f_1}{dt^2} - \operatorname{div}(a(g) \nabla f_1)$$

$$(39) \quad f_2(0) = g_0 - f_1(0), \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}(0) = g_1 - \frac{\partial f_1}{\partial t}(0)$$

$$\langle \nabla f_2, n \rangle = 0$$

の解を f_2 とす。このとき, $\hat{g} = f_1 + f_2$ が (13) の解となる。よって, (13) で $h=0$ の評価式をたすと十分となる。

。 $h=0$ のときは

$$\int_0^t dt \int_{\Omega} \left(\frac{d^2 \hat{g}}{dt^2} - \operatorname{div}(a(g) \nabla \hat{g}) \right) \frac{d \hat{g}}{dt} dx$$

を部分積分することにより

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{d\hat{g}}{dt}(t) \right)^2 + \langle a(g) \nabla \hat{g}, \nabla \hat{g} \rangle \right) dx$$

がいわゆる energy norm K とれることがわ^らる。詳しくは [1] をみよ。命題 4 は補題と同じ手法を用いる。

References

- [1] R. Agemi, The initial boundary value problem for inviscid barotropic fluid motion (to appear in Hokkaido M. J. vol 9)
- [2] D. G. Ebin, The initial boundary value problem for subsonic fluid motion. C. P. A. M, vol. 32 1-19 (1979)
- [3] J. Serrin, On the uniqueness of compressible fluid motions, Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 3, 271 - 288 (1959)

(*) [1] の ~~原稿~~ 原稿をいただいたあと、西田孝明氏から次の論文について¹⁴⁹指摘を受けた。方法はちがうように思われる。

H. B. da Veiga, Un théorème d'existence dans la dynamique des fluides compressibles. C. R. Acad. Sc. t. 289 (17 décembre 1979). Ser. B 297-299.