

2-fold branched covering spaces の個数について

北大 理 ・ 河野正晴

3-sphere S^3 の 2-fold branched covering space は
 その branch line となる link を一つきめると一意にきま
 る。しかし、このことは一般の manifold に対しては正しくな
 い。この Note では一般の 3-manifold に対し、その中の link を
 一つきめた時、その 2-fold branched covering space の中で互
 いに同相でないものがどれくらいあるか、ということを探る。
 ここではとりあげる多様体はすべて closed とし、又多様体
 の中の link と言えば、closed 1-submanifold (connected と
 は限らない) をさすものとする。

Definition

N を 3 次元多様体、 L をその中の link とする。 $n(N, L)$ で、
 L で branch する N の 2-fold covering space で互いに同相で
 ないものの個数を表す。又 $m(N) := \max \{ n(N, L) \mid L \text{ は } N \text{ の link} \}$ とする。

Remark

1. $m(N, L)$, $m(N)$ が well-defined (よからまされらぬか) ということはまだ示していないが、それは後 a Prop. 1 で示えらぬ。
2. [3] の定理により、 L が $\mathbb{Z}_2$ -係数でホモロガスゼロでない場合は $m(N, L) = 0$ 。又同じく $1 \leq m(N)$ がわかる。

Lemma

N を 3次元多様体とし、 $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ を N の α link とする (ただし、各 L_i は L の component)。 L_i に対応する meridian を m_i とする。この時次の a), b) は同値。

a) 次の i), ii) を満たす $H_1(N-L)$ の subgroup H が存在する。

i) $|H_1(N-L) : H| = 2$

ii) $\langle m_i \rangle \not\subset H \quad (1 \leq i \leq \mu)$

b) associated unbranched covering が $h^{-1}(H)$ でできる様な N 上の L で branch する 2-fold covering が存在する。ただし、 $|O : \square|$ は群 α index, $\langle m_i \rangle$ は meridian m_i が表わす $H_1(N-L)$ の元, h は $\pi_1(N-L)$ から $H_1(N-L) \wedge \alpha$ Hurewicz map とする。

(proof) まず $a) \Rightarrow b)$ 。 $h^{-1}(H)$ は $\pi_1(N-L)$ の index が

2 の部分群となる α で $h^{-1}(H)$ に対応する $N-L$ の (2-fold)

unbranched covering が存在する。Fox's unique compactification theorem [1] より、 Σ は N 上の 2-fold branched covering を一意的に定める。この時 $\langle m_i \rangle \in H$ という条件より、各 L_i 上で必ず branch している。よって Σ は N 上の branched covering として branch する covering になっている。次に $b) \Rightarrow a)$ 。条件 $b)$ を満たす 2-fold covering $p: (M, \tilde{L}) \rightarrow (N, L)$ が存在したとする。 $p_*(\pi_1(M - \tilde{L})) = \tilde{H}$ とおくと、 $\tilde{H}$ は $\pi_1(N - L)$ の index 2 の部分群となっている。又 $\pi_1(N - L) / \tilde{H} \cong \mathbb{Z}_2$ で $\mathbb{Z}_2$ は可換群だから、 $\tilde{H}$ は $\pi_1(N - L)$ の交換子群を含む。

$H_1(N - L) = \pi_1(N - L) / [\pi_1(N - L), \pi_1(N - L)]$ より ($[0; 0]$ は群 0 の交換子群)、 $H = h(\tilde{H})$ とすると、 H は $H_1(N - L)$ の index 2 の部分群。又各 L_i でほんとに branch していることから $\langle m_i \rangle \in H$ ($1 \leq i \leq \mu$)。

Proposition 1

N を 3 次元多様体とする。ここで $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = \underbrace{\mathbb{Z}_2 + \dots + \mathbb{Z}_2}_{m \text{ 個}}$ とすると、 $1 \leq m(N) \leq 2^n$

(proof) Remark より $1 \leq m(N)$ はわかるので任意の link $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ に対して、 $m(N, L) \leq 2^n$ を示せばよい。よって L を 1 つ個定して、Lemma の a) を満たす部分群が高々 2^n 個しか存在しないことを示す。

$H_1(N)$ は有限生成可換群だから次の形をしているとしてよい。
 〃。

$$H_1(N) = \underbrace{\mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z}}_{m \text{ 個}} + \mathbb{Z}_{p_1} + \mathbb{Z}_{p_2} + \cdots + \mathbb{Z}_{p_r} + \cdots + \mathbb{Z}_{p_s}$$

ただし、 p_i は素数の冪乗で、 $i \leq r$ の時 $2 \nmid p_i$, $r+1 \leq i \leq s$ の時は $2 \mid p_i$ となっており、 $\times m = m+r$ 。 $H_1(N)$ の i 番目の $\mathbb{Z}$ -factor の generator を d_i' , $\mathbb{Z}_{p_i}$ の generator を d_{i+m}' とする。そして $d_i' (1 \leq i \leq m+s)$ を represent する $N-L$ の simple loop ℓ_i を一つとって fix し、 ℓ_i が $H_1(N-L)$ の中で表わす class を d_i とする。又 L に a meridian m_i が表わす $H_1(N-L)$ の元を β_i としておく。

$H_1(N-L)$ から $H_1(N)$ への自然な写像を j_* とすると、 $j_*(d_i) = d_i'$ となっている。 $m+r < i \leq m+s$ なる i について d_i' の order は奇数な α で、各 $d_i' (m+r < i \leq m+s)$ に対し、ある自然数 k_i が存在して、 $(2k_i+1)d_i' = 0$ in $H_1(N)$ となる。よって $(2k_i+1)d_i \in \ker j_*$ 。ある整数 $n_j^i (j=1, \dots, \mu)$ が存在して

$$(2k_i+1)d_i = \sum_{j=1}^{\mu} n_j^i \beta_j$$

と書ける。この時

$$\begin{aligned} A' &:= \{ i \mid m+r < i \leq m+s, \sum_{j=1}^{\mu} n_j^i \equiv 0 \pmod{2} \} \\ B' &:= \{ i \mid m+r < i \leq m+s, \sum_{j=1}^{\mu} n_j^i \equiv 1 \pmod{2} \} \end{aligned}$$

とあくと、 A', B' は m'_j のとり方によらず一意にきまる。

又 Lemma a) を満たす任意の部分群に対し、
 $i \in A'$ なら $d_i \in H$, $i \in B'$ なら $d_i \notin H$ が成立する。

さて Lemma を満たす部分群 H に対し、

$$A^H := \{ i \mid 1 \leq i \leq m, d_i \in H \}$$

$$B^H := \{ i \mid 1 \leq i \leq m, d_i \notin H \}$$

とあくと、 A^H, B^H は $\{1, 2, \dots, m\}$ を disjoint にわけ
 るが、この組み合わせは 2^m 通り存在する。逆に $\{1, 2, \dots, m\}$
 の分割 A'', B'' を与えた時、Lemma a) を満たす部分群 H で
 $A^H = A'', B^H = B''$ となる様なものが存在するとすれば一意的で
 ある、ということが言えれば証明は終了する。よって A'', B''
 を1つ個定し、部分群 H が Lemma a) を満たし $A^H = A'', B^H = B''$
 と仮定する。

$$A = A' \cup A^H, B = B' \cup B^H \text{ とあくと、そして、}$$

$$\hat{H} := \text{gp} \{ \beta_i + \beta_j, \beta_i + \alpha_k, \alpha_k + \alpha_l, \alpha_t \mid i, j \in A, k, l \in B, t \in A \}$$

ただし、 $1 \leq i, j \leq m, k, l \in B, t \in A$ とする。 $\hat{H}$ は
 A^H, B^H によって一意にきまり $\hat{H} \subset H$ となる。こゝが $\hat{H} \neq H$
 とすればよい。まず、ある β_i が存在して $\beta_i \in \hat{H}$ とする
 と $\beta_i \in H$ となるので矛盾。よって各 β_i は $\beta_i \notin \hat{H}$ とし
 よい。 $H_1(N-L)$ の任意の元 g に対して整数 $m_i (1 \leq i \leq m)$
 $m_i (1 \leq i \leq m+s)$ が存在して、

$$g = \sum_{i=1}^m n_i \beta_i + \sum_{i=1}^{m+s} m_i d_i \text{ と書ける。 よって}$$

$$g \equiv \left(\sum_{i=1}^m n_i \right) \beta_1 + \sum_{i \in B} m_i d_i \pmod{\hat{H}}$$

$$\equiv \left(\sum_{i=1}^m n_i \right) \beta_1 + \left(\sum_{i \in B} m_i \right) \beta_1 \pmod{\hat{H}}$$

$$\equiv \left(\sum_{i=1}^m n_i + \sum_{i \in B} m_i \right) \beta_1 \pmod{\hat{H}}$$

$$\text{よって } \sum_{i=1}^m n_i + \sum_{i \in B} m_i \equiv 0 \pmod{2} \text{ なら } g \in \hat{H}.$$

$$\sum_{i=1}^m n_i + \sum_{i \in B} m_i \equiv 1 \pmod{2} \text{ なら } g \in \beta_1 \hat{H}.$$

よって α は $\hat{H}$ の指数が 2 であることを示している。よって

$$\hat{H} = H$$

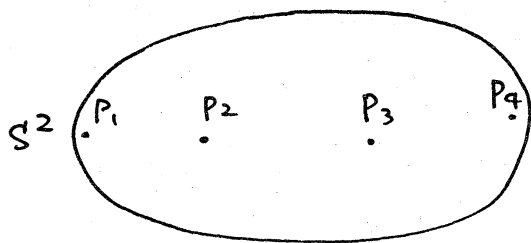
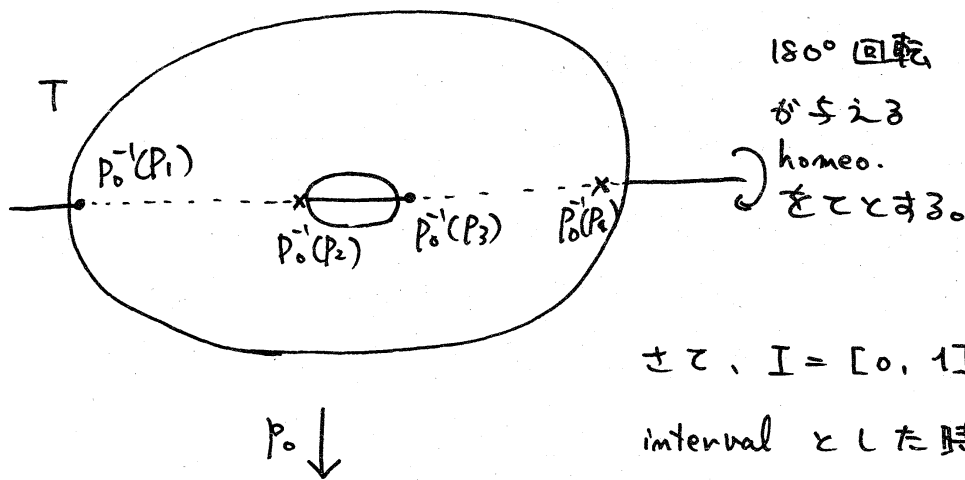
□

次に $m(N) \neq 1$ となる例を実際にあげることにする。

Example $m(S^2 \times S^1) = 2$

2-sphere S^2 上に 4 点 $p_1, \dots, p_4$ をとり、 $L = \{p_1, \dots, p_4\} \times S^1$ とする。 S^2 上 $\{p_1, \dots, p_4\}$ で branch する 2-fold covering space は一意的にきまり、それは torus T であることが知られている。この covering map を p_0 とする。

次ページの図の様な位置に torus を置き軸の 180° 回転が与える同相写像をととする。この時自然な projection $\psi: T \longrightarrow T/\tau$ が p_0 になっていることが知られている。



さて、 $I = [0, 1]$ を unit interval とした時

$p_0 \times \text{id}_I : T \times I \longrightarrow S^2 \times I$ を考える。さて $S^2 \times \{0\}$ と $S^2 \times \{1\}$ を id_{S^2} により合した時、これに対応する $T \times \{0\}$ と $T \times \{1\}$ は

あわせて $p_0 \times \text{id}_I$ と compatible な同相写像は id_T としてあることがわかる。 $T \times I$ を id_T によりあわせてできる多様体をそれぞれ M_4^1, M_4^2 とすると、 M_4^1, M_4^2 は L で branch する $S^2 \times S^1$ 上の 2-fold branched covering space となっている。今 M_4^1 と M_4^2 は同相でない。よって $n(S^2 \times S^1, L) \geq 2$ 。

又 Proposition 1 より $n(S^2 \times S^1) \leq 2$ となるので $n(S^2 \times S^1) = 2$

なお同様 α として S^2 上に $2m$ 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_{2m}$ ($m \geq 2$) をとってできる。この時 $S^2 \times S^1$ の 2-fold

covering space となる多様体を M_{2m}^1, M_{2m}^2 とする。この時

M_{2m}^1 の基本群 $\pi_1(M_{2m}^1)$ は $\pi_1(F_{m-1}) \times \mathbb{Z}$ と同型で (F_{m-1} は

7

genus $n-1$ a closed orientable surface), $\pi_1(M_{2m}^2)$ は $\pi_1(F_{n-1})$ の $\mathbb{Z}$ による拡大で trivial でない も α になる。よって $1 \leq i, j \leq 2, m, n \geq 2$ の時 $(i, m) \neq (j, n)$ なら $\pi_1(M_{2m}^i) \not\cong \pi_1(M_{2n}^j)$ がいかるので M_{2m}^i と M_{2n}^j は同相でない。又 α の M_{2m}^i は irreducible, よって prime であることを注意しておく。

前の Example を一般化すると次の Proposition が得られる。

Proposition 2

$$M = \underbrace{S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# \cdots \# S^2 \times S^1}_{n \text{ 個}} \quad \text{とすると,}$$

$$n(M) = 2^n \text{ である。}$$

(proof) $H_1(M; \mathbb{Z}_2) = \underbrace{\mathbb{Z}_2 + \cdots + \mathbb{Z}_2}_{n \text{ 個}}$ より $n(M) \leq 2^n$ となる。よって $n(M, L) = 2^n$ となる M の link α の存在を言えばよい。

M の connected sum factor になって いる i 番目の $S^2 \times S^1$ を $(S^2 \times S^1)_i$ と書き、各 $(S^2 \times S^1)_i$ の factor α の S^2 上に $2i+2$ 個の点 $P_1^i, \dots, P_{2i+2}^i$ をとり、 $L_i = \{P_1^i, \dots, P_{2i+2}^i\} \times S^1$ とする。各 $(S^2 \times S^1)_i$ から M をつくる connected sum を次のようにしてつってやる。 $(S^2 \times S^1)_1$ 上に $n-1$ 個の disjoint な 3-balls $B_2, \dots, B_n$ をとる。ただし、 $B_i \cap L_1$ は 1-ball になるようにする。各 $i (\geq 2)$ に対し 3-ball B_i を $(S^2 \times S^1)_i$ の中

に $L \cap B_i'$ が 1-ball になる様にとっておく。そして, B_i, B_i' ($i=2, \dots, m$) の内点をとり, ∂B_i と $\partial B_i'$ をはりつけることにより connected sum をつくる。ただし, この時 $L \cap \partial B_i$ と $L \cap \partial B_i'$ はそれぞれ 2 点よりなるが, これがお互いにはりつけられる様にはりつけの字像を進んでおく。

$$L = \bigcup_{i=1}^m L_i - \bigcup_{i=2}^m \{ \text{Int}(L \cap B_i) \cup \text{Int}(L \cap B_i') \}$$
 とおく
 L は M の link となる。次の形の多様体 N は M を L で branch する 2-fold covering space となりうる。

$$N = M_4^{\varepsilon_1} \# M_6^{\varepsilon_2} \# \dots \# M_{2(i+1)}^{\varepsilon_i} \# \dots \# M_{2m+2}^{\varepsilon_m}$$

ただし, $M_{2(i+1)}^{\varepsilon_i}$ は前の example で定義したもので, ε_i は 1 または 2。 $N = M^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m}$ と書くと, 前の example の最後の注意と connected sum に関する unique decomposition theorem [4] より $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \neq (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_m)$ なら $M^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m}$ と $M^{\varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_m}$ は同相でないことがわかる。よって $n(M, L) \geq 2^m$ 。□

Remark 証明を見ると次のこともわかる。 $1 \leq i \leq m$ なる任意の自然数 i に対して, $n(M, L^i) = 2^i$ となる link が存在する。

又, Proposition 2 は Jaco による次の定理 [2]

" M を closed orientable 3-manifold で $\pi_1(M) = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$

($\mathbb{Z}$ は m 個の free product) とすると $M = \Sigma \# S^2 \times S^1 \# \dots$

$\dots \# S^2 \times S^1$ 。ここで Σ は homotopy 3-sphere " を使うと次の形

にできる。

Proposition 3

M は closed orientable 3-manifold で $\pi_1(M)$ は m 個の $\mathbb{Z}$ の free product とする。この時 $m(M) = 2^m$

Note

1. ここで定義した $m(N)$ は当然 topological invariant であるが, homological invariant であろうか? もし Yes なら covering の homeo. type は homology できまるということであり, No なら $m(N)$ は N の homology 以外の情報も含んでいることになる。

2. $m(N, L)$ は homeo. type の個数としたが, 少し定義をかえ

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ p \searrow & \circlearrowleft & \swarrow p' \\ & N & \end{array}$$

て, covering type の個数として論じることもしける。つまり, M と M' の間に左の図式を可換にする homeo. が存在する時

covering type が同じといい, その個数を $m(N, L)$ と書く。

これについては Viro [5] が少し論じているが, 一般には $m(N, L) \neq m(N, L)$ である。

References.

- [1] Fox, R.H., Covering spaces with singularities, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Pr., 1957, 243-257
- [2] Jaco, W., Three manifolds with fundamental group a free product, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 972-977
- [3] 河野正晴, Note on 2-fold branched coverings, (結び目と3次元多様体), 基理解析面講究録346, 1979, 66-79
- [4] Milnor, J., A unique factorization theorem for 3-manifolds, Ann. J. Math. 84(1957), 623-630
- [5] Viro, O. Ja., Linkings, two sheeted branched coverings and braids, Math. USSR, Sbornik, 16(1972) No2, 223-236 (English translation)