

非線形半群について

お茶の水大 理 高村幸男

Hilbert 空間 H 上の (必ずしも線形でない) 縮小作用素
の作る半群 (以下單に半群という) :

$$1) \quad T_0 = I, \quad T_{t+s} = T_t \cdot T_s \quad t, s \geq 0$$

$$2) \quad T_t x \rightarrow T_{t_0} x \text{ (強)}, \quad t \rightarrow t_0, \quad t, t_0 \geq 0$$

$$3) \quad \|T_t x - T_t y\| \leq \|x - y\|$$

を論ずること, 特に Hille-Yosida の定理を得ることが目的
である。(条件 3) は

$$3') \quad \|T_t x - T_t y\| \leq e^{kt} \|x - y\|$$

でおきかえることができるが, 簡單のため 3) の下で論ずる
ことにする。)

Hilbert 空間 H における (多価) 写像 A が dissipative
であるとは, $x, y \in D(A)$ のとき

$$\operatorname{Re} \langle x - y, x' - y' \rangle \leq 0, \quad x' \in Ax, \quad y' \in Ay$$

を意味する。このような A について $(I - \lambda A)^{-1}$ は $\lambda > 0$ のとき Lipschitz 連続: $\|(I - \lambda A)^{-1}x - (I - \lambda A)^{-1}y\| \leq \|x - y\|$ である。

Dissipative な A が極大であれば、任意の $\lambda > 0$ に対し $(I - \lambda A)^{-1}$ は H 全体で定義され、逆にある $\lambda > 0$ に対し $(I - \lambda A)^{-1}$ が H 全体で定義されるような dissipative な A は極大である。

A が極大 dissipative であれば、任意の $x \in D(A)$ について Ax は H の閉かつ凸な部分集合である。従って

$$x'_0 \in Ax, \quad \|x'_0\| = \inf \{\|x'\| : x' \in Ax\}$$

なる x'_0 が唯一存在する。よって A の canonical restriction A° を

$$A^\circ x = x'_0$$

によって定める。明らかに $D(A) = D(A^\circ)$ である。

半群 $\{T_t\}$ の生成作用素は右微分 D^+ を用いて次のように定義される:

$$A_0 x = D^+ T_t x \Big|_{t=0} \quad (= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T_h x - x)).$$

我々は線形の場合と同様に

条件 1), 2) を満たす $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 が $D(T_t)$ で dense に定義されているとする。そのとき A_0 が dissipative であることと、 $\{T_t\}$ が縮小条件 3) を満

なすこととは同等である,
を示すことができる。また Hilbert 空間において (reflexive Banach 空間においても) 絶対連続な函数は不定積分で表されること, 条件 3) から $\|T_{t+h}x - T_t x\| \leq \|T_h x - x\|$ なること, を用いて

$x \in D(A_0)$ ならば $T_t x$ は殆んどいたる所微分可能で, $\frac{d}{dt} T_t x = A_0 x$ (a. e. t), $T_t x = x + \int_0^t A_0 T_s x ds$ を得る。

我々の問題は 1) いかなる作用素 A が半群を生成するか, 即ち, 適当な条件の下で

$$D^+ u(t) = A u(t)$$

を解くことと 2) 半群はその定義域で dense に定義された生成作用素をもつか, というものである。1) については定理 1, 2 において, 2) については定理 3, 4 において考察する。

定理 1. A が極大 dissipative ならば

$$4) \begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) \in A u(t) & \text{a. e. } t \\ u(0) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

の (絶対連続な) 解 $u(t)$ が一意に存在する。

補題 1. A を極大 dissipative とする. $x_n \in D(A)$,
 $x'_n \in Ax_n$ であって

$$x_n \rightarrow x \text{ (強)} \quad x'_n \rightarrow x' \text{ (弱)}$$

ならば, $x' \in Ax$, $x \in D(A)$ である. 特に, $x_n \rightarrow x$
 (強), $\{x'_n\}$ 有界, ならば $x \in D(A)$ である.

証)

A のグラフ $\{(y, y') : y \in D(A), y' \in Ay\}$ に (x, x')
 をつけ加えたものをグラフとする寫像を $\bar{A}$ とする.

$$\operatorname{Re} \langle x - y, x' - y' \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \langle x_n - y, x'_n - y' \rangle \leq 0$$

$$y \in D(A), y' \in Ay$$

であるから $\bar{A}$ は dissipative な A の拡張である. A は極
 大であるから $\bar{A} = A$. $\{x'_n\}$ が有界な場合は弱収束部分列
 $\{x'_{n_k}\}$ をとればよい.

定理 1 の証明の概略)

I) 寫像 $A_n : x - \frac{1}{n}x' \rightarrow x' \quad x \in D(A), x' \in Ax$
 を作ると, $D(A_n) = H$ であって, さらに A_n は Lipschitz
 連続 (従って - 価) :

$$\|A_n v - A_n w\| \leq n \|v - w\|.$$

よって $x'_0 \in Ax_0$ を一つ固定して

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_n(t) = A_n u_n(t) \\ u_n(0) = x_0 - \frac{1}{n} x'_0 \end{cases}$$

の解 $u_n(t)$ は一意に存在する. また A_n は dissipative であり

$$\|A_n u_n(t)\| \leq \|A_n u_n(s)\| \quad t \geq s \geq 0$$

が成立する.

II) $\{u_n(t)\}$ は (ノルムに関して) 広義一様にある連続函数 $u(t)$ に収束する. $v_n(t) = (I - \frac{1}{n} A)^{-1} u_n(t)$ とおけば

$$\|v_n(t) - u(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{広義一様}$$

$$A_n u_n(t) \in A v_n(t)$$

III) $t_0 > 0$ を固定する. H の値をとる可測函数 f で,

$$\|f\|^2 = \int_0^{t_0} \|f(t)\|^2 dt < \infty$$

なるものの全体のなす Hilbert 空間を $L_H^2[0, t_0]$ と記す.

A を $L_H^2[0, t_0]$ に自然に拡大したものを $\widetilde{A}$ とすれば, $\widetilde{A}$ はやはり極大 dissipative になる. $A_n u_n$ は有界であるから, $L_H^2[0, t_0]$ において弱収束するような部分列 $A_{n_k} u_{n_k}$ をとれば

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad (\text{強}) \quad \text{in } L_H^2[0, t_0]$$

$$A_{n_k} u_{n_k} \longrightarrow \exists w \quad (\text{弱}) \quad \text{in } L_H^2[0, t_0]$$

であるから, 補題 1 により

$$w \in \widetilde{A} u \quad \text{即ち} \quad w(t) \in A u(t) \quad \text{a. e. } t.$$

IV) $u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t A_n u_n(s) ds$ であって

$$u_n(t) \longrightarrow u(t) \quad (\text{強}) \quad u_n(0) \longrightarrow x_0 \quad (\text{強})$$

$$A_{n_k} u_{n_k} \longrightarrow w \quad (\text{弱}) \quad \text{in } L_H^2[0, t_0]$$

より

$$u(t) = x_0 + \int_0^t w(s) ds.$$

よって $u(t)$ は絶対連続で

$$\frac{d}{dt} u(t) = w(t) \in Au(t) \quad \text{a. e. } t.$$

V) 解の一意的性は, u^1, u^2 を解とすると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|u^1(s) - u^2(s)\|^2 &= 2 \operatorname{Re} \langle u^1(s) - u^2(s), \frac{d}{ds} u^1(s) - \frac{d}{ds} u^2(s) \rangle \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \|u^1(t) - u^2(t)\|^2 &= \|u^1(0) - u^2(0)\|^2 + \int_0^t \frac{d}{ds} \|u^1(s) - u^2(s)\|^2 ds \\ &\leq \|u^1(0) - u^2(0)\|^2, \end{aligned}$$

であるから明らか.

定理2. 前定理の u は次式を満たす:

$$D^+ u(t) = A^0 u(t),$$

かつ $D^+ u(t)$ は右連続である.

(証明の概略)

$t=0$ のとき. 前定理の証明において, $x'_0 = Ax_0$ とおけば, $u_n(0) = x_0 - \frac{1}{n} x'_0$ であるから

$$\|A_n u_n(t)\| \leq \|A_n u_n(0)\| = \|A^0 x_0\|,$$

$$u_n(h) - u_n(0) = \int_0^h \frac{d}{dt} u_n(t) dt = \int_0^h A_n u_n(t) dt$$

より

$$\frac{1}{h} \|u_n(h) - u_n(0)\| \leq \|A^0 x_0\|.$$

よって

$$\frac{1}{h} \|u(h) - u(0)\| \leq \|A^0 x_0\|.$$

一方 $u(t) \in D(A)$, $\frac{d}{dt} u(t) \in A u(t)$ なる t は dense に存在するから

$$u(t_n) \in D(A), \quad \frac{d}{dt} u(t_n) \text{ は弱収束}$$

なる $t_n \downarrow 0$ をとれば

$$u(t_n) \longrightarrow u(0) \text{ (強)} \quad \frac{d}{dt} u(t_n) \longrightarrow \exists y \text{ (弱)}$$

より補題1を用いて

$$y \in A u(0), \quad \|y\| \leq \|A^0 u(0)\|.$$

A^0 の定義より $y = A^0 u(0)$. また

$$\|\frac{d}{dt} u(t_n)\| \longrightarrow \|y\|, \quad \frac{d}{dt} u(t_n) \longrightarrow y \text{ (弱)}$$

より

$$\frac{d}{dt} u(t_n) \longrightarrow A^0 u(0) \text{ (強)}.$$

この図形は、測度0を除いた集合から任意に選んだ $t_n \downarrow 0$ について成立する。よって

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{d}{dt} u(t) dt \longrightarrow A^0 u(0), \quad h \downarrow 0.$$

$t > 0$ のとき. $t_n \rightarrow t$, $u(t_n) \in D(A)$ とすれば,

$$u(t_n) \longrightarrow u(t) \text{ (強)} \quad \text{かつ} \quad \left\{ \frac{d}{dt} u(t_n) \right\} \text{ は有界, } \subset D(A).$$

よって補題1より $u(t) \in D(A)$. 解の一意性より $u(t)$ を初期値とする解を考えれば $t=0$ の場合にも帰着される。

さて我々は半群が *dense* な事では十分可能かどうかを論ずるわけであるが、その爲には半群の定義域についての条件が必要である。線形の場合には、半群の定義域が閉部分空間になるように拡張出来るから、半群の定義域は全空間として一般性を失わない。しかし、非線形の場合には、 $D(T_t) \neq H$ でありながら、縮小条件 3) の下ではそれ以上拡張出来ないような半群 $\{T_t\}$ が存在する。従って我々は、それ以上拡張出来ない半群 (極大半群 と呼ぶことにする) を考察の対象とする。任意の半群は極大な拡張をもつ。

定理 3. 極大半群 $\{T_t\}$ の定義域は凸かつ閉である。

(閉であることの証明)

$x \in \overline{D(T_t)}$ に対し $x_n \in D(T_t)$, $x_n \rightarrow x$ (強)

なる x_n をとれば

$$\|T_t x_n - T_t x_m\| \leq \|x_n - x_m\|$$

より $\{T_t x_n\}$ は Cauchy 列で、その極限 $u(t)$ は $u(0) = x$ であって $\{x_n\}$ の送り方によらない。

$$T_t y = \begin{cases} T_t y & y \in D(T_t) \\ u(t+s) & y = u(s) \end{cases}$$

とおけば $\{\tilde{T}_t\}$ は $\{T_t\}$ の拡張であるから $\{T_t\}$ の極大性から $\tilde{T}_t = T_t$. 即ち $x \in D(T_t)$.

凸である証明は大変複雑である。次の補題を必要とする。

補題 2. Hilbert 空間 H において, 2 組の球の族

$$S(y_\alpha, r_\alpha) = \{x : \|x - y_\alpha\| \leq r_\alpha\} \quad \alpha \in P$$

$$S(y'_\alpha, r_\alpha) = \{x : \|x - y'_\alpha\| \leq r_\alpha\} \quad \alpha \in P$$

があるとする。もし

$$\|y'_\alpha - y'_\beta\| \leq \|y_\alpha - y_\beta\|, \quad \bigcap_{\alpha \in P} S(y_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset$$

ならば

$$\bigcap_{\alpha \in P} S(y'_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset.$$

(証明は Minty [10] 参照)

凸であることの証明の方針)

I) $D(T_t)$ の凸閉包を Ω とする。補題 2 を用いて, $T_{2^{-k}}$ の Ω への (縮小作用素である) 拡張が少なくとも一つ存在することがわかる。但し k は任意に固定された自然数とする。その拡張の集合を $\{U_k^\alpha : \alpha \in P\}$ とする:

$$U_k^\alpha = T_{2^{-k}} \text{ on } D(T_t), \quad \|U_k^\alpha x - U_k^\alpha y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega.$$

U_k^α から Ω における discrete parameter $t = 0, 2^{-k}, 2 \cdot 2^{-k}, \dots$

をもつ半群 $\{T_t^\alpha\}$ が

$$T_{j2^{-k}}^\alpha = (U_k^\alpha)^j \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

によって定められる。明らかに $T_t^\alpha = T_t$ on $D(T_t)$, $t = j2^{-k}$.

この半群の集合 $\{T_t^\alpha\}$ を τ_k と記す.

II) $z \in \Omega$ を固定すると $\{T_t^\alpha z : \alpha \in T\}$ は同等連続,
即ち $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

$$\|T_{2^{-k}}^\alpha z - z\| < \varepsilon \quad \{T_t^\alpha\} \in \tau_k, \quad 2^{-k} < \delta.$$

III) $x \in \Omega$ を固定すると, 任意の $\lambda > 0, T^\alpha \in \tau_k$ に対し

$$y_k^\alpha(\lambda) = (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x, \quad A_k^\alpha = 2^k (T_{2^{-k}}^\alpha - I),$$

となる $y_k^\alpha(\lambda) \in \Omega$ が存在する. λ を固定したとき $y_k^\alpha(\lambda)$ は有界, 従って $\varphi = (\alpha, k)$ を要素とする集合の ultrafilter

重で $\lim_{\underline{\varphi}} k = \infty$ なるものをとると

$$y(\lambda) = w\text{-}\lim_{\underline{\varphi}} (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x$$

が存在する.

IV) 任意に $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega, \varepsilon > 0$ をとる. 適当に $\alpha, k (> k_0)$ をとると

$$\|y^i(\lambda) - y_k^{\alpha, i}(\lambda)\| < \varepsilon,$$

ただし

$$y_k^{\alpha, i}(\lambda) = (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x_i,$$

$$y^i(\lambda) = w\text{-}\lim_{\underline{\varphi}} (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x_i.$$

このことから, 適当な filter 重をとれば, 任意の $x \in \Omega$ に対し

$$y(\lambda) = \lim_{\underline{\varphi}} (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x$$

が存在する. この重を用いて (多価) dissipative 写像 $A^{(\lambda)}$

を定める。即ち上の関係式を用いて

$$y(\lambda) = (I - \lambda A^{(\lambda)})^{-1} x.$$

Ⅱ に因する収束が強収束であることから

$$A^{(\lambda)} \subset A^{(\mu)} \quad \lambda > \mu > 0$$

が得られるので $A = \bigcup_{\lambda > 0} A^{(\lambda)}$ として (多価) dissipative,

$D(A)$ は Ω の中で dense, かつ

$$D((I - \lambda A)^{-1}) \supset \Omega \quad \lambda > 0$$

なる A が得られる。

V) 上の A を用いて定理 1 と同様に

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) \in A u(t) \\ u(0) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

の解を Ω の中に作る事が出来る。 $x_0 \in D(T_\tau)$ ならば

$u(t) = T_\tau x_0$ となる。 $x_0 \notin D(T_\tau)$ ならば

$$\tilde{T}_\tau x_0 = \begin{cases} T_\tau x, & x \in D(T_\tau) \\ u(\tau+s), & x = u(s), \end{cases}$$

とおけば $\{\tilde{T}_\tau\}$ は $\{T_\tau\}$ の真の拡張であるから $\{T_\tau\}$ が極大であることに矛盾する。 $D(T_\tau) \neq \Omega$ ならば $D(A) \subset \Omega$ にならないことに注意する。

上に得られた A は $D(T_\tau) = \Omega$ ならば一意 (Ⅱ による) であり、 $x \in D(A)$ ならば $T_\tau x$ は右微分可能。

$D(A)$ は Ω で dense であるから次の定理を得る.

定理 4. 半群 $\{T_t\}$ の定義域が凸かつ閉, 特に $\{T_t\}$ が極大, ならば $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 の定義域 $D(A_0)$ は $D(T_t)$ で dense である.

以上をまとめて

非線形の Hille-Yosida の定理.

1) 極大な半群 $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 は $\{T_t\}$ の定義域で dense に定義されている. またクラス $\{B^0 : B \text{ は極大 dissipative}\}$ の中で極大である.

2) $\{B^0 : B \text{ は極大 dissipative}\}$ なるクラスの中で極大な任意の A^0 に対し A^0 を生成作用素とする半群 $\{T_t\}$ が唯一存在する. その半群は

$$D^+ T_t x = A^0 T_t x, \quad x \in D(A^0)$$

を満たす.

References

- [1] M. Crandall & A. Pazy, Nonlinear semigroups of contractions and dissipative sets, *J. Funct. Anal.*, to appear.
- [2] M. Crandall & A. Pazy, On the generation of nonlinear semigroups of contractions in Hilbert space, to appear.
- [3] M. Crandall, On accretive and dissipative sets in Banach spaces, to appear.
- [4] J. Dorroh, A nonlinear Hille-Yosida-Phillips Theorem, to appear.
- [5] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (1967), 508-520.
- [6] T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, to appear.
- [7] T. Kato, On the generators of nonlinear semigroups, to appear.
- [8] Y. Kōmura, Nonlinear semigroups in Hilbert space, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (1967), 493-507.
- [9] Y. Kōmura, Differentiability of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Japan*, to appear.
- [10] G. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. *Duke Math. J.*, 29 (1962), 341-346.
- [11] I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semigroups, to appear.
- [12] I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semigroups II, to appear.
- [13] S. Oharu, Nonlinear semigroups in Banach space, to appear.