

Morse - Smale Systems I

横浜市立大学 文理 一乗重雄

1. 安定多様体, 不安定多様体

$f: M^n \rightarrow M^n$ を微分同相写像, $p \in M^n$ を固定点, すなわち, $f(p) = p$ が成り立つとする。このとき, f の p での微分, $Df(p): T_p M \rightarrow T_p M$ が, 絶対値 1 の固有値を持たないとき, p を双曲的と呼ぶ。 p が双曲的固定点なら, $T_p M$ は絶対値 1 以下の固有値に対応する固有空間 E^s と絶対値 1 以上の固有値に対応する固有空間 E^u との直和に分解する。すなわち,

$$T_p M = E^u \oplus E^s$$

$$Df(p)(E^u) = E^u, \quad Df(p)(E^s) = E^s$$

$$Df(p)|_{E^u}: E^u \rightarrow E^u \text{ は expansion}$$

$$Df(p)|_{E^s}: E^s \rightarrow E^s \text{ は contraction.}$$

f をくり返し施すことにより, p に近づく点全体も考えると, それは ~~E^s と同相 M^n に含まれた~~ M^n の部分多様体 (但し, 正則ではない場合が多い。すなわち, 多様体としての位相と部分集合としての位相は, 一般には一致しない。) にな

り、 p での接空間は E^A である。これを p の安定多様体と言い、 $W^A(p)$ と書く。また、多様体としては、 $W^A(p)$ は R^A に微分同相である。まとめると、

$$W^A(p) = \{q \in M^n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(q), p) = 0\} \text{ は、1対1に}$$

はめこまれた R^A の像であり、

$$T_p W^A(p) = E^A.$$

まったく、~~双~~対称的に、不安定多様体が定義される。

$$W^u(p) = \{q \in M^n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(q), p) = 0\}$$

$$T_p W^u(p) = E^u.$$

次に、 p が周期点のときは、その周期を r として、 f^r の固定点と見做せば、同様の議論が成り立つ。例えば、

$$W^u(p) = \{q \in M^n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) = 0\}$$

とすれば良い。

2. Morse - Smale diffeomorphism

$f: M^n \rightarrow M^n$ 微分同相が、次の条件を満たすとき、Morse - Smale diffeo. と呼ぶ。

- (1) $\Omega(f) = \{f \text{ の非遊走点} \}$ が有限。従って、 $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ 。
- (2) すべての $p \in \text{Per}(f)$ は双曲的。
- (3) $p, q \in \text{Per}(f)$ に対して、 $W^A(p)$ と $W^u(q)$ は横断的に交わる。すなわち、 $\forall x \in W^A(p) \cap W^u(q)$ に対して、 $T_x W^A(p)$ と

$T_x W^u(p)$ を合わせたものは, $T_x M^n$ を張る。

Morse-Smale diffeo. は, 最も扱い易い diffeo. であって, 色々な調子の良い性質を満たす。Anosov diffeo, Axiom A diffeo. と発展してゆくなかで, 最も単純, 基本的なものである。

3. Morse-Smale 不等式及びホモロジー群

ベクトル場の0点に関する古典的な Poincaré-Hopf の定理, あるいは, Morse 関数とホモロジー群の関係と同様に, 周期点の数とホモロジー群は, 次の Morse-Smale 不等式で関係づけられる。 $f: M \rightarrow M$, Morse-Smale とすると, 次の成り立つ。(Smale)

$$M_0 \geq B_0$$

$$M_1 - M_0 \geq B_1 - B_0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i M_i = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i B_i$$

ここで, B_i は M の i 番目ベツク数。 M_j は $\dim W^A(p) = j$ なる周期点 p の個数である。証明は, $M = \bigcup_{p \in \text{Per}(f)} W^A(p)$ が, (open) cell 分解を与えることを用いる。

また, $f(W^A(p)) = W^A(p)$ であることから, f の導びくホモロジー群の導同型, $f_*: H_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$

の固有値は1の中根であることが分かる。(Shub) 以上