

(2,1)-ファイバー空間に対する
Hodge構造の変動について

都立大・理 宮岡洋一

§1. 序

Kähler ファイバー空間 $f: X \rightarrow Y$ を与えたとき、局所定数層 $\mathbb{C}_X$ から自然に Y 上の層 $R^i f_* \mathbb{C}_X$ が定まる。この層は連接層ではないし、また各点での階数も相異なる。しかし、射影 f が smooth なら、もちろん $R^i f_* \mathbb{C}_X$ は Y 上の局所系 (local system) であって、自然な同型

$$R^i f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_Y} \mathcal{O}_Y \cong R^i f_* f^* \mathcal{O}_Y$$

が存在する。ここで $f^* \mathcal{O}_Y$ は、各ファイバーに沿っては局所的に定数であるような Y 上の正則関数の芽からなる層であって、明らかに $\mathcal{O}_X$ の部分層である。

さて、以下しばらく $f: X \rightarrow Y$ は smooth であると仮定し、 Y の次元を n 、ファイバーの

次元を m としよう。以下の記号を導入する。

$$\Omega_{X/Y}^1 = \Omega_X^1 / f^* \Omega_Y^1,$$

$$\Omega_{X/Y}^p = \wedge^p \Omega_{X/Y}^1 \cong \Omega_X^p / (f^* \Omega_Y^1 \wedge \Omega_X^{p-1}).$$

このとき, Poincaré の系列

$$(*) \quad 0 \rightarrow f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_{X/Y}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{X/Y}^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_{X/Y}^m \rightarrow 0$$

が $Y = \{\text{点}\}$ のときと同様に完全であることは簡単にわかる。よって, 相対 Hodge スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = R^q f_* \Omega_{X/Y}^p$$

は $R^{p+q} f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y$ に収束して, X が Kähler であることから, E_1 で退化する。各点ごとに見れば, これはファイバーの Hodge 分解に他ならない。また Poincaré 系列 (*) の各写像が $\mathcal{O}_Y$ について線型であることから, 上で与えられる $R^{p+q} f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y$ のフィルターづけは Y によって正則にパラメトライズされている。たとえば, 最も簡単な例として, $R^1 f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y$ を考えると,

$$0 \rightarrow f_* \Omega_{X/Y}^1 \rightarrow R^1 f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

は完全系列であり, しかも $\mathcal{O}_Y$ -linear である。

いいかえれば, スペクトル系列 $E_1^{p,q} = R^q f_* \Omega_{X/Y}^p$

$\Rightarrow R^{p+q} f_* f^* \mathcal{O}_Y$ は Hodge 構造の変動 (variation of Hodge structure) である。

一般の場合にもとって、 f が smooth でないときに同様のことを考えようとするとき、種々の難点が生じる。 Y の Zariski 開集合 Y^0 上で f が smooth であるとして、 $X^0 = f^{-1}(Y^0)$ とおこう。 $R^i f_* f^* \mathcal{O}_{Y^0}$ は Y^0 上の連接層であって $R^i f_* \mathbb{C}_X|_{Y^0}$ を含んでいる。これを Y 上の連接層にまで延長することは Schmid により可能であるが、それでもその延長 $\mathcal{H}^i$ と $R^i f_* \mathbb{C}_X$ との包含関係とか、 $\mathcal{H}^i$ の大域的性質とかは具体的にはよくわからない。 $R^i f_* f^* \mathcal{O}_Y$ は $\mathcal{O}_Y$ -加群であるが、一般に連接層にならないため、このような困難が生じるのである。

本稿では、 $\dim Y = 1$, $\dim X = 2$ の場合に $R^i f_* f^* \mathcal{O}_{Y^0}$ の標準的延長 $\mathcal{H}^i$ を構成する。 $\mathcal{H}^i$ のもつべき性質として次のようなものか考えられるか、我々の構成はすべてこれを満足する。

(1) $\mathcal{H}^i$ は $R^i f_* \mathbb{C}_X$ を含む。

(2) $\mathcal{H}^i$ は $\mathcal{H}$ をみたす延長のうちで何らかの意味で(局所的に)極小である。

(3) $\mathcal{H}^i$ を Y^0 に制限したものは $R^i f_* f^* \mathcal{O}_Y$ と自然な意味で同型である。

なお, (2,1)-ファイバー空間では, 本質的に問題となるのは $\mathcal{H} = \mathcal{H}^i$ のみである。実際,

$$\begin{cases} \mathcal{H}^0 = \mathcal{O}_Y, \\ \mathcal{H}^2 / \mathcal{H}_{\text{tor}}^2 = \mathcal{O}_Y, \\ \mathcal{H}_{\text{tor}, p}^2 = (\mathcal{O}_{Y, p} / \mathfrak{m}_p)^{m_p} \end{cases}$$

とあけはよい。ここで, p 上のファイバーの既約成分の数を m_p とおいた。

§2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}^i$ の構成

以下の構成のため, ここで (2,1)-ファイバー空間 $f: X \rightarrow Y$ に対して次の条件を設定する。

条件 任意の特異ファイバーは, その reduced structure をとれば, 非特異曲線の正規交叉 (normal crossing) である。

適当に X に二次変換をほどこせば, 上記の条件はみたされ, 1 かも $R^1 f_* \mathbb{C}_X$, $f_* f^{-1} \mathcal{O}_Y / \gamma_0$ は影響をうけないから, 決して不自然な設定ではない。

以下繁雑になるが, 記号を定めておこう。

S : f の特異ファイバーを reduced な部分開集合とみて, その和集合。

$$s = f(S).$$

T : S の特異点全体からなる有限集合。

Δ_k : T の点 P_k の十分小さい近傍。

(t_k, v_k) : Δ_k の座標で, f が $f(t_k, v_k) = t_k^\alpha v_k^\beta$ の形で定義されるもの。

$$\Delta = \bigcup \Delta_k$$

$\mathcal{E}_X^\Delta$: Δ の外では恒等的に 0 となるような X 上の C^∞ 函数の芽の層。

$\mathcal{E}_X$: X 上の C^∞ 函数の芽の層。

$\mathcal{E}_X^{p,q}$: X 上の (p,q) -型式の層。

$\Omega_X^1(\log S)$: S に沿って極をもつ対数 1-型式の層。

$$\Omega_Y^1(\log S) = \mathcal{O}_Y(K_Y + (S)).$$

$$\Omega_{X/Y}^1(\log S) = \Omega_X^1(\log S) / f^* \Omega_Y^1(\log S).$$

$$\mathcal{E}_{X/Y}^{1,0}(\log S) = \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/Y}^1(\log S).$$

$\mathcal{I}_S, \mathcal{I}_T$: reduced な 閉部分集合 S, T の $\mathcal{O}_X$ における ideal.

ここで留意すべきは, $\Omega_{X/Y}^1(\log S)$ は局所自由 (したがって可逆) 層となることである。 Δ_k 上では, dt_k/t_k がその一つの底となる。

さて構成にはいろいろ。

$$\delta^\Delta: \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{E}_X^\Delta \longrightarrow \mathcal{I}_T \mathcal{E}_{X/Y}^{1,0}(\log S) \oplus \mathcal{E}_X^{0,1} \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{E}_X^{0,1}$$

を次のように定義する。 $(\zeta, \xi) \in \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{E}_X^\Delta$ に対し, Δ_k 上では,

$$\delta^\Delta(\zeta, \xi) = ([\partial\zeta + \xi \frac{dt_k}{t_k}], \bar{\partial}\zeta, \bar{\partial}\xi)$$

とし, $X - \Delta$ 上では,

$$\delta^\Delta(\zeta, \xi) = ([\partial\zeta], \bar{\partial}\zeta, 0)$$

とおくのである。 ξ は $X - \Delta$ 上 0 だから, この定義はちゃんとした意味をもつ。ここで,

[] は modulo $f^* \Omega_Y^1(\log S)$ での同値類を表わす。こう δ^Δ を定義しておくと、次の補題は極めて容易に示すことができる。

補題 1. δ^Δ は $\mathcal{O}_Y$ に関して線型である。また以下の図式は $\mathcal{O}_Y$ 加群の間の準同型として可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{E}_X^\Delta & \xrightarrow{\delta^\Delta} & \Gamma\text{-}\mathcal{E}_{X/Y}^{1,0}(\log S) \oplus \mathcal{E}_X^{0,1} \oplus \mathcal{E}_X^{0,1} \\
 \downarrow \text{1st projection} & & \downarrow \text{2nd projection} \\
 \mathcal{E}_X & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \mathcal{E}_X^{0,1}
 \end{array}$$

$U \subset Y$ を小開集合とし、

$$\mathcal{H}_U^\Delta = \Gamma(f^{-1}(U), \text{Im } \delta^\Delta) / \delta^\Delta \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{E}_X^\Delta)$$

とおこう。すると、上記補題より、自然な

$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ -線型写像

$$\gamma_U^\Delta : \mathcal{H}_U^\Delta \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \bar{\sigma} \mathcal{E}_X) / \bar{\sigma} \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X)$$

$$\cong H^1(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \cong \Gamma(U, R^1 f_* \mathcal{O}_X)$$

が得られる。次の補題で $\gamma_{\frac{\Delta}{\sigma}}$ の構造はある程度わかる。

補題 2. $U \subset Y$ を小さな開集合とし, U の境界 ∂U は s を通らないものと仮定する。このとき, Δ を U に対して十分小さくとれば, $\text{Ker } \gamma_{\frac{\Delta}{\sigma}}$ は $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S))$ と同型である。

証明は以下の二部分に分けて行う。

a) $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S))$ は自然に $\text{Ker } \gamma_{\frac{\Delta}{\sigma}}$ に入る。

b) $\text{Ker } \gamma_{\frac{\Delta}{\sigma}}$ は $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S))$ に含まれる。

a) の証明 第一段. $\mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S) \subset \text{Im } \delta^{\Delta}$.

$X - \Delta$ 上では適当な局所座標 (t, u) に対して, $f(t, u) = v^{\alpha}$ の形となる。 $\mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S)$ の底として dt をとると, 任意の函数 $\varepsilon(t, u)$ に対して, $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \varepsilon$ となる函数があるから,

$\delta^\Delta(\eta, 0) = [\xi dt]$ となる。次に Δ_k 上で考える。

$\xi(dt_k/t_k)$ に対して, ξ を巾級数展開する。

$$\xi(t_k, v_k) = \sum \xi_{ij} t_k^i v_k^j$$

$(\eta, t_k v_k \zeta) \in \mathcal{O}_\Delta \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{O}_\Delta$ に対して δ^Δ を施すと,

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t_k} dt_k + \frac{\partial \eta}{\partial v_k} dv_k + t_k v_k \zeta \frac{dt_k}{t_k} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{を得る。ここで} \quad & \left[\frac{d(t_k^\alpha v_k^\beta)}{t_k^\alpha v_k^\beta} \right] = \left[\alpha \frac{dt_k}{t_k} + \beta \frac{dv_k}{v_k} \right] \\ & = 0 \quad \text{に注意すると,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^\Delta(\eta, t_k^\alpha v_k^\beta \zeta) \\ = \frac{1}{\beta} \left[\left(\beta t_k \frac{\partial \eta}{\partial t_k} - \alpha v_k \frac{\partial \eta}{\partial v_k} + \beta t_k v_k \zeta \right) \frac{dt_k}{t_k} \right] \end{aligned}$$

を得る。 $\eta = \sum \eta_{ij} t_k^i v_k^j$, $\zeta = \sum \zeta_{ij} t_k^i v_k^j$ と
巾級数展開すると, 連立方程式

$$\xi_{ij} = (\beta i - \alpha j) \eta_{ij} + \beta \zeta_{i-1, j-1}$$

を解けばよいことになる。そこで, たとえは

$$\begin{cases} \eta = \zeta_{00} + \frac{1}{\beta} \xi_{1,0} t_k - \frac{1}{\alpha} \xi_{0,1} v_k, \\ \zeta = \frac{1}{\beta} \sum \xi_{i+1, j+1} t_k^i v_k^j \end{cases}$$

とおけば, η, ζ は Δ 上の正則関数で,

$$\delta^\Delta(\eta, t_k v_k \zeta) = \left[\xi \frac{dt_k}{t_k} \right] \text{ となる。}$$

いおれにしても $J_T \Omega_{X/Y}^1(\log S) \subset \text{Im } \delta^\Delta$ が言えた。

第二段、 $\delta^\Delta \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X \oplus J_S \mathcal{E}_X^A) \cap J_T \Omega_{X/Y}^1(\log S) = (0)$. 実際、 $\delta^\Delta(\eta, \zeta)$ が有理型 1-型式なら、 η, ζ はともに正則である。 f は固有だから、 η, ζ は f の fibre に沿っては定数でなければならぬ。また ζ は十分小さい開集合 Δ の外では 0 だから、 ζ は至るところ 0、すなわち $\delta^\Delta(\eta, \zeta) = ([\partial\eta], 0, 0) = 0$ となる。
 $(\because \partial\eta \in \Gamma(f^{-1}(U), df^* \mathcal{O}_Y))$

c) の証明も同様であるから略する。

さて、微分 $d: \mathcal{O}_X \rightarrow J_T \Omega_{X/Y}^1(\log S)$ から誘導される $(U, \mathcal{O}_Y)$ -準同型

$\Psi_U: H^1(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(f^{-1}(U), J_T \Omega_{X/Y}^1(\log S))$
 を考えると、簡単に次のことがわかる。

補題 3 $\text{Im } \gamma_U^\Delta$ は $\text{Ker } \Psi_U$ を含む。

$H^1(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) / \text{Ker } \Phi_U$ が有限次元 (Δ にも U にもよらない数でおさえられる) ことはすぐわかるから,

系 $\text{Im } \gamma_U^\Delta$ は十分 Δ を小さくと、 U における Δ によらず定まる。

が成立する。特に U が補題 2 の条件をみたすとき、完全系列

$0 \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S)) \rightarrow \mathcal{H}_U^\Delta \rightarrow \text{Im } \gamma_U^\Delta \rightarrow 0$
 の左辺は Δ によらないから、 $\mathcal{H}_U^\Delta$ も Δ によらず定まる。したがって $\mathcal{H}_U = \varprojlim_{\Delta} \mathcal{H}_U^\Delta$ は、
 well-defined である。 U に関する条件は、
 presheaf $\mathcal{H}_U$ のかわりに層化した $\mathcal{H}$ を考えれば省くことができる。よって次の定理が証明された。

定理 1. 一般のファイバーの種数を g としたとき、
 $\mathcal{H}$ は階数 $2g$ の局所自由層であり、

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X$$

は $\mathcal{O}_Y$ -加群の完全系列である。 $\mathcal{H}|_{Y_0}$ は自然に $R^1 f_* f^* \mathcal{O}_Y|_{Y_0}$ と一致する。ここに, Y_0 は, $f|_{Y_0}$ が smooth であるような Y の Zariski 開集合。

さて, 可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}_X & \xrightarrow{\quad d \quad} & \mathcal{E}_X^{1,0} \oplus \mathcal{E}_X^{0,1} \\
 \downarrow \text{第1成分への自然な写像} & & \begin{array}{l} \text{第1成分を第1成分に} \\ \text{第2成分を第2成分に} \\ \text{自然に写す} \end{array} \\
 \mathcal{E}_X \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{E}_X^\Delta & \xrightarrow{\quad \delta^\Delta \quad} & \mathcal{I}_T \mathcal{E}_{X/Y}^{1,0}(\log S) \oplus \mathcal{E}_X^{0,1} \oplus \mathcal{I}_S \mathcal{E}_X^{0,1}
 \end{array}$$

を考えると, Y の小さな開集合 U に対して

$$\begin{aligned}
 \Gamma(U, R^1 f_* \mathcal{O}_X) &= \Gamma(f^{-1}(U), d\mathcal{E}_X) / d\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X) \\
 &\longrightarrow \mathcal{H}_U^\Delta
 \end{aligned}$$

が自然にさする。よ, $\mathcal{E}$ 層準同型

$$i: R^1 f_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{H}$$

が誘導されるが, これに対しては, 次の定理が示される。

定理 2. i によ, $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ は $\mathcal{H}$ の部分層と

みなすことができる。

以上2つの定理から、上記の $\mathcal{H}$ が我々の要請のうち (1) (3) を満足することが確認された。さらに、すべての特異ファイバーが *reduced* であるという条件をつけ加えると要請の (2) もみたすのである。すなわち、

命題 (2.1)-ファイバー空間 $f: X \rightarrow Y$ のすべてのファイバーは *reduced* かつ正規交叉であると仮定すると、任意の $p \in Y$ に対して、

$$H^0(f^{-1}(p), \mathcal{H}) \cong H^1(f^{-1}(p), \mathbb{C}).$$

また、同じ仮定のもとで、

$$0 \rightarrow f_* \mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

は完全系列であり、同型

$$\Omega_X^1 / f^* \Omega_Y^1 \cong \mathcal{I}_T \Omega_{X/Y}^1(\log S)$$

が成立する。

§ 3. 結語

以上, (2.1)-ファイバー空間 $f: X \rightarrow Y$ に対して $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ の標準的延長 $\mathcal{O}$ を構成したわけであるが, このようなことを考えた動機に触れてみよう。

M を射影的曲面とし, その余接束 Ω_M^1 が ample であると仮定する。 Ω_M^1 が ample なのだから, 何らかの 単純な 方法で, M の有限次の分岐被覆 $\tilde{M}$ を構成し, $\Omega_{\tilde{M}}^1$ が大域的切断をもつようにできるのではないかと考えられる。しかし一般にベクトル束が ample だからといって上のような $\tilde{M}$ を作るのは困難である (直線束のようにはいかない)。一般のベクトル束の場合にたゞでも, Ω^1 には Hodge 理論があるから, 適当な形に Hodge 理論を言い換えることによつて $\tilde{M}$ を求めたいのである。

さて, M の一般的な Lefschetz pencil Π をとることによつて, M の blowing up M'_Π は $\mathbb{P}^1$ 上のファイバー空間となる。Lefschetz pencil の切断面に生ずる有限個の通常二重点を更に

blow up して M_π を得る。 $r: M_\pi \rightarrow M'_\pi$,
 $f_\pi: M'_\pi \rightarrow \mathbb{P}^1$ を自然な写像とすると, 完全
 系列

$$0 \rightarrow r^* f_\pi^* \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(E) \rightarrow r^* \Omega_{M'_\pi} \rightarrow r^* (\mathcal{J}_T \Omega_{M'_\pi/\mathbb{P}^1}^1(\log S)) \rightarrow 0$$

が自然に定義され, Ω_M^1 が ($\Omega_{M'_\pi}^1$ ではない)
 ample なら $r^*(\mathcal{J}_T \Omega_{M'_\pi/\mathbb{P}^1}^1(\log S))$ が ample な
 直線束になるのである。ここに, S, T は
 (2.1)-ファイバー束 $f_\pi: M'_\pi \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して §2
 の記号を流用した。また E は T の r による逆
 像 (例外曲線の束) である。この直線束
 $r^*(\mathcal{J}_T \Omega_{M'_\pi/\mathbb{P}^1}^1(\log S))$ を用いて $\tilde{M}$ が構成でき,
 更に次の定理を究極的に示すことができる。

定理: Ω_M^1 が ample ならば, $\pi_1(M)$ は無限群。