

線型常微分方程式に関する Poincaré の仕事について

慶大 工 齋藤 利弥

§0. 複素領域における線型常微分方程式の global な理論に関する Poincaré の論文は次の三編である.

1. Sur les groupes des équations linéaires, Acta Math. t. 4 (1884), 201 ~ 311 (全集第2巻)
2. Mémoire sur les fonctions zétafuchsienues, Acta Math. t. 5 (1884), 269 ~ 278 (全集第2巻)
3. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes, J. de Math. t. 9 (1903), 139 ~ 212 (全集第3巻)

(この他に不確定特異点における解の漸近展開についての重要な論文が2編あるが, これは完全な local theory である.)

ここで紹介しようとするのは1の内容(の一部)である.

2, 3 は1で得られた結果を基礎として議論が展開されているので, 1が Poincaré の線型方程式の理論の土台であるとい

ってよいであろう。

§1. 論文 I は 20 節からなる。このうち重要なのは第 5 節以下なのであるが、順序として第 1 ～ 4 節についても簡単にふれておこう。

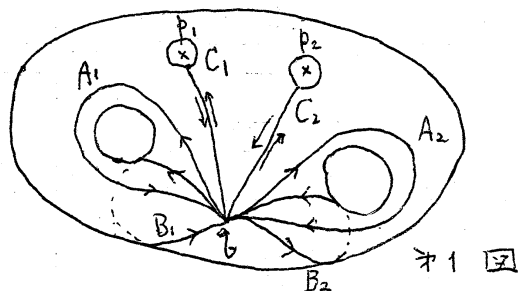
とりあつかわれてゐる方程式は単独常微分方程式

$$(1) \quad d^n v / dx^n + \varphi_1(x) \cdot d^{n-1} v / dx^{n-1} + \dots + \varphi_n(x) v = 0$$

であつて、 $\varphi_k(x)$ はすべて代数関数とする。第 1 ～ 4 節では $\varphi_1(x) \equiv 0$ で、 $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ が有理関数である場合について議論が進められてゐるが、ここではそのような条件をつけなゝことにする。

第 1 節では (1) の群、すなわちモノドロミー群の不変量について論じてゐる。ただし不変量とは (1) の基本解のえらび方に関係しない量、したがつて具体的にいへばモノドロミー行列の固有値だけで表わされる量のことである。

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が属する代数関数体のリーマン面を X 、その種数を g 、(1) の特異点を $p_1, \dots, p_m$ とする。 $q \in X$ を (1) の正則点として X 上に図のよ



ニ一行列をそれぞれ $a_1, e_1, \dots, a_g, e_g, c_1, \dots, c_m$ とすれば,
モノドロミ一群はこれら $2g+m$ 個の行列で生成される。し
かしこれ等の間には

$$a_1 e_1 a_1^{-1} e_1^{-1} \dots a_g e_g a_g^{-1} e_g^{-1} c_1 \dots c_m = I$$

のような関係が 1 つ成り立つので独立な生成元は $2g+m-1$
個、したがってモノドロミ一群を決定する独立なパラメータ
の数は $n^2(2g+m-1)$ 個である。さらに基本解のえらび
方に因する自由度をさしひくと (すなわちある基本解を基に
して得られるモノドロミ一群を G とすると、 G と $P^{-1}GP$
($P \in SL(n, \mathbb{C})$) とを同一視すると) 結局パラメータの数は
 $n^2(2g+m-1) - (n^2-1) = n^2(2g+m-2) + 1$ となる。

(1) フォックス型、すなわち特異点からすべて確定特異点な
らば $C_1, C_2, \dots, C_m$ の固有値は容易に計算される。すなわち、
 P_k における決定方程式の根を $\lambda_{kj} (j=1, \dots, n)$ とすれば
 $\exp(2\pi i \lambda_{kj})$ が C_k の固有値である。これで nm 個の不変量
が求められたことになる。ただしフォックスの関係式

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} = n(n-1)(g-1 + m/2)$$

が成り立つので、これ等のうち独立なものは $nm-1$
個で、これ等をさしひくことによりモノドロミ一群を決定す
るパラメータのうち未知のものは

$$n^2(2g+m-2) - nm + 2$$

である。 $g=0$, $n=2$, $m=3$ (すなわち超幾何微分方程式に reduce される場合) にはこれは 0 とするが, それ以外の場合はつねに正である。そして $C_1, \dots, C_m$ 以外のモノドロミ行列の不変量はこの個数だけ求められればモノドロミ群は決定される。不変量は基本解のとり方に関係しない量であるからモノドロミ行列自体よりは計算しやすい筈である。そこで Poincaré は不変量を求めることにより、モノドロミ群を定める方法を提案しているのであるが、もちろん決定的な解答が得られているわけではない。

第2節ではモノドロミ群の数値的計算法について述べている。なお今後(1)はつねにフックス型であるとしておく。

第3節では $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ は有理関数として、特異点の位置を固定したとき、モノドロミ行列が $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ の係数のどのような関数になるかを論じている。これについては後に Lappo-Danilevsky がくわしく調べているのでここでは省略する。

第4節では逆に、 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ の係数をモノドロミ行列の関数として見る立場をとりあげる。今度は特異点の位置をも動かして考えることにする。ただしリーマン面の birational automorphism によって互に移り合う方程式は同一のもつとみなす。

X 上には m 個の固定特異点をもつ n 階フックス型方程式が含

任意パラメータの数を c_{mn} とする.

X から m 個の点 ε をとり、たもつを X' とし、 X' の基本群の n 次行列によるモノドロミ表現の任意パラメータの数を γ_{mn} とする. c_{mn}, γ_{mn} は次の式で与えられる.

$$c_{mn} = \frac{1}{2} n^2 (m + 2g - 2) + \frac{1}{2} mn + m - \delta,$$

$$\gamma_{mn} = n^2 (2g + m - 2) + 1.$$

ただし $g=0$ のとき $\delta=3$, $g=1$ のとき $\delta=1$, $g \geq 2$ のとき $\delta=0$ である. この式から一般に $\gamma_{mn} > c_{mn}$ であることが通ちにわかるが、ただし $g=0$, $n=2$ のときには限り

$$c_{m2} = \gamma_{m2} = 4m - 7$$

となる. Poincaré はこの場合をとりあげ、このとき (1) の係数がモノドロミ群のパラメータの個数となることを示している.

§2. 本節から後が、この論文のもっとも重要な部分である. ここでは (1) の解の uniformization が論じられる. すなわち、適当な複素変数 z を用いて x , および (1) の解 v を

$$v' = v(z), \quad x = x(z)$$

のようにその 1 価解析関数として表わす方法を考えよ — というのがここでもとりあげられる問題である. Poincaré はまた次のように議論からスタートする.

G を フックス群, R を その基本領域とする. 基本円 (G に
よって不変な円) の内部の点を表わす複素数を z とし, $x(z)$
を G に属する フックス関数 — フックス群に属する保型関数
を フックス関数と云う — とし,

$$v_1 = \sqrt{dx/dz}, \quad v_2 = z \sqrt{dx/dz}$$

とおけば

$$\frac{1}{v_1} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \left(2 \frac{d^2 x}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} - 3 \left(\frac{d^2 x}{dz^2} \right)^2 \right) / 4 \left(\frac{dx}{dz} \right)^4$$

となるが, 簡単な計算により右辺はやはり G に属する フッ
クス関数であることがわかる. $x(z)$ が フックス関数であるか
ら, このことは上式の右辺が x の代数関数になることを示し
ている. そこでこの代数関数体を定義する多項式を $\psi(x, y)$

$= 0$ とすれば, 右辺は x, y の有理関数となる. それを

$\varphi(x, y)$ と書けば, v_1, v_2 は微分方程式

$$(2) \quad d^2 v / dx^2 = \varphi(x, y) v, \quad \psi(x, y) = 0,$$

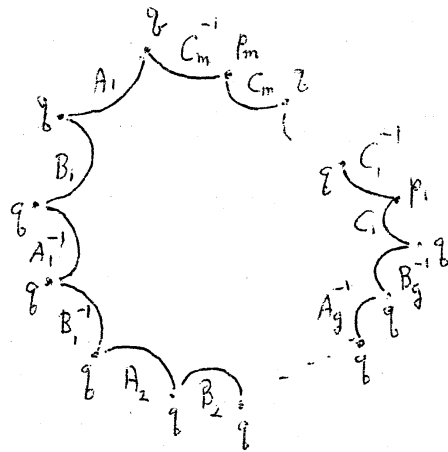
の 2 つの解であって, $z = v_2 / v_1$ となる.

しかし, 逆に (2) のような代数関数を係数とする 2 階線型
方程式が与えられたとしても, x がその解の比で フッ
クス関数になるとは限らない.

係数 $\varphi(x, y)$ の属する代数関数体のリーマン面を X , その
種数を g とし, X は g 個と同一ような路 A_k, B_k ($k=1,$

$\dots, g), C_j (j=1, \dots, m)$ をえかく. ところで今度は $p_1, \dots, p_m$ は (2) の特異点, q は (2) の正則点とする. また p_j における (2) の決定方程式の根の差を μ_j とする. 路 A_k, B_k, C_j に沿って X に cut を入れ, その結果生ずる単連結曲面を X' とし, (2) の 1 次独立な 2 つの解の比を z とし, その分枝を一つ定めるとそれは X' 上で 1 価正則で, しかも, $p \in X'$ に p における z の値を対応させることにより, X' から複素平面への holomorphic map が得られる. この写像による X' の像を R とする. z の z の 1 価関数であるため R は自分自身と overlap するような図形であってはいけぬ.

いまそのような overlap がないとすれば, R は $\mathbb{P}^2$ 図のような形をもつことがわかる. ここで q に対応する頂点の一つのサイクルをなし, そこにおける頂角の和は 2π , p_j に対応する頂点はいずれ自身から一つのサイクルで, そこでの頂角は $2\pi\mu_j$ である. したがって曲線多边形 R の辺の数は $4g+2m$, 頂角の和は $2\pi(1+\sum_{j=1}^m \mu_j)$ である.



$\mathbb{P}^2$ 図

z として別の分枝をとると, R 全体の 1 次分枝変換をうける. したがって z にそのすべての分枝をとりせると, 1 次分

数変換による R のコピー $R', R'', \dots$ が得られるが, x がその 1 価関数であるためにはこれらのコピーが互いに overlap していけないう。そのためには μ_j は整数の逆数であるか, または 0 でなければいけないう (このことは μ_j のまわりを一周する路に沿って x の解析接続を行なってみれば容易にわかる)。

μ_j がすべてこの条件を満たしているとき (2) は normal であるという。

x がその 1 価関数になっても, それがフックス関数になるとは限らないう。 R が $4g+2m$ 個の辺をもち, その頂角の和が $2\pi(1+\sum \mu_j)$ であつたから, R がフックス群の基本領域であるためには $2\pi(1+\sum \mu_j) < \pi(4g+2m-2)$, すなわち

$$(3) \quad \sum \mu_j < 2g+m-2$$

が成り立つ必要がある。

これが成り立たない第 1 の場合は

$$\sum \mu_j > 2g+m-2$$

となる時, これは rational case と呼ぶことにする。これが実現されるのは次の場合だけである。

$$g=0, m=3, \mu_1=\mu_2=1/2, \mu_3=1/n \quad (n \text{ は整数})$$

$$g=0, m=3, \mu_1=1/2, \mu_2=\mu_3=1/3$$

$$g=0, m=3, \mu_1=1/2, \mu_2=1/3, \mu_3=1/4$$

$$g=0, m=3, \mu_1=1/2, \mu_2=1/3, \mu_3=1/5$$

もう一つの場合は

$$\sum \mu_j = 2g + m - 2$$

となるときで、これを elliptic case とよぶ。これは次の場合
 しかない。

$$g = 1, m = 0,$$

$$g = 0, m = 3, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3,$$

$$g = 0, m = 3, \mu_1 = 1/2, \mu_2 = \mu_3 = 1/4,$$

$$g = 0, m = 3, \mu_1 = 1/2, \mu_2 = 1/3, \mu_3 = 1/6,$$

$$g = 0, m = 4, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1/2.$$

これから rational case, elliptic case はともに例外的な場合であることがわかる。今後この二つの case は除外しておく。

二つの normal な 2 階線型方程式があり、リーマン面の birational map によってその特異点お互に移り合い、しかも対応する特異点における決定方程式の根の差が等しいとき、それ等は同じ type に属するという。(2) の形の方程式では決定方程式の根の和がつかない値ともつかない値とえば P_j が代数関数 q の分岐点でも、無限遠点でもなければ、その二つの決定方程式の根の和は 1 に等しい — (このことは決定方程式の根が一致することと同等である。) さらに、 $\sum \mu_j < 2g + m - 2$ であるような type を Fuchsian type という。

$\nu_1, \dots, \nu_m$ を任意の正の整数として, p_j における決定方程式の根の差が $1/\nu_j k_j$ となるような 2 階線型方程式を考える. この方程式によつて定まる type は (2) の subordinate type という. この type の方程式の中には Fuchsian equation が存在すれば, その解の比を用いて (1) の解は uniformize できることは明らかであろう. したがつて (α) のかわりに (β) 任意に Fuchsian type を与えたとき, その subordinate type の中に Fuchsian equation を含むものが存在する. と証明してもよい.

いちばん極端な subordinate type はすべての ν_j が ∞ としたものである. すなわち (2) の形の方程式で決定方程式の根がどれも二重根となるものである. もしこの type の Fuchsian equation があれば, その解の比は $p_1, \dots, p_m$ に特異点をもつすべての線型方程式の解を uniformize する能力をもっている. この際特異点の中には不確定特異点があつてもかまわない.

§4. Poincaré は $n \geq 2$ 次の n の lemma を証明する.

Fundamental Lemma. Fuchsian type の中に含まれる Fuchsian equation の数は高々一つである. (ただしリーマン面の birational map で互に移り合う方程式は同一のもつとみなす.)

証明 一つの type が二つの Fuchsian equation を含んでゐたと

してそれ等の解が比 z と t とである。解を適当にえらぶことにより — すなわち z, t に適当な 1 次分岐変換を施すことにより、次の三つの条件を成り立たせることができる。

- 1° z, t の基本円はいずれも原点を中心とする単位円。
- 2° リーマン面 X 上の点 $p_1, \dots, p_m$ はそれぞれ $k_1-1, \dots, k_m-1$ 位の分岐点をもつ maximal covering surface $\tilde{X}$ とする。 $\tilde{X}$ 上の一点 p において z, t は同時に 0 となる。
- 3° $\tilde{X}$ 上の一点 q において $\arg z = \arg t$ 。

z, t の基本円の内部と $\tilde{X}$ とは一対一に対応しているから、 $\tilde{X}$ を媒介として z と t との間は一対一対応がつけられ、したがって z, t は互に他の 1 価関数となる。ゆえに t/z を z の関数とみなすとこれは 1 価解析関数である。 p_j における決定方程式の根の差が一致していること、(2) の 2 階方程式なのでその解の零点はすべて simple なことに注意すれば t/z は基本円 $|z| < 1$ において正則でしかも 0 になることはない。

$z \in C = \{z \mid |z| = r < 1\}$ に対しては明らかに $|t/z| < 1/r$ であるから最大値の原理により $|z| \leq r$ において $|t/z| < 1/r$ 。ここで $r \rightarrow 1$ とすると $|t/z| \leq 1$ が $|z| < 1$ において成り立つ。 t と z とを入れかえて考えると $|z/t| \leq 1$ が得られるから $|z| = |t|$ 。これと 3° とから $z = t$, すなわちこの方

程式の解の比が一致してゐるから、一方の解は他方の解に一定の関数を乗いたものになつてゐる。ところがこれ等二つの方程式がいずれも dy/dx を含んでゐることに注意すれば、この関数は定数に限る。したがつてこれ等二つの方程式は一致してしまふことがわかり証明が終る。

次の lemma は大へん難解で、私にはよく理解できない。以下に述べるのはそれを我流に解讀したものである。

パラメーター t に連続に依存するフックス群の族 $\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ があるとし、 G_t の基本領域を R_t 、またその種数は t に関係なく一定の値 g であるとする。 $t \rightarrow 0$ のとき R_t のいくつかの辺が限りなく小さくなつて、 $t=0$ に到つて遂に消滅したとしよう。このとき R_0 と R_t ($0 < t \leq 1$) の limiting polygon とする。 G_0 の種数もやはり g であると仮定しよう。

G_t から決まるリーマン面を X_t 、また G_t からつくられる Fuchsian equation を (E_t) とする。

Second Lemma. $t \rightarrow 0$ のとき X_t の moduli は X_0 の moduli に収束し、 (E_t) の type は (E_0) の type に収束する。

Lemma の後半はやや曖昧な一方である。type の集合の中に位相がはいつてゐないから収束という概念が定義できないはずだからである。いずれは type の集合の中に位相を入ねなければならぬのであるが、ここではそれを次のように

意味に理解してよく = といえる。

G_t からつくられる Fuchsian equation を

$$d^2v/dx^2 = p_t v$$

とする。この方程式は G_t に属するフックス関数 x を一つ決める。これにより出来るのであるから、 G_t に属するこのような方程式は無数に存在する。しかしそれ等はすべて bi-rationally equivalent になっている。その異なる無数の方程式の中から (各 t のとき) 適当な方程式を選んてくると、 $t \rightarrow 0$ のとき $p_t \rightarrow p_0$ となる。これが Second Lemma の後半の部分の意味である。

R_0 は R_t ($0 < t \leq 1$) よりも辺の数が少なく、しかも種数は同じだから、 (E_0) の特異点の数は (E_t) ($t \neq 0$) の特異点の数より当然少なくなっている。したがって $t \rightarrow 0$ のとき (E_t) の特異点のいくつかの間には合流が起きていることになる。

証明は大体次のような形で行われる。 G_t に属するフックス関数 x, y をとるとその間には $\psi(x, y, t) = 0$ という関係が得られる。ただし ψ は x, y に属する多項式でその係数は t の関数である。一方 $\psi = 0$ のリーマン面の moduli はこれらの係数から解析的に決まってしまうものだから、この係数がすべて $0 \leq t \leq 1$ において t の連続な関数ならば lemma の最初の部分は解決する。これにはフックス関数 x, y が t の

連続関数になるようにとればよい。

次に G_t の フックス関数 x を一つえらんで Fuchsian equation (E_t) をつくると, (E_t) の右辺の係数は x の導関数の有理式である。したがって x が t について $0 \leq t \leq 1$ において連続ならば $\varphi_t \rightarrow \varphi_0$ であって, lemma の後半の証明ができる。

したがって問題は, G_t の フックス関数が t に連続に依存することの証明である。ところで G_t の フックス関数を二つえらおとそれ以外の フックス関数はこれ等の有理関数となる。したがって二つの独立な フックス関数を任意に定めて, それ等の t に連続に依存することを示せばよい。

さて Poincaré の論文 "Sur les fonctions fuchsienues, Acta Math. t. I (1882)" で証明しているように, われわれはテータ フックス級数を二つつくることができ, それを比として フックス関数を作ることができる。すべての フックス関数の テータ フックス級数から作られるかどうかはわからないが, 二つの独立な フックス関数と テータ フックス級数を用いてつくることができる。したがって, 問題は G_t の テータ フックス級数が t に連続に依存して, $t \rightarrow 0$ と G_0 の テータ フックス級数に収束することの証明にしほられる。Poincaré はその証明を実際に与えているのであろうが, その証明ははかなり複雑なのでここでは省略することにする。

§ 5. 以上の結果を用いて Poincaré は symmetric type とよばれる特殊な type について (β) を証明する. 実はその後で, 一般の type について (α) を証明しているのだから, この部分だけでなくもよいわけであるが, そんなことは無頓着にできたことは片の端から書いている所からいっても Poincaré 流である.

symmetric type とは方程式

$$(4) \quad d^2v/dx^2 = q(x)v$$

にある q が有理函数で, その特異点が一々の円周上にのっているものをいう. ここでは特に特異点の実数であるとして議論する. (4) の subordinate type としては (§3 の記号を使えば) ν_j がすべて ∞ , (したがって特異点における決定方程式がすべて二重根になっているものをえらぶ, そこで便宜上, (4) がいよいよそのような方程式であるとし, この方程式が定める type がつねに Fuchsian equation を含むことを証明する.

まず特異点の数を s とする. 一般性を失うことなく s を $0, 1, \infty$ とする. とこの s がこの type の方程式の中には Fuchsian equation が含まれていることがすでにわかっている.

§(5) を周期 ω, ω' の Weierstrass の $\wp$ 函数とし

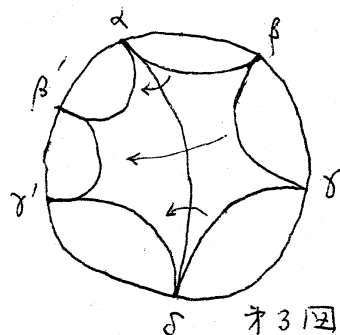
$$\wp(\omega) = e_1, \quad \wp(\omega + \omega') = e_2, \quad \wp(\omega') = e_3,$$

$$\omega'/\omega = \tau, \quad (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3) = \lambda$$

とあけは λ は τ の フラクショナル係数となり, その フラクショナル群 G は $\tau \rightarrow \tau/(-2\tau+1), \tau \rightarrow \tau-2$ から生成される, modular group の部分群である. G からつくられる Fuchsian equation が上述の type に属することはいくよく知られている.

次に特異点の数が 4 の場合, それを $0, 1, a, \infty$ ($1 < a < \infty$) とする. この場合 type を決定するのはパラメータ a であるから, この type を a と書いて a で代表させると, 開区間 $(1, \infty)$ はこの種の方程式を決める type 全体の集合とみなすことができる. これを S で表わそう.

次に基本円を一つ定め, その上に 4 点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を次の図のようにとる. 基本円と直交する円弧 $\widehat{\alpha\beta}, \widehat{\beta\gamma}, \widehat{\gamma\delta}, \widehat{\alpha\delta}$ を図のようになかへ.



β, γ の $\widehat{\alpha\delta}$ に関する反転を β', γ' とすれば β', γ' は基本円上の点である. 基本円と直交する円弧 $\widehat{\alpha\beta'}, \widehat{\beta'\gamma'}, \widehat{\gamma'\delta}$ をさうになかへ.

基本円に直交する円弧を 辺 とする 6 辺形 $\alpha\beta\gamma\delta\gamma'\beta'$ を基本領域とし, 基本円を動かさないうちの 1 次分岐変換

$$\widehat{\alpha\beta} \rightarrow \widehat{\alpha\beta'}, \quad \widehat{\beta\gamma} \rightarrow \widehat{\beta'\gamma'}, \quad \widehat{\gamma\delta} \rightarrow \widehat{\gamma'\delta}$$

によって生成される フラクショナル群を G_a とする (a は変化するパラメータと考える).

G_γ に属する フックス関数 $x=f(z)$ を一つとる. 必要ならば f に 1 次分岐変換を施すことにより

$$f(\alpha)=0, \quad f(\beta)=1, \quad f(\delta)=\infty$$

とすることができる. このとき $f(\gamma)=c$ とおけば $1 < c < \infty$ とする.

G_γ の種数は明かには 0 であるから, G_γ に属する フックス関数はすべて x の有理関数になる. しなから, x を用いて G_γ に属する Fuchsian equation

$$(E_\gamma) \quad d^2v/dx^2 = \varphi_\gamma(x)v$$

をつくれば φ_γ は x の有理関数となり, その特異点 $0, 1, c, \infty$ ($1 < c < \infty$) で, 特異点における決定方程式はすべて二重根をもつ. するわけ前に述べた書き方から (たか之は), (E_γ) の type は Δ_c である. $c=a$ となるような γ がえられれば (E_γ) は type Δ_a に含まれる Fuchsian equation で, 証明は終了ことになる.

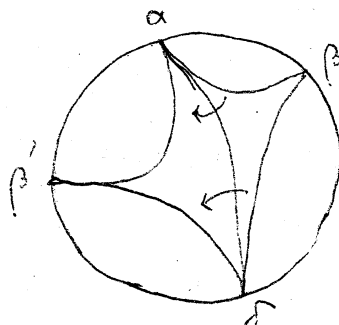
γ が $\widehat{\beta\delta}$ 上を動くとき, 方程式 (E_γ) の解の集合を Γ とし, これは $\widehat{\beta\delta}$ と同一視する. 対応 $\gamma \rightarrow f(\gamma)$ により Γ から type の集合 S への写像を定義する. この写像が surjection であることは示せば $f(\gamma)=a$ となる $\gamma \in \Gamma$ の存在がえらるから (β) は証明されたことになる. ところが f は連続であるから, もし

$$\lim_{\gamma \rightarrow \beta} f(\gamma) = 1, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \delta} f(\gamma) = \infty$$

からこれより $f: \Gamma \rightarrow S$ は surjection となり証明が完結する。

G_γ の生成元は明らかに γ の連続変数であるから、 G_γ が γ に連続的に依存することは明らかである。そこで $\gamma \rightarrow \beta$ とすると $\widehat{\beta\gamma}$, $\widehat{\beta'\gamma}$ は消滅して

第4図のような limiting polygon $\alpha\beta\delta\beta'$ が生ずる。これは基本領域に $\widehat{\alpha\beta} \rightarrow \widehat{\alpha\beta'}$, $\widehat{\beta\delta} \rightarrow \widehat{\beta'\delta}$



を生成元とする Γ の群の種数は

第4図から明らかであるように 0 である

から、 $\gamma \rightarrow \beta$ のとき G_γ の種数は変化しない。したがって

Second Lemma により、 (E_γ) の特異点の limiting polygon が定める Γ の群から作られる Fuchsian equation の特異点に収束する。よって z は 0, 1, ∞ であるから $\lim_{\gamma \rightarrow \beta} f(\gamma) = 1$ 。

$\gamma \rightarrow \delta$ として同じ議論をくりかえせば $\lim_{\gamma \rightarrow \delta} f(\gamma) = \infty$ となり、これで特異点の数が 4 の場合は解決する。

Poincaré はさらに特異点の数が 5 の場合についてと同様の証明を行なってみせ、証明の方法は特異点の数が $n < 7$ であっても同じであると主張する。これは symmetric type に対する (β) の証明である。

§6. 前節で示した symmetric type に對する証明を手のかかり
として, Poincaré は (α) を証明する方法として continuity
method なるものを提唱する. ところがこの部分の Poincaré
の説明はきかぬてわかりにくく, 私はそれに多くの蛇足を
付加して次のように解釋してみた.

symmetric type についての証明をありかえってみると, その
要旨は Γ の群の集合 Γ から type の集合 S への写像 f が
surjection であることを示す所にある. そのためにわれわれ
は $\partial\Gamma \rightarrow \partial S$ であることを示し, これと f の連続性から
 f が surjection であることを結論した. これはいわゆる topo-
logical な手法である. そのように topological な手法による
写像の surjectivity を証明し, それによって存在定理を証明しよ
うというのが Poincaré-Klein の continuity method である.

以下に述べるのが continuity method による (α) の証明 (は
し物) である.

Fuchsian type の方程式 $\sigma \Rightarrow$ 与えられるとし, それを

$$(5) \quad d^2v/dx^2 = \varphi(x, y)v, \quad \psi(x, y) = 0,$$

$$(6) \quad d^2v/dx^2 = \varphi_1(x, y)v, \quad \psi_1(x, y) = 0,$$

とする. 次の三つの条件の成り立つ $\Rightarrow$ (5) の決める type
と (6) の決める type とは同一の class に属するということ.

i) $\psi(x, y) = 0$ のリーマン面と, $\psi_1(x, y) = 0$ のリーマン面と

は同じ種数をもつ。それを g としよう。

i) (5) と (6) とは同数の特異点をもつ。それ等それぞれ

$$p_1, \dots, p_m; \quad q_1, \dots, q_m$$

としよう。

iii) p_k における (5) の決定方程式の根と, q_k における (6) の決定方程式の根とは一致する。

Fuchsian type $\mathcal{M}_0$ があって, それが Fuchsian equation を含むことを証明しようとするならば, まず $\mathcal{M}_0$ と同じ class に属する type 全体の集合を考え, それを S とする。

S の一員, 異なる g 一つの type を指定するのに必要なパラメータの数を計算してみよう。簡単のために $g \geq 2$ の場合だけを考える。その type の方程式をかりに (5) としよう。

種数 g の 1 - ∞ 面上に m 個の特異点をもつ ω 型方程式

$$d^n v / dx^n + p_1 \cdot d^{n-1} v / dx^{n-1} + \dots + q_n v = 0$$

の各係数 q_k はそれぞれ (特異点の位置を固定したとき)

$$n(m+2g-2) + 1 - g$$

だけの任意定数を含むことがわかってゐる。われわれの場合

$q_1 \equiv 0$ にとっているから, (5) の方程式の含む任意定数の数は q_2 の含む任意定数の数 $2m+3g-3$ に特異点の個数 m を加えた $3m+3g-3$ である。

さらに種数 g のリーマン面全体の片から birationally equivalent な class を一つ指定するには $3g-3$ 個の moduli を必要とする. この等式の数を加えると $3m+6g-6$ であるから, S は $\mathbb{C}^{3m+6g-6}$ の部分集合となる.

一方, 各特異点では決定方程式の根が指定されており, しかも (5) のように dv/dx が含まれている方程式では, 決定方程式の根の和は決まった値をもっているので, これは各特異点ごとに等式が一つずつ課せられていることは他ならない. ゆえに上記 $3m+6g-6$ 個のパラメータ空間に m 個の等式が成り立たねばならない.

この他にいくつかの不等式が必要である. それは特異点の合流して個数が減らなれたための条件と, 係数の種数が g より小さくならなれたための条件を表わす不等式である.

すなわち S は $\mathbb{C}^{3m+6g-6}$ の中で m 個の等式と, いくつかの不等式を満たす点の全体である. したがって境界をもつ $2m+6g-6$ 次元の複素多様体とみなしてよいであろう.

次にフックス群 G で, それから導かれる Fuchsian equation の type が S に含まれるようなものの全体を Γ とする. この基本領域は多角形のような形にとることができる. こゝで A_k に対応する辺を A_k^{-1} に対応する辺に移す変換を α_k , B_k に対応する辺を B_k^{-1} に対応する辺に移す変換を β_k , C_j に対応する辺を C_j^{-1}

に対応する辺に移す変換を γ_j とすれば G は $2g+m$ 個の変換

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_m$$

で生成される。ただしこれ等の間には関係

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \gamma_1 \dots \gamma_m = I$$

が成り立つので独立なものは $2g+m-1$ 個、したがって G を指定するパラメータの数は $3(2g+m-1)$ であるが、1次分級変換で共通なものは同一視するから、その自由度をさし引けば、 $3m+6g-6$ とする。すなわち Γ は $\mathbb{C}^{3m+6g-6}$ の部分集合である。

よってそれぞれ γ_j の型では決定方程式の根の差を $1/\nu_j$ とすれば ν_j は整数または ∞ であり、したがって $\nu_j < \infty$ のときは $\gamma_j^{\nu_j} = I$ という関係が成り立つ。 $\nu_j = \infty$ のときには γ_j は parabolic な変換でなければならぬから、変換の係数の間にはやはり一つの条件がつく。すなわち上記の $3m+6g-6$ 個のパラメータは m 個の等式を満たさねばならぬ。

この他に、基本領域の辺がつかわれて埋まる数が減ることを禁ずるためのいくつかの不等式が必要である。

以上のことから Γ は $2m+6g-6$ 次元、境界のある多様体とみなしてよいであろう。これを S と Γ の次元が等しいことがわかった。この次元数を d と書くことにしよう。

$\partial\Gamma$ は Γ を定義する不等式のうちのいくつかを等式でおきかえて得られる, この等式は解析的関係式であるから, $\partial\Gamma$ の複素次元数は高々 $d-1$ である. したがって $\dim(\cdot)$ によって実次元数を表わせば

$$\dim(\partial\Gamma) \leq 2d-2.$$

なお $\partial\Gamma$ に属するフックス群は, Γ に属するフックス群の基本領域のいくつかの辺がつらなれたものであるから, Second Lemma の所記述した limiting polygon である. したがって

- 種数が g より小さいか, または
- それから作られる Fuchsian equation の特異点の数が m より少ない.

フックス群に, それから作られる Fuchsian equation の type を対応させるとにより写像 $f: \Gamma \rightarrow S$ が得られる. $f(\Gamma) = S$ を証明すればよい.

Fundamental Lemma によれば Γ の Type に含まれる Fuchsian equation の数は高々 1 であるから f は injective である. また f, f^{-1} がともに holomorphic map であることはほぼ確からしいから, Γ と $f(\Gamma)$ とは同相である.

この辺の所はまことに怪しげな議論であるが, Poincaré の論文にこういう怪しげな話が書いてあるわけではない. 実とすると彼はこの種の議論を一切してゐないのである. 彼はた

た, いくつかの example をあげて, それによって彼の主張の正しいことを例示しているだけである. これは Poincaré の論文の特徴の一つである.

さて $S - f(\Gamma) = S'$ とする. $f(\Gamma)$ はもちろん S の内点を含む. S は多様体であるから S' もまた内点を含む. $f(\Gamma)$ と S' の境界の実次元は $2d-1$ となる. ところがそれは一方 $f(\partial\Gamma)$ であり, $\dim(\partial\Gamma) \leq 2d-2$. f は同相写像であるからこれは矛盾である. ゆえに S' は内点を含まない. したがって, $\lambda \in S'$ とすれば $\lambda_k \rightarrow \lambda$ となる列 $\{\lambda_k\}$ が $f(\Gamma)$ の中にとることかできる. $f^{-1}(\lambda_k) = \gamma_k$ とし, $\gamma_k \rightarrow \gamma \in \Gamma$ ならば $f(\gamma) = \lambda \in f(\Gamma)$ となり, 矛盾であるから $\gamma \in \partial\Gamma$. したがって Second Lemma により $f(\gamma) = \lambda$. ところが $\gamma \in \partial\Gamma$ ならばそれから作られる Fuchsian equation に對し a) または b) が成り立つから $\lambda \notin S$. ゆえに $S' = \emptyset$ となり, これを continuity method が完結する.

論文 1 には, またこの先がある. (1) と (2) の形
の方程式, 解の比を用いて uniformize すると, 方程式 (2) を実際につくるにはどうすればよいかという議論, また $v = v(z)$, $\lambda = \lambda(z)$ のように uniformize すると, $v(z)$ を不変にする G の部分群に関する議論等がなされている.

論文2は、論文1に直結した内容をもっている。そこでは uniformize された解 $y(z)$ の、 z 平面上の基本円の内部全体で使えるような表示式を求める問題がとり上げられる。ゼータフックス関数とよばれる新しいタイプの関数がここに登場する。この関数は後に Weil の論文 "Généralisation des fonctions abéliennes, Journ. de Math. 17 (1938)" の中で重要な役割を演ずる。

論文3ではモノドロミ一群が有限群となる場合、したがって (1) の解が x の代数的関数となる場合が論いられている。しかし私のおぼつかない解説も、そろそろ息が切れてきたのでこの辺で終りにしようと思う。

Poincaré の論文の面白さは、このような解説文を讀んだのでは実はよくわからないう。彼独特の、時には冗長で、時には混乱し、時には論理が飛躍する記述の中から、彼の思想の流れをさぐりあてたけり手間をかけるないと、その本当の魅力にはふくれないうように私は思えるのである。

付記 1. L. R. Ford の著書 Automorphic Functions の中に $g=0$ の場合に対する (2) の証明が与えられているようである。ただしそれは continuity method を使ったものでない。

2. この解説の中で用いた、代数的関数を係数とするフックス

型方程式に対するフックスの関係式や、その含み任意定数の個数 (c_{mn} と書いたもの) 等は筆者自身に計算したものであることを最後に記して、ささやかな自己宣伝を試みておく。