

新谷関数とその応用

京産大・理 村瀬 篤 (Atsushi Murase)

広島大・理 菅野孝史 (Takashi Sugano)

古典群の標準的 L 関数については、[4] でサイズが 2 倍の群への埋め込みを利用することによつて、その関数等式が考察されている (但し、ガンマ因子の決定は困難)。この稿では別種の埋め込みを利用して、 L 関数を帰納的にとらえることを考える。その際、異なる 2 つの Hecke 環の同時固有関数である新谷関数が用いられる。(詳細は [3] 及びその続編)

§1. Embeddings

[記号] k : 標数 $\neq 2$ の体,

K : k or 2 次拡大/ k or 四元数環/ k ,

$x \rightarrow \bar{x}$: K/k の main involution,

$\varepsilon = \pm 1$, $\tau(x) = x + \varepsilon \bar{x}$ ($x \in K$),

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ に対し, $A^* = (\bar{a}_{ji}) \in M_{n,m}(K)$

$S(x, y) = x^* S y$, $S[x] = S(\alpha, x)$ ($x, y \in K^m$, $S \in M_m(K)$) とおく.

S is size m の非退化 ε -hermitian matrix ($S^* = \varepsilon S$) とし,

$$S_1 = \begin{bmatrix} S & \varepsilon \\ 1 & \end{bmatrix} \in M_{m+2}(K) \quad \text{と置く.} \quad \eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a \in K^\times, \alpha \in K^m) \text{ と}$$

$$\Delta = S_1[\eta] \in K^\times \text{ なる } \varepsilon \text{ の } \varepsilon \text{ 一つだけと置き. } T = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -\alpha^* S & -\varepsilon(a) \end{bmatrix}$$

と置くとき、これは size $m+1$ の非退化 ε -hermitian matrix となる。

以上の状況で、 $K^m \hookrightarrow K^{m+1} \hookrightarrow K^{m+2}$ に次のように埋め込む。

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} j_0: K^m & \hookrightarrow & K^{m+1} \\ y & \longmapsto & \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} j: K^{m+1} & \hookrightarrow & K^{m+2} \\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} -\varepsilon \bar{a} z - S(\alpha, y) \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{と置き. } \xi = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \Delta^{-1} \text{ とおけば.}$$

$$j_0(K^m) = \xi^\perp \text{ in } K^{m+1}, \quad j(K^{m+1}) = \eta^\perp \text{ in } K^{m+2}$$

また、 T は S_1 の K^{m+1} への制限に等しい。

G, H, G_1 をそれぞれ、 S, T, S_1 のユニタリ群とする (i.e. $G = \{g \in GL_m(K) \mid g^* S g = S\}$ 等)。 (1) から自然に、群の埋め込み

$$(2) \quad G \xhookrightarrow{\iota_0} H \xhookrightarrow{\iota} G_1$$

が生じ、 $\iota_0(G) = H_\xi = \{h \in H \mid h\xi = \xi\}$, $\iota(H) = G_1, \eta$ となる。

(しばしば埋め込み ι_0, ι を略し、それぞれ部分群とみる)

我々の目的は、 k が *global field* の場合に、 H 上の保型形式の L 関数と、 G 上の保型形式の L 関数の関係を調べることにある (L 関数を *size* に関し、帰納的にとらえる)。

G_1 の極大放物部分群

$$P_1 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \in G_1 \right\} \quad (\text{Levi} \cong K^\times \times G)$$

を考へ、その *unipotent radical* を N_1 とあらわす。埋め込みの定義より、 $P_1 \cap L(H) = L_0(G)$ とある。

Proposition 1 K : division とする。

- (i) T : anisotropic $\Rightarrow G_1 = P_1 \cdot L(H)$
- (ii) T : isotropic $\Rightarrow \exists x_0 \in G_1$ s.t. $G_1 = P_1 \cdot L(H) \amalg P_1 x_0 L(H)$,

更に、 H の極大放物部分群 P' と

$$x_0^{-1} P_1 x_0 \cap L(H) = L(P'), \quad x_0 L(N') x_0^{-1} \subset N_1 \quad \text{なるものが存在する.}$$

(N' : P' の *unipotent radical*)

§ 2. Basic Identity

この § では、 $k = \mathbb{Q}$ とし、各素数 p に対し、 $U_p = G(\mathbb{Z}_p)$, $\underline{U}_p = H(\mathbb{Z}_p)$, $U_{1,p} = G_1(\mathbb{Z}_p)$ とおく。簡単のため、 $L_0(U_p) \subset \underline{U}_p$, $L(U_p) \subset U_{1,p}$ 及び岩沢分解 $G_{1,p} = P_{1,p} U_{1,p}$ を仮定しと置く。
無限素点に対しとも $U_\infty \subset \underline{U}_\infty \subset U_{1,\infty}$ ととり、 $U_{1,\infty}$ の 1 次表現 ρ_∞ をとる。

$S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$ は尖点形式の空間

$$\left\{ f: G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A / \prod_{p \leq \infty} U_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} f(gu_\infty) = f(g) \rho_\infty(u_\infty) \\ \text{適当な解析的条件, cuspidal} \end{array} \right\}$$

をあらわす.

$F \in S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$, $f \in S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$ に対し,

$$(3) \quad W_{F,f}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} F(g h) \overline{f(g)} dg \quad (h \in H_A)$$

を、 (F, f) に付随した (global) Shintani function と呼ぶ. 定義より、 $W_{F,f}(1)$ は $F|G_A$ と f との (G_A における) Petersson 内積となる.

次に f に付随した Eisenstein 級数 E .

$$(4) \quad E(g, f; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma \in P_{1,\mathbb{Q}} \backslash G_{1,\mathbb{Q}}} f(\gamma g; \lambda + \sigma) \quad \text{を導入する.}$$

すなわち、 $g \in G_{1,A}$ 上

$$g = \begin{bmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \overline{\alpha(g)}^{-1} \end{bmatrix} u(g) \quad (u(g) \in \prod_{p \leq \infty} U_{1,p})$$

と岩沢分解するとき,

$$f(g; \lambda) = f(\beta(g)) |N(\alpha(g))|_A^{-\lambda} \rho_\infty(u(g)) \quad \text{であり.}$$

$$\sigma = \begin{cases} \frac{m}{2} & K = \mathbb{k}, \varepsilon = 1 \\ \frac{m+1}{2} & K/\mathbb{k}: 2\text{-次体} \\ m + \frac{\kappa}{2} & K: \text{quaternion}, \quad \kappa = \dim_{\mathbb{k}} \text{Ker}(\tau) \end{cases}$$

一般論より、(4) は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で絶対収束し、全 s -平面に解析接続される。Proposition 1 より次を得る。

Proposition 2 (Basic Identity)

$F \in S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$, $f \in S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$ のとき。

$$\begin{aligned} & \int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H_A} F(h) \overline{E(\mathcal{U}(h), f, s - \frac{1}{2})} dh \\ &= \int_{G_A \backslash H_A} W_{F,f}(\beta(h)^{-1}h) |N(\alpha(h))|_A^{s - \frac{1}{2} + \sigma} \rho_\infty(\mathcal{U}(h)_\infty) dh. \end{aligned}$$

右辺が *adele* 上の積分となっていることから、Euler 積に分解されることを期待できる。次節で、 $K = \mathbb{R}$ or 2次体の場合にこれを示し、右辺が L -関数の比として表示されることを見る。なお、左辺の Eisenstein series との convolution については古沢-Shalika [1] で一般的に論じられている。

§3. local Shintani functions

この § では、 k を非アーキメデス局所体、 $\mathcal{O}$ をその極大整環とし、 K の極大整環を $\mathcal{O}^\times$ であらわす。また、 $\mathcal{O}^m$, $\mathcal{O}^{m+1}$ がそれぞれ S , T に関して maximal $\mathcal{O}$ -integral であると仮定する。この時、Hecke 環 $\mathcal{H}(G, G_{\mathcal{O}}) = \{ \phi: G_{\mathcal{O}} \backslash G / G_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{C} \mid \operatorname{supp} \phi: \text{compact} \}$, $\mathcal{H}(H, H_{\mathcal{O}})$ はともに可換となることが知ら

れである。 $\lambda, \Lambda \in$ それぞれ $\mathcal{H}(G, G_0), \mathcal{H}(H, H_0)$ の 1 次表現とし, $\text{type}(\lambda, \Lambda)$ の local Shintani functions の空間を。

$$(5) \quad W(\lambda, \Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ W: G_0 \backslash H / H_0 \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \phi * W * \Phi = \lambda(\phi) \wedge (\Phi) W \\ \forall \phi \in \mathcal{H}(G, G_0), \forall \Phi \in \mathcal{H}(H, H_0) \end{array} \right\}$$

で定義する。

次の問題は基本的であるが、一般には解決されていない。

問題 ① $\dim_{\mathbb{C}} W(\lambda, \Lambda) \leq 1$?

② $\dim = 1$ のとき、explicit formula を与えよ。

しかし、ある積分値は決定でき、 L 関数を用いて表示される。
具体的に計算が終了している 2 つの場合を述べ置く。

I. (0)-case $[K=k, \varepsilon=1]$

$\mathcal{H}(G, G_0)$ の 1 次表現 λ の Satake parameter $\varepsilon, (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ とする ($m=2\nu+n_0$, $\nu: S$ の Witt index) と書く。 λ の local standard L -function を次のように normalize しておく。

$$(6) \quad L(\lambda; s) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \prod_{j=1}^{\nu} (1 - \lambda_j q^{-s})^{-1} (1 - \lambda_j^{-1} q^{-s})^{-1} \right\} \times A_S(s),$$

ここで, $q = |\mathcal{O}/\mathfrak{p}\mathcal{O}|$ ($\mathfrak{p}: k$ の素元),

$$\partial = \partial(S) = \lim_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}/\mathfrak{p}\mathcal{O} \left\{ x \in S^{-1}\mathcal{O}^m \mid \frac{1}{2}S[x] \in \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O} \right\} / \mathcal{O}^m$$

とすると, A_S は次のリストで定義される。

$$A_S(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{if } (n_0, \partial) = (0, 0) \text{ or } (1, 0), \\ 1 + q^{\frac{1}{2}-\lambda} & \text{if } (n_0, \partial) = (1, 1), \\ (1 - q^{-2\lambda})^{-1} & \text{if } (n_0, \partial) = (2, 0), \\ (1 - q^{-\lambda})^{-1} & \text{if } (n_0, \partial) = (2, 1), \\ (1 + q^{1-\lambda})(1 - q^{-\lambda})^{-1} & \text{if } (n_0, \partial) = (2, 2), \\ (1 - q^{-\frac{1}{2}-\lambda})^{-1} & \text{if } (n_0, \partial) = (3, 1), \\ (1 + q^{\frac{1}{2}-\lambda})(1 - q^{-\frac{1}{2}-\lambda})^{-1} & \text{if } (n_0, \partial) = (3, 2), \\ (1 - q^{-\lambda})^{-1}(1 - q^{-1-\lambda})^{-1} & \text{if } (n_0, \partial) = (4, 2). \end{cases}$$

Theorem 1 [(0)-case] $\partial(S) = \partial(T)$ とする, $W \in W(\lambda, \Lambda)$ に対し,

$$\begin{aligned} & \int_{G \setminus H} W(\beta(h)^{-1}h) |\alpha(h)|^{\lambda + \frac{m-1}{2}} dh \\ &= W(1) L(\lambda; \lambda) L(\lambda; \lambda + \frac{1}{2})^{-1} \times \begin{cases} 1 & \dots \text{if } m: \text{even} \\ \int_p (2\lambda)^{-1} & \dots \text{if } m: \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

II. (U)-case [$K/k: 2$ 次, $\varepsilon = 1$]

簡単のため, P が K で分岐してゐるならば $P \nmid 2$ と仮定して置く. K が 2 次拡大体の場合, π を K の素元とし

$$\partial(S) = \dim_{\Theta/(\pi)} \{ x \in S^1 \oplus^m \mid S[x] \in \tau(\pi^{-1}\Theta) \} / \Theta^m \quad \text{と置く.}$$

local standard L function を次のように normalize する.

(i) $K = k \oplus k$ のとき: $\lambda \in \mathcal{H}(G, G_0) \subseteq \mathcal{H}(GL_m(k), GL_m(\mathcal{O}))$ の Satake parameter とし,

$$(7) \quad L(\lambda; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^m (1 - \lambda_j q^{-\lambda})^{-1} (1 - \lambda_j^{-1} q^{-\lambda})^{-1}.$$

(ii) K/k が 2 次拡大体のとき: $\lambda \in \mathcal{H}(G, G_0)$ の Satake parameter, $q' = |\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}|$ とする.

$$(8) \quad L(\lambda; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \prod_{j=1}^{\nu} (1 - \lambda_j q'^{-\lambda})^{-1} (1 - \lambda_j^{-1} q'^{-\lambda})^{-1} \right\} \cdot A_S(\lambda),$$

($m = 2\nu + n_0$, ν : Witt index)

ここで,

$$A_S(\lambda) = \begin{cases} 1 & K/k: \text{不分裂} & (n_0, \vartheta) = (0, 0) \\ (1 - q^{-2\lambda})^{-1} & " & (n_0, \vartheta) = (1, 0) \\ (1 - q^{-2\lambda})^{-1} (1 + q^{-2\lambda+1}) & " & (n_0, \vartheta) = (1, 1) \\ (1 - q^{-2\lambda-1})^{-1} & " & (n_0, \vartheta) = (2, 1) \\ (1 + q^{-(\lambda-\frac{1}{2})}) & K/k: \text{分裂} & n_0 = 0 \\ (1 - q^{-\lambda})^{-1} & " & n_0 = 1 \\ (1 - q^{-(\lambda+\frac{1}{2})})^{-1} & " & n_0 = 2 \end{cases}$$

Theorem 1 [(U)-case] $\vartheta(S) = \vartheta(T)$, p が K で 分岐する

ならば $p \nmid 2$ とする。 $W \in W(\lambda, \lambda)$ に対し次式が成立.

$$\int_{G \backslash H} W(\beta(h)^{-1} h) |N_{K/k}(\alpha)|^{\lambda + \frac{m}{2}} dh$$

$$= W(1) L(\lambda; \lambda) L(\lambda; \lambda + \frac{1}{2})^{-1} \cdot \begin{cases} \zeta_p(2\lambda)^{-1} & \dots m: \text{even} \\ L_p(\chi_K; 2\lambda)^{-1} & \dots m: \text{odd} \end{cases}$$

ここで, χ_K は K/k に対応する character.

[証明の outline] (0)-case を例にとる. $g \in G$ の単因子が

$(p^{e_1}, \dots, p^{e_m})$ のとき,

$$(9) \quad N_{G, \lambda}(g) \stackrel{\text{def}}{=} g^{-\sum_{e_i < 0} |e_i| \cdot \lambda}$$

とおく.

次の Lemma が成立.

$$\text{Lemma A} \quad N_{H, \lambda}(h) = N_{G, \lambda}(\beta(h)) |\alpha(h)|^\lambda \quad (h \in H)$$

$$\text{Lemma B} \quad f: G/G_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad f * \phi = \lambda(\phi) f \quad (\forall \phi \in \mathcal{H}(G, G_0))$$

$$\text{のとき,} \quad \int_G f(g) N_{G, \lambda + \frac{m-1}{2}}(g) dg$$

$$= f(1) \frac{L(\lambda_f; \lambda)}{A_S(\lambda)} \prod_{j=0}^{v-1} (1 - g^{-(\lambda+j+\frac{n_0}{2})}) (1 + g^{-(\lambda+j-\frac{n_0}{2})})$$

これらを用いて.

$$\int_H W(h) N_{H, \lambda + \frac{m-1}{2}}(h) dh$$

と同様に計算すればよい. (cf. [2]).

§ 4. global L-functions

$k = \mathbb{Q}$ とし, (O)-case, (U)-case を扱う. 簡単のため, T を正定値, $\rho_\infty = 1$ の場合を考えよう. 前節と同様に, S である素数 p に対して $\mathbb{Q}_p^m, \mathbb{Q}_p^{m+1}$ はそれぞれ S, T に関して maximal $\mathbb{Q}_p$ -integral lattice と, $\partial_p(S) = \partial_p(T)$ と仮定する. 更に, (U)-case では $p=2$ は K で不分裂としておく.

$$f: G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A / \prod_{p \leq \infty} U_p \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{が, Hecke 環 } \otimes \mathcal{H}(G_p, G_{2p})$$

の同時固有関数 α とし、その global standard L-function を、

$$(10) \quad \zeta(f; s) \stackrel{\text{def}}{=} L_\infty(f; s) \prod_{p < \infty} L_p(f; s) \quad \text{と定義.}$$

ここで $L_p(f; s)$ は、 $f * \phi = \lambda_f(\phi) f$ ($\forall \phi \in \mathcal{H}(G_{\mathbb{Q}_p}, G_{\mathbb{Z}_p})$)

α とし、§3 で normalize $L = L(\lambda_f; s)$ とあらわし、

$$L_\infty(f; s) = \begin{cases} (2\pi)^{-s} (\det S)^{s/2} \prod_{j=1}^{s/2} \Gamma(s - \nu - 1 + 2j) \Gamma(s - 2 + 2j) & \dots (0) \text{ case, } m = 2\nu \equiv 0(4) \\ (2\pi)^{-s} (\det S)^{s/2} \prod_{j=1}^{\frac{\nu+1}{2}} \Gamma(s - \nu - 1 + 2j) \prod_{j=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(s - 1 + 2j) & \dots (0) \text{ case } m = 2\nu \equiv 2(4) \\ (2\pi)^{-s} (2^{-1} \det S)^{s/2} \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(s - \nu + 2j - \frac{3}{2}) & \dots (0) \text{ case } m = 2\nu + 1 \\ (2\pi)^{-m} (\det S)^s |d_K|^{s(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \frac{1}{2})} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(s - \frac{m-1}{2} + j) & \dots (U) \text{ case} \end{cases}$$

とあらわした。

Eisenstein series の理論より、(10) で定義した L 関数は、

全 s -平面に有理型関数として解析接続される。

Conjecture (0)-case [resp. (U)-case]

$f \in S(\prod_p U_p; 1)$: Hecke eigen とする。

$$(i) \quad \frac{\zeta(f; s)}{\zeta(f; 1-s)} = \begin{cases} -1 & m \equiv \pm 3 \pmod{8} \quad [\text{resp. } m \equiv 2 \pmod{4}] \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (ii) $\zeta(f; s)$ の possible poles は $\frac{m}{2} - k$ ($0 \leq k \leq m-1$)
 [resp. $\frac{m+1}{2} - k$ ($0 \leq k \leq m$)] のみで、 $s = \frac{m}{2}$ [resp. $\frac{m+1}{2}$]
 では高々 simple pole.
- (iii) $\zeta(f; s)$ が $s = \frac{m}{2}$ [resp. $\frac{m+1}{2}$] で pole を持つ
 $\Leftrightarrow f = \text{constant}$.

Theorem 2 (0)-case or (U)-case とし、 $T > 0$, $\forall p \mid T$ に対し、 $\partial_p(S) = \partial_p(T)$ とする。また、(U)-case では $d_K \equiv 1 \pmod{4}$ と仮定する。 $F \in S(\prod_p U_p; 1)$, $f \in S(\prod_p U_p; 1)$ がともに Hecke 作用素の同時固有関数で、 $W_{F,f}(1) = \langle F|G_A, f \rangle \neq 0$ ならば、 f に対する Conjecture の成立から F に対する Conjecture が導かれる。より詳しく言うと、 f が Conjecture (i) [resp. (i) and (ii), (i) and (ii) and (iii)] をみたせば、 F が Conjecture (i) [resp. (i) and (ii), (i) and (ii) and (iii)] をみたす。

Corollary K : 虚 2 次体, $d_K \equiv 1 \pmod{4}$, N を平方因子をもたない自然数で、各素因子は K で不分裂不分解とする。 $S = \begin{bmatrix} N \\ 1_{m-1} \end{bmatrix}$, $G = U(S)$ とする。 $f \in S(\prod_p U_p, 1)$ が Hecke 作用素の同時固有関数で、 $f(1) \neq 0$ ならば、 f に対して Conjecture (i), (ii), (iii) が成り立つ。

§5. 補足

1° 特別な local Shintani function [(0)-case] §3 で述べた

ように、一般には $W(\lambda, \Lambda)$ の一次元性, explicit formula は分かっていない。しかし、 $\lambda = \text{trivial}$ という特別な場合には、存在するための Λ の条件, explicit formula を知ることもできる。これは、 $G \backslash H / H_0$ が一つの parameter で記述されることによる。 $H = O(T)$ の split rank を $\nu+1$ とし、 $0 \leq r \leq \nu+1$ に対し

$$C_H^{(r)} = \{ h \in H \mid P \cdot h: \text{integral}, \text{rank}_{O/P \cdot O}(P \cdot h) = r \}$$

とおく、 $C_H^{(1)}, \dots, C_H^{(\nu+1)}$ が Hecke 環 $\mathcal{H}(H, H_0)$ の generator を与える。 $1 \leq j \leq \nu$ に対し、

$$(11) \quad f_{\nu,j} = \frac{\vartheta^{j-1} (\vartheta^{\nu-j+1} - 1) (\vartheta^{\nu-j+n_0} + \vartheta^{\vartheta})}{\vartheta^{j-1}} \quad \left(\begin{array}{l} \nu+1 = \nu(T) \\ n_0 = n_0(T) \\ \vartheta = \vartheta(T) \end{array} \right)$$

とおく。

Proposition 3 $\dim_{\mathbb{C}} W(1, \Lambda) \leq 1$ (あり)、 $W(1, \Lambda)$

$\neq \{0\}$ となる必要十分条件は、 $1 \leq \forall r \leq \nu+1$ に対し

$$\left(\prod_{j=1}^{r-1} f_{\nu,j} \right)^{-1} \Lambda(C_H^{(r)}) - \Lambda(C_H^{(1)}) = \vartheta^r f_{\nu,r} + \vartheta^{r+\vartheta-1} - \vartheta f_{\nu,1} - \vartheta^{\vartheta}$$

が成立することである。また、このとき L 関数は、

$$\frac{L(\Lambda; \mathcal{A})}{A_T(\mathcal{A})} = \prod_{j=1}^{\nu} (1 - \vartheta^{\frac{n_0}{2}-1+j-\mathcal{A}})^{-1} (1 - \vartheta^{-\frac{n_0}{2}+1-j-\mathcal{A}})^{-1}$$

$\times \left\{ 1 - (\Lambda(C_H^{(1)}) - 2f_{\nu,1} - 2 + 1) q^{-\frac{m-1}{2} - 1} + q^{-2} \right\}^{-1}$
 $\times$ 分解する.

2° 正則尖点形式 [(U)-case]

(U)-case では、任意の符号で正則保型形式を考えることができる。 ρ_∞ と l 2 weight に対応する 1 次表現 ρ_l をとれば、(実素点での球関数の理論を用いて) §4 の結果を全 2 の符号に一般化できる。概略を述べておく。

S を符号 $(\nu+n_0, \omega)$ ($m=2\nu+n_0$) の hermitian matrix で、 $\mathbb{Q}$ 上の Witt index も ν としておく。 l を十分大なる偶数、 $\omega = \omega_\infty \prod_{p \leq \infty} \omega_p$ とし、 $\omega_\infty(t) = t^{l/2}$ ($t \in \mathbb{I}$) なる $K^1 \setminus K_A^1$ の指標とする。 $S(\prod_p U_p; \rho_l)$ で、weight l の正則尖点形式の空間をあらわす。 Hecke eigen form $f \in S(\prod_p U_p; \rho_l)$ に対して

$$(12) \quad \mathfrak{Z}(f \otimes \omega; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L_\infty(f \otimes \omega; \lambda) \prod_{p < \infty} L_p(f \otimes \omega; \lambda) \quad \times \text{おく.}$$

$$\begin{aligned} &= 2^\nu \cdot \\ L_\infty(f \otimes \omega; \lambda) &= (2\pi)^{-m\lambda} |\det S|^\lambda |d_K|^\lambda \lambda \left(\frac{m}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{\nu} \Gamma\left(\lambda + \frac{l-n_{0i}+1}{2} - i\right) \prod_{j=1}^{\frac{n_0+p}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{l+n_{0j}+1}{2} - j\right), \end{aligned}$$

$L_p(f \otimes \omega; \lambda)$ は §3 で定義された local standard L の twist.

$\mathfrak{Z}(f \otimes \omega; \lambda)$ は全 λ -平面に解析接続され、関数等式

$$(*) \quad C_{f \otimes \omega}(1) \stackrel{\sim}{=} \frac{\zeta(f \otimes \omega; 1)}{\zeta(f \otimes \omega; 1-1)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} & \text{if } m: \text{even} \\ (-1)^{\frac{1}{2}} & \text{if } m: \text{odd} \end{cases}$$

が予想される。

Proposition 4 $F \in S(\prod_p U_p; P_e), f \in S(\prod_p U_p; P_e)$ が
 ω にも Hecke eigen ω として, $W_{F,f}(1) = \langle F|G_A, f \rangle \neq 0$ ならば,

$$C_{F \otimes \omega}(1) = (-1)^{\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}} C_{f \otimes \omega}(1 - \frac{1}{2})$$

と ω にも f が $\text{Conj. } (*)$ をみたせば F も $(*)$ をみたす。

3° 他 の Eisenstein series と の convolution [(0)-case] 我々は

Proposition 2 を. サイズ $m+2$ の直交群上の Eisenstein series
 として. Levi part が $(m\text{-次直交群}) \times GL_1$ である放物部分群か
 ら作られたものを考えた. 他の放物部分群に対しても. 同様
 のことが出来る. 例えば, $G_1 = O(m, 2)$ ($m \geq 2$) とすると.
 Levi part が (i) $O(m-2) \times GL_1 \times GL_1$ の場合 (i.e. minimal
 parabolic) と (ii) $O(m-2) \times GL_2$ の場合 (別の maximal
 parabolic) が生ずる.

$$S_1 = \begin{bmatrix} & & & J \\ & & & \\ & & S_0 & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_0 > 0 \quad (\text{サイズ } m-2) \text{ とする.}$$

(i) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \in G_1 \right\}$ に関する Eisenstein series :

$\text{sgn}(T) = (m-1, 2)$, $H = O(T) \hookrightarrow G_1$ $\times L$, H 上の weight l の正則尖点形式 F と G_0 上の cusp form f_0 から作られる次の Eisenstein series の convolution を考へる.

$$(13) \quad E(g, f_0, l; \lambda, \lambda_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma \in B_{1, \mathbb{Q}} \backslash G_{1, \mathbb{Q}}} f_0(\beta(\gamma g)) |\alpha(\gamma g)|_A^{\lambda + \frac{m}{2}} |\alpha_0(\gamma g)|_A^{\lambda_0 + \frac{m-2}{2}} J_{G_1}(k(\gamma g)_\infty, Z_0)^l$$

$$g = \begin{bmatrix} \alpha(g) & * & * & * & * \\ & \alpha_0(g) & * & * & * \\ & & \beta(g) & * & * \\ & & & \alpha_0(g)^{-1} & * \\ & & & & \alpha(g)^{-1} \end{bmatrix} k(g) \quad \times \text{右乗分解}$$

$\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$, $J_{G_1}(g, Z_0)$ は G_1 上の保型因子. これは (4) で f と

$l \geq 2$ (parameter λ_0 a λ, t) Eisenstein series をとったものである.

Prop. 2, Theorem 1 & [5] の結果を用いて次を得る.

Proposition 5 F は H 上の weight l の正則尖点形式, f_0 は G_0 上の cusp form とする. λ と λ_0 は Hecke eigen のとき.

$$\begin{aligned} & \int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}}} F(h) E(1(h), f_0; \lambda - \frac{1}{2}, \lambda_0 - \frac{1}{2}) dh \\ &= C \cdot (2\pi)^{-\lambda_0} 2^{-\lambda} \frac{\Gamma(\lambda + l - \frac{m-1}{2}) \Gamma(\lambda_0 + l - \frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda + \lambda_0 + l}{2}) \Gamma(\frac{\lambda - \lambda_0 + l + 1}{2})} \\ & \times \frac{L(F; \lambda) L(F; \lambda_0)}{L(f_0; \lambda + \frac{1}{2}) L(f_0; \lambda_0 + \frac{1}{2})} \frac{1}{\zeta(\lambda + \lambda_0) \zeta(\lambda - \lambda_0 + 1)} \times \begin{cases} 1 & \dots m: \text{even} \\ \frac{1}{\zeta(2\lambda) \zeta(2\lambda_0)} & \dots m: \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) $P'_1 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \in G_1 \right\}$ に関する Eisenstein series :

$f_0: G_0 = O(S_0)$ ($\dim(S_0) = (m-2, 0)$) の cusp form

$\varphi: GL_2$ 上の cusp form

$F: H = O(T)$ ($\dim(T) = (m-1, 2)$) 上の cusp form とする.

(簡単のため, weight を無視する). (f_0, φ) から作られる G_1 上の Eisenstein series を考える.

$$E'(g; f_0, \varphi; \lambda) = \sum_{\gamma \in P'_{1, \mathbb{Q}} \backslash G_{1, \mathbb{Q}}} \varphi(A(\gamma g)) f_0(B(\gamma g)) |\det A(\gamma g)|_A^{\lambda + \frac{m+1}{2}}$$

ここで,

$$g = \begin{bmatrix} A(g) & * & * \\ & B(g) & * \\ & & J^{-t} A(g)^{-t} J \end{bmatrix} k(g) \quad \text{と岩沢分解した.}$$

Prop. 2, 5 と同じように.

$$\int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H_A} F(k) E'(uk); f_0, \varphi; \lambda - \frac{1}{2}) dk = Z'_{F, f_0, \varphi}(\lambda)$$

を, Whittaker function (一般化されたもの) の $G_A \backslash H_A \times GL_2(A)$ 上の積分に直すことが出来る. また Euler 積分

$$(**) \quad Z'_{F, f_0, \varphi}(\lambda) \sim \frac{L(F \otimes \varphi; \lambda)}{L(f \otimes \varphi; \lambda + \frac{1}{2})} \times \begin{cases} L^{\text{Sym}}(\varphi; 2\lambda)^{-1} & m: \text{odd} \\ L(\omega; 2\lambda)^{-1} & m: \text{even} \end{cases}$$

の成立が予想される. ここで, $L(F \otimes \varphi; \lambda)$ は GL_2 の保型形式 φ で twist した L 関数 (degree は $L(F; \lambda)$ の 2 倍), ω は

φ の central character, $L^{\text{Sym}}(\varphi; \chi)$ は φ の symmetric tensor L をあらわす. $f_0 = \text{constant}$ の場合には, $(**)$ の成立が証明できている.

References

- [1] Furusawa, M. and Shalika, J.A. : On Fourier coefficients of Eisenstein series, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, Proceeding of JAMI International Conference, The Johns Hopkins University, 81-98, 1989.
- [2] Murase, A. and Sugano, T. : Whittaker-Shintani functions on the symplectic group of Fourier-Jacobi type, Compositio Math. 79 (1991), 321-349.
- [3] Murase, A. and Sugano, T. : Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups; Part I. The case of orthogonal groups, MPI preprint series (1991); Part II Rankin-Selberg convolution of two variables for $O(m, 2)$, MPI preprint series (1992); Part III. Pullback of Eisenstein series on GS_{p2} to Hilbert modular groups, preprint (1991).
- [4] Piatetski-Shapiro, I and Rallis, S. : L-functions for the classical groups, Springer Lecture Notes 1254, 1987.
- [5] Sugano, T. : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on $SO(2, 8)$, Advanced Studies in Pure Math. 7 (1985), 333-362.