

次数 3 の可移置換群の分類について

宮本 泉 *

IZUMI MIYAMOTO

山梨大学

UNIVERSITY OF YAMANASHI

1 置換群

群の計算は、数式処理ソフトウェアパッケージ GAP を使用

一部の計算で、京都大学 学術情報メディアセンタースーパーコンピュータシステムを使用

$Sym(\Omega)$ / $SymmetricGroup(\Omega)$: 集合 Ω 上の対称群

$Sym(n)$ / $SymmetricGroup(n)$: n 次対称群 $\Leftarrow \Omega = \{1, 2, \dots, n\}$

群 G は Ω 上の置換群 $\Leftarrow G$ は $Sym(\Omega)$ の部分群

$g \in G$ の $i \in \Omega$ への作用 $g : i \rightarrow i^g$

$\Leftarrow \Omega = \{1^g | g \in G\}$

$\Leftarrow$ 任意の $i \in \Omega$ に対して、 $i = 1^g$ となる $g \in G$ が存在する。

GAP による置換群のデータ n 次の TransitiveGroup と PrimitiveGroup の同型類の個数 ($20 \leq n \leq 32$)

n	NrTransitiveGroups(n)	NrPrimitiveGroups(n)
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	7	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	8	8
30	5712	4
31	12	12
32	2801324	7

Primitive な群 $\Leftarrow$ 可移な群で、1 点固定部分群 G_1 が G の極大部分群固定部分群 $G_i = \{g \in G | i^g = i\}$:
点 i の固定部分群 $\subseteq G$, $Stabilizer(G, i)$

可移な群の分類の現状 30 次以下 : 10 年以上前、確認に時間をかけている。Hulpke

*miyamoto@yamanashi.ac.jp

32 次 : Cannon-Holt 2008 年 12 月、確認 2011 年 (Magma のデータ)
 32 次の個数が多すぎて、Magma の通常の組込みデータにはできない。
 それで、分類はここで止まっている。
 33、34、35 次は、これまでの方法で簡単であろう。
 36 次は、それなりに、...

分類に必要とされる関数は、GAP システムに組込まれている。

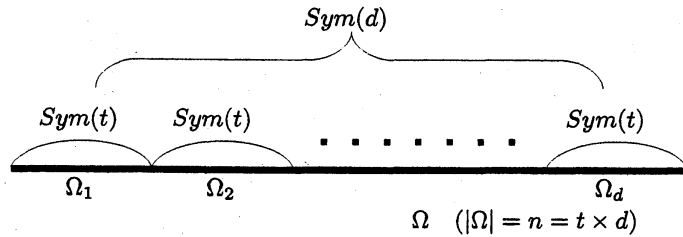
(本研究集会 2008)

これらを使って、分かり易く分類したい。30 次以下の確認も含めて。

Primitive な群の分類 GAP のデータ 2499 次まで ver4.5.6

Magma のデータ 4095 次まで ver2 19-2

Primitive ではない群 $\Rightarrow$ ブロックシステムをもつ



$$Sym(t) \wr Sym(d) = \text{WreathProduct}(Sym(t), Sym(d))$$

$$\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_d\} : G \text{ のブロックシステム}$$

$$\Rightarrow G \subseteq W = Sym(\Omega_1) \wr Sym(d)$$

1 つのブロックを集合として固定する部分群 $K = \{k \in G \mid i^k \in \Omega_1 \text{ for all } i \in \Omega_1\}$

$$\Rightarrow G_1 \subsetneq K \subsetneq G$$

$$\Rightarrow \{1^k \mid k \in K\} = \Omega_1$$

orbit

$\{i^k \mid k \in K\} \subseteq \Omega$: Ω の点 i を含む K の orbit

(ブロックなどの) 集合の固定部分群

$G_\Delta = \{g \in G \mid \Delta^g = \Delta\}$: 部分集合 $\Delta (\subseteq \Omega)$ の固定部分群 (as set)

$G_\Delta = \{g \in G \mid \Delta^g = \Delta\}$: 部分集合 $\Delta (\subseteq \Omega)$ の固定部分群 (pointwise)

【例】 $G_{\{1,2\}}, G_{1,2} = G_{2,1},$

$\text{Stabilizer}(G, [1, 2], \text{OnSets}), \text{Stabilizer}(G, [1, 2], \text{OnTuples})$

置換の集合や順序対への作用

部分集合 $\Delta = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \Omega$ に対して $\Delta^g = \{i_1^g, i_2^g, \dots, i_r^g\}$

順序対 $\underline{\Delta} = (i_1, i_2, \dots, i_r), (i_j \in \Omega)$ に対して $\underline{\Delta}^g = (i_1^g, i_2^g, \dots, i_r^g)$

G のブロックシステム上への作用 $\bar{G}$

$\text{hom} := \text{ActionHomomorphism}(G, [\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_d], \text{OnSets})$

$\Rightarrow \bar{G} = \text{Image}(\text{hom}) \subseteq Sym(d)$ 1 つのブロック上への作用 $\Rightarrow$ 置換の作用範囲の制限 $\Delta^g = \Delta$ のとき、

$\text{RestrictedPerm}(g, \Delta)$

$\Delta^H = \Delta \iff \Delta^h = \Delta \text{ for all } h \in H$ のときは、 H^Δ

$\Delta = \Omega_1, H = G_\Delta$ とすると、

$(|\Delta| = t, |\Omega|/|\Delta| = d) \Rightarrow H^\Delta \subseteq Sym(t), \bar{G} \subseteq Sym(d)$

$$G \subseteq \text{WreathProduct}(H^\Delta, \bar{G}) \subseteq \text{WreathProduct}(\text{Sym}(t), \text{Sym}(d))$$

固定部分群たちの関係 (共役)

$$i^g = j \implies G_i^g = \{g^{-1}kg | k \in G_i\} = G_j$$

$$\Omega_i^g = \Omega_j \implies G_{\Omega_i}^g = \{g^{-1}kg | k \in G_{\Omega_i}\} = G_{\Omega_j}$$

2 置換群の同型類

置換群の同型類 = $\text{Sym}(n)$ において共役な群の類

$g \in G$ による共役 (conjugate)

$$h^g = g^{-1}hg$$

$$H^g = g^{-1}Hg = \{h^g | h \in H\}$$

$G, H : \text{Sym}(n)$ の部分群が、置換群として同型

$\iff G$ と H は $\text{Sym}(n)$ で共役

$\iff G^k = H$ となる $k \in \text{Sym}(n)$ が存在する。← 本研究集会 2009 他

$\text{IsConjugate}(\text{Sym}(n), G, H)$, $\text{RepresentativeAction}(\text{Sym}(n), G, H)$

正規部分群

すべての $g \in G$ に対して、 $N^g = N$ が成立するか? $\implies \text{IsNormal}(G, N)$

もし、群 $N \subseteq G \implies N$ は G の正規部分群

正規化群

$\text{Normalizer}(G, H) = \{g \in G | H^g = H\} \subseteq G$ ← 本研究集会 2011 他

Magma

2011 年末、v2-18 で、正規化群と部分群の共役計算は、飛躍的に高速化された。

GAP

2012 年、ver4.5 にバージョンアップしたが、正規化群および部分群の共役計算に関しては、微妙。

$\implies$ 次数 30 程度では、Magma ならスムーズに計算、GAP では、時間のかかる場合も存在。

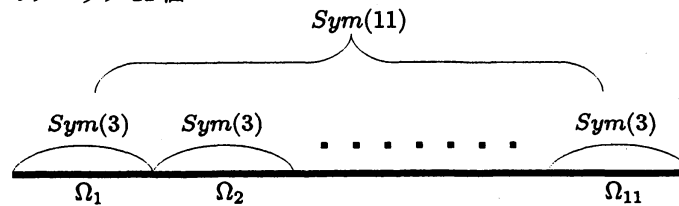
置換群の計算

GAP では、置換群の分類に使う関数がそろっている。

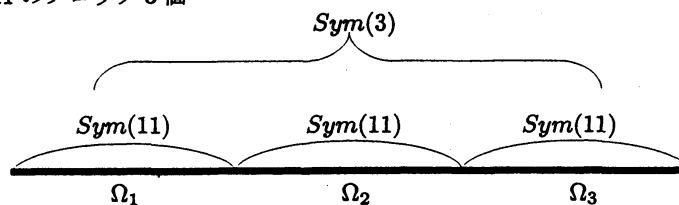
Magma では、素材となる関数から作る必要がある。(素材となる関数がなかなか見つからない。)

3 33 次の置換群のブロック構造

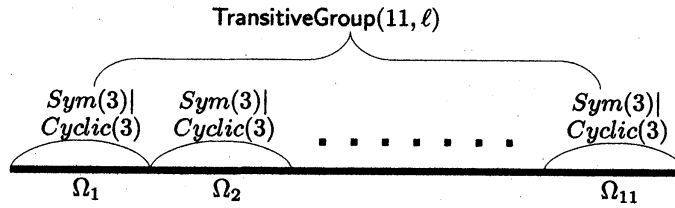
サイズ 3 のブロック 11 個



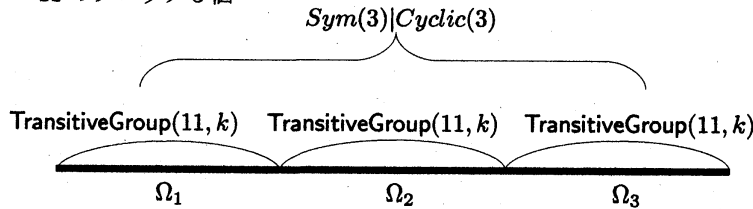
サイズ 11 のブロック 3 個



33 次の置換群のブロック構造
サイズ 3 のブロック 11 個



サイズ 11 のブロック 3 個



場合分け

G の 1 つのブロックを固定する部分群のブロック内での作用が
可解 (Solvable)

ブロックサイズが 3

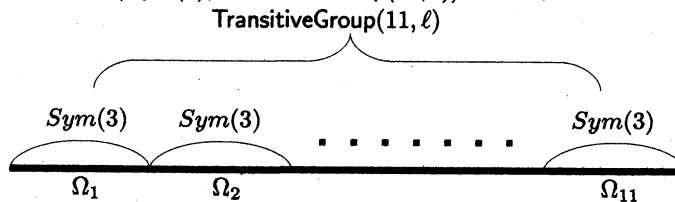
ブロックサイズが 11、かつ、 $\text{TransitiveGroup}(11, k)$, ($1 \leq k \leq 4$)

非可解

ブロックサイズが 11、かつ、 $\text{TransitiveGroup}(11, k)$, ($5 \leq k \leq 8$)

3.1 ブロック内での作用が可解な場合

$G \subseteq \text{WreathProduct}(\text{Sym}(3), \text{TransitiveGroup}(11, \ell))$ とする。



部分群 $K \subseteq G$ で、次の条件を満たすものすべてを求める。

$\bar{K} = \bar{G} = \text{TransitiveGroup}(11, \ell)$, $K_{\Omega_1}^{\Omega_1} = G_{\Omega_1}^{\Omega_1} = \text{Sym}(3)|\text{Cyclic}(3)$

$\Rightarrow G$ は $\text{Sym}(3)^{11}$ に作用する ($G \subseteq \text{Normalizer}(\text{Sym}(33), \text{Sym}(3)^{11})$)

$\Rightarrow G$ は $\text{ElementaryAbelianSeries}(\text{Sym}(3)) = [23, 3, 1]$ の $\text{NormalClosure}(G, -)$ に作用する。 ($2 = \text{Cyclic}(2)$, $23 = \text{Sym}(3)$)

$\Rightarrow G$ は $2^{11}3^{11}/3^{11} \cong 2^{11}$, 3^{11} に作用する。

$\Rightarrow$ まず、 G の $2^{11} \cong 2^{11}3^{11}/3^{11}$ への作用の不変部分群を求める。

$\Rightarrow H \subseteq G$ で、 $\bar{H} = \text{TransitiveGroup}(11, \ell)$, $H_{\Omega_1}^{\Omega_1} = G_{\Omega_1}^{\Omega_1}$, を満たす H では、 $\text{Intersection}(H, \text{Sym}(3)^{11})$ は、上で求めた不変部分群の 1 つ。

$\Rightarrow$ 次に、 H の 3^{11} への作用の不変部分群を求める。

$\Rightarrow K \subseteq H$ で、 $\bar{K} = \text{TransitiveGroup}(11, \ell)$, $K_{\Omega_1} = \text{Sym}(3)|\text{Cyclic}(3)$, ならば、 $\text{Intersection}(K, \text{Sym}(3)^{11})$ は、上で求めた不変部分群の 1 つ。

GAP の関数 (2008 年、本研究集会) $\text{hom} := \text{NaturalHomomorphismByNormalSubgroup}(G, 3^{11})$;

```

 $\Rightarrow \text{Image}(\text{hom}, \text{Sym}(3)^{11}) \cong 2^{11}$ 
conj := List(GeneratorOfGroup(Image(hom, G)), u ->
    ConjugatorIsomorphism(Image(hom, Sym(3)^{11}), u);
InvariantSubgroupsElementaryAbelianGroup(Image(hom, Sym(3)^{11}), conj);
ComplementClasses(Image(hom, G)/inv, Image(hom, Sym(3)^{11})/inv)
 $\Rightarrow H \cap \text{Sym}(3)^{11} = \text{inv}3^{11} \subset 2^{11}3^{11}$ 

```

計算が困難な場合

(ブロック内への作用が solvable なとき)

- 不変部分群が、 $|\text{inv}| = 2^5$ or 2^6 (次元が 2^{11} の半分くらい) のときの、Complementclass... 本質的に困難、メモリ不足も。
- 不変部分群が、 $|\text{inv}| = 2^{10}$ (次元が全体 -1) のときの、Complementclass
- 2^{11} の処理が終わって、 3^{11} に進んだとき。

- NaturalHomomorphismByNormalSubgroup は、メモリを大量に使うときがある。... なるべく、ActionHomomorphism を使う。 $G/3^{11} = \text{ActionHomomorphism}(G, \text{RightCosets}(G, L), \text{OnRight})$

$L = \text{ClosureGroup}(3^{11}, G_{\Omega_1}) \Rightarrow G/L$ は置換群になり、次数 22

その後、不変部分群 $\text{inv} \subset 2^{11}3^{11}/3^{11}$ で、NaturalHomomorphismByNormalSubgroup(*, inv) が必要

3.2 ブロック内での作用が非可解な場合

```

L = TransitiveGroup(11, k) を G の 1 つのブロック内での作用とする
L2 := SubdirectProducts(L, L); (Sym(22) において、共役群を除外する)
L3 := List(L2, u -> SubdirectProducts(u, L))
(Sym(33) において、共役群を除外する)

```

(以前の本研究集会では、可移な群の共役群計算)

```
N3 := List(Concatenation(L3), u -> Normalizer(Sym(33), u))
```

← 本研究集会 2011

正規化群が可移な場合のみ選択

SubdirectProducts は、前もって計算してファイルにしておく。

そのとき、 L はパーフェクト ($\Leftrightarrow L = \text{DerivedSubgroup}(L)$) のときのみを計算、 $\text{DerivedSubgroup}(H) = L$ となる H は、Normalizer 計算で処理

ブロック内での作用が非可解

D : SubdirectProducts で得られた群

```
N := Normalizer(Sym(33), D)
```

```
acthom := ActionHomomorphism(N, [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3], OnSets)
```

```
 $\Rightarrow \text{Image}(\text{acthom}) \subseteq \text{Sym}(3)$ 
```

```
K := Kernel(hom)  $\supseteq D$ 
```

```
 $\Rightarrow N_0/K = \text{Sym}(3)|\text{Cyclic}(3)$  となる  $N_0 \subseteq N$  を選択
```

```
hom := NaturalHomomorphismByNormalSubgroup(N, D)
```

$\Rightarrow \text{Image}(\text{hom}, K)$ は $\text{Image}(\text{hom})$ の可解な正規部分群

$\Rightarrow K/D$ は可解、ただし、 $D = \text{Kernel}(\text{hom})$ が成立

以上、まとめて、

N/D と可解な K/D に、ブロック内での作用が可解な場合の方法を適用

4 アソシエーションスキームの分類の利用

A : アソシエーションスキーム

$\text{Aut}(A)$: その自己同型群

可移な群 G の作るアソシエーションスキーム

$\Rightarrow G$ の $\Omega^2 = \{(i, j) | i, j \in \Omega\}$ への作用の orbit 全体 $\text{Orbits}(G, \Omega^2, \text{OnTuples})$

$\text{Aut}(A) = \text{TwoClosure}(G)$

$\Leftrightarrow$ The largest group $\subseteq \text{Sym}(n)$ which has the same orbits on Ω^2 as G has.

アソシエーションスキームの分類

次数 30 までと、32、33、34 は分類済

5 計算結果

33 次 162 個 計算時間 25 分 最長計算時間 20 分

34 次 102 個 計算時間 3 分 最長計算時間 1.6 分

本報告作成時点で、同じプログラムを、27、28、30 次で動かしているが、メモリ容量オーバーで、計算できない場合がある。そのための改良を続けているが、残念ながら、バグが残っている。現時点で、33 次、34 次で、下表の個数の群が得られている。

n	$\text{NrTransitiveGroups}(n)$	$\text{NrPrimitiveGroups}(n)$
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	7	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	8	8
30	5712	4
31	12	12
32	2801324	7
33	162	4
34	102	2