

Semi-positivity

東大 理 趙 康治

この § では次の定理を証明する.

定理 X, Y ; complete non-singular projective varieties

$f: X \rightarrow Y$; fiber space

で次の条件を満たすものとする.

(i) $Y \supset Y_0$. Zariski-open set で $D \stackrel{\text{def}}{=} Y - Y_0$ は正規交叉因子とする.

(ii) $X_0 \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(Y_0)$ $f_0 \stackrel{\text{def}}{=} f|_{X_0}$ とすると, $X - X_0$ は正規交叉因子で f_0 は smooth.

(iii) $n = \dim X - \dim Y$ とする.

$R^n f_{0*} \mathcal{O}_{X_0}$ の D のまわりの local monodromy は unipotent.

このとき $f_* K_{X/Y}$ は locally free かつ semi-positive. 但し, $K_{X/Y} \stackrel{\text{def}}{=} K_X \otimes (f^* K_Y)^{\otimes -1}$. K_X, K_Y はそれぞれ X, Y の canonical invertible sheaf.

Definition: complete normal algebraic variety X 上の locally free sheaf $\mathcal{F}$ が semi-positive であるとは.

- (i) C : 任意の非特異射影曲線
 - (ii) $\varphi: C \rightarrow X$ 任意の morphism
 - (iii) $\varphi^*\mathcal{F}$ の 任意の quotient invertible sheaf $\mathcal{Q}$
- に対して $\deg_C \mathcal{Q} \geq 0$ が成り立つこと.

最初に Variations of Hodge Structure の復習をする.

$$\mathcal{H}_0 \stackrel{\text{def}}{=} (R^n f_{0*} \mathcal{O}_{X_0})_{\text{prim}} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}, \quad \mathcal{F}_0 \stackrel{\text{def}}{=} f_{0*} K_{X_0/Y_0}.$$

'prim' は primitive part を表わす.

このとき $\mathcal{H}_0$ には Hodge filtration $\{F^p\}_{0 \leq p \leq n}$ が入り, $\mathcal{F}_0 = F^n(\mathcal{H}_0)$ となる.

さて $\mathcal{H}_0$ は次のようにして 標準的に Y 上のある locally free sheaf $\mathcal{H}$ に拡張出来る:

$p \in D$, p での small open neighborhood U を充分小さくとり $U \cong \Delta^d$, $U \cap Y_0 \cong \Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$

とする. ここで $d = \dim Y$, Δ は disc, $\Delta^* = \Delta - \{0\}$

p のまわりの local coordinates を $(t_1, \dots, t_d)$

D の local equation を $t_1 \cdots t_e = 0$ とする.

H を上半平面とすると $H^e \times \Delta^{d-e}$ は $\Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$ の universal covering で, covering map π は次の様になる.

$$\pi: H^e \times \Delta^{d-e} \longrightarrow \Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$$

$$(z_1, \dots, z_e, t_{e+1}, \dots, t_d) \longmapsto (\exp 2\pi i z_1, \dots, \exp 2\pi i z_e, t_1, \dots, t_d)$$

このとき $\pi^* \mathcal{H}_0$ は trivial. 以下 line bundle と invertible sheaf を同一視する. $\pi^* \mathcal{H}_0$ の fiber を H_c とすると,

$\mathcal{H}_0$ は $H_c \times H^e \times \Delta^{d-e} / \sim$ と同一視出来る.

但し. $(v, z, t) \sim (v', z', t')$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} v &= \gamma_i v' & \gamma_i &\in \pi_1(\Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}) \text{ は } t_i=0 \\ z_j &= z'_j & (j \neq i) & \text{ のまわりの local monodromy.} \\ z_i &= z'_i + 1 & & \\ t &= t' & & v: H_c\text{-valued hol. function} \end{aligned}$$

従って $s \in \mathcal{H}_0(\mathcal{U} \cap Y_0)$ は $v(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_e, t)$
 $= \gamma_i v(z_1, \dots, z_e, t)$ をみたす ある H_c -valued
 holomorphic function と $|t|$ に対応する.

$$\text{さて } v^*(z, t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\sum_{i=1}^e z_i N_i\right) v(z, t)$$

$$N_i = \log \gamma_i \quad (i=1, \dots, e) \text{ とすると}$$

$$v^*(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i+1, z_{i+1}, \dots, z_e, t) = v^*(z, t)$$

よって v^* は $\mathcal{U} \cap Y_0$ 上の holomorphic H_c -valued function と見なせる.

$$\text{故に } \mathcal{H}_0 \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U} \cap Y_0} \otimes H_c$$

この isomorphism によって $\mathcal{H}_0$ は U 上に延長出来る.

即ち, $\Omega \in \mathcal{H}_0(U \cap Y_0)$

$$\Omega = \sum_{i=1}^m f_i \Omega_i \quad \begin{array}{l} f_i: \text{multi-valued holomorphic} \\ \text{function} \end{array}$$

$\Omega_i: \text{multi-valued flat section}$

とすると, $\Omega = \sum_{i=1}^m f_i \exp(\sum_{j=1}^e z_j N_j) \exp(-\sum_{j=1}^e \bar{z}_j N_j) \Omega_i$ が

成り立つから, Ω が U 上にのびる $\Leftrightarrow f_i$ は D に沿

って高々 logarithmic singularity をもつ.

また Nilpotent Orbit Theorem によって $\{F^p\}$ も

U 上に拡張出来る. 拡張した filtration も同じく $\{F^p\}$

とかく. $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} F^n(\mathcal{H})$ $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}_0 = f_{0*} K_{X/Y_0}$ の延長である.

主張: $\mathcal{F} = f_* K_{X/Y}$.

$$\Omega = \sum f_i \Omega_i \quad (f_i, \Omega_i \text{ は } \mathcal{F}_0 \text{ と同じもの.})$$

を D に沿う $\mathcal{F}_0$ の rational section とする.

$$\int_{X_*} \Omega \wedge \bar{\Omega} = \sum a_{ij} f_i \bar{f}_j$$

$$a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{X_*} \Omega_i \wedge \bar{\Omega}_j \quad \text{ここで } \Omega_i \text{ 達は flat, } X_* \text{ は}$$

C^∞ -多様体と見做す"同型"であるから a_{ij} は

定数.

$$\Omega \in \Gamma(U \cap Y_0, f_{0*} K_{X_0/Y_0})$$

$$= \Gamma(f_0^{-1}(U \cap Y_0), \mathcal{H}om(f_0^* K_{Y_0}, K_{X_0}))$$

$$f_0^*(dt) \in \Gamma(f_0^{-1}(U \cap Y_0), f_0^* K_{Y_0}) \quad dt = dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$$

$f_0^*(dt)$ は明らかに $f^*(dt) \in \Gamma(f^{-1}(U), f^* K_Y)$ にも属する。

$$\Omega(f_0^* dt) \in \Gamma(f_0^{-1}(U \cap Y_0), K_{X_0})$$

従って Ω が $\Gamma(U, f_* K_{X/Y})$ の元にも属する。

$$\Leftrightarrow \Omega(f_0^* dt) \text{ が } \Gamma(f^{-1}(U), K_X) \text{ の元にも属する。}$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_{f^{-1}(U \cap Y_0)} \Omega(f_0^* dt) \wedge \overline{\Omega(f_0^* dt)} \right| < \infty \quad (\text{Sakai})$$

$$\Leftrightarrow \left| \iint_{\substack{X_t \\ U \cap Y_0}} \Omega \wedge \overline{\Omega} \right| < \infty$$

$$\Leftrightarrow \left| \sum_{i,j} \int_{X_t} f_i \overline{f_j} dt \wedge d\overline{t} \right| < \infty$$

$\Leftrightarrow f_i$ は高々 logarithmic singularity を持つ。

$\Leftrightarrow \Omega$ が $\mathcal{F}$ の section に拡張出来る。

$$\text{即ち, } \mathcal{F} = f_* K_{X/Y}$$

g.e.d.

(2) D_1 : D の irreducible component とする.

$$D_1^\circ \stackrel{\text{def}}{=} D_1 - \overline{(D - D_1)}$$

U : D_1 の small open nbd.

$$U^\circ \stackrel{\text{def}}{=} U - \overline{(D - D_1)}$$

γ_1 : $\mathcal{H}|_{U^\circ}$ の D_1 のまわりの local monodromy.

このとき $\mathcal{H}|_{U^\circ}$ 上に ascending filtration $\{W_\ell\}_{0 \leq \ell \leq 2n}$

が存在して

$$(i) \quad N(W_\ell) \subset W_{\ell-2} \quad N = \log \gamma_1$$

$$(ii) \quad N^\ell: G_{r, n+\ell}^W(\mathcal{H}|_{U^\circ}) \xrightarrow{\sim} G_{r, n-\ell}^W(\mathcal{H}|_{U^\circ}) \quad \ell \geq 0$$

また $G_r^W(\mathcal{H}|_{U^\circ})$ 上で $\gamma_1 \equiv 1$ であるから $\{W_\ell\}$ は $\mathcal{H}|_{U^\circ}$ 上の U° , $G_r^W(\mathcal{H}|_{U^\circ})$ は もとの Gauss-Manin connection

から誘導された flat connection を持つ.

$\{W_\ell\}$, $\{F^p\}$ は $\mathcal{H}|_{D_1^\circ}$ 上に variation of mixed Hodge structure を定める. 即ち $\{F^p\}$ は $G_r^W(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$ 上に variation of Hodge structure を定める. 但し polarization はない.

$$P_\ell^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } N^{\ell-n+1} \quad N^{\ell-n+1}: G_{r, \ell}^W(\mathcal{H}|_{D_1^\circ}) \longrightarrow G_{r, 2n-\ell-2}^W(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$$

($\ell \geq n$) $\ell < n$ のときは $P_\ell^\circ = 0$ とおくと.

P_ℓ° ($n \leq \ell \leq 2n$) は polarization S_ℓ を持つ variation of Hodge structures となる. 但し, S_ℓ は次の様に定義される:

$y \in D_1^\circ$, $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{P}_2^\circ, y$ とする.

u, v を $W_\ell(\mathcal{H}|_{\sigma^{-1}D})$ の multi-valued flat sections で, $\tilde{u}, \tilde{v}$ に行く $G_{r,\ell}^W(\mathcal{H}|_{\sigma^{-1}D})$ の flat sections を誘導するものと仮定する.

$\delta_\ell(\tilde{u}, \tilde{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(u, N^{\ell-n}v)$ δ は元々の polarization
 $\mathcal{P}_2^\circ$ はおと同様な議論によって D_1 上の $\mathcal{P}_2$ へのもの.

一方 $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$ も $\mathcal{H}|_{D_1}$ の locally free subsheaves $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1})$ へのもの.

このとき $G_{r,\ell}^W(\mathcal{F}|_{D_1^\circ}) = F^n(\mathcal{P}_2^\circ)$

∴ $\subset$ は明らか. $\subset$ を示す.

$$x \in F^n \cap W_\ell. \quad N^{\ell-n+1}x \in F^{2n-\ell-1} \cap W_{2n-\ell-2} \\ = F^{2n-\ell-1} \cap W_{2n-\ell-2}.$$

$$\left(\because F^{2n-\ell-1} G_{r,2n-\ell-2}^W = 0 \right)$$

■

さて $\deg_C Q \geq 0$ を証明する.

(i) $\varphi(C) \cap Y_0 \neq \emptyset$ とする.

$h(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(u, \tilde{v})$ $u, v \in \mathcal{F}_0, y \in Y_0$ により
 $\mathcal{F}_0$ 上に positive definite hermitian metric を定義する.
 δ は $\mathcal{H}_0$ の polarization.

$$C_0 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(Y_0).$$

$Q|_{C_0}$ には h から誘導された hermitian metric h_Q が入る. Griffiths により, Θ は positive semi-definite 従って Θ_Q も positive semi-definite になる.

但し, Θ は h に associate (た) metric curvature.

Θ_Q h_Q に associate (た) metric curvature.

一方, Schmid により $h(v_p, v_p) = O(|t|^{-2\alpha'_p} |\log t|^{\beta'_p})$

$v_p: \mathcal{H}_0$ の uniformizing section, $p \in D$.

$\alpha'_p > 0, \beta'_p \geq 0$ と なる こと が わ か る か ら.

$$h_Q(v_p, v_p) = O(|t|^{-2\alpha'_p} |\log t|^{\beta'_p})$$

$v_q: Q$ の uniformizing section $q \in C - C_0$.

t は q の local coordinate

$\alpha_q \geq 0, \beta_q \geq 0$ と なる.

従って 次の lemma から $\deg_C Q \geq 0$ と なる.

Lemma: $\mathcal{L}$: 非特異射影曲線 C 上の invertible sheaf

$C \supset C_0$ Zariski-open set.

h : hermitian metric on $\mathcal{L}|_{C_0}$

$\Theta = \bar{\partial} \partial \log h$ metric connection

$p \in C - C_0$.

$t_p: \mathbb{P}^1$ の local coordinate

δ

p の近所の uniformizing section を v_p とする.

このとき $h(v_p, v_p) = O(|t|^{-2\alpha_p} |\log t|^{\beta_p})$ が成り立つならば ($\alpha_p \geq 0, \beta_p \geq 0$)

$$\deg_c L = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{C_0} \Theta + \sum_{p \in C-C_0} \alpha_p$$

(1) $U_p = \{z : |t_p(z)| < \varepsilon\} \quad p \in C - C_0$.
 h を U_p 内で "H" 変形して L 上の metric h' を作る. $\Theta' = \bar{\partial} \partial \log h'$

$$\deg_c L = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_C \Theta' = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{C - \bigcup_p U_p} \Theta + \sum_{p \in C-C_0} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{U_p} \Theta'$$

Stokes の定理 によつて.

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{U_p} \Theta' = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\partial U_p} \partial \log h(v_p, v_p) \quad (\because h = h' \text{ on } \partial U_p)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h}{\partial \log r} d\theta \quad t_p = r e^{2\pi i \theta}$$

$$\text{故に } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h}{\partial \log r} d\theta = -2\alpha_p$$

これから 上の公式が出る. ■

(ii) $\varphi(C) \subset D_1$, $\varphi(C) \cap D_1^\circ = \emptyset$ の場合.

$$\varphi^* \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{Q} \rightarrow 0$$

$$\neq 0 \quad \varphi^* W_{d-1}(\mathcal{F}) \subset \ker g, \quad \varphi^* W_d(\mathcal{F}) \not\subset \ker g$$

となるから, $\varphi^* G_{r,d}^w(\mathcal{F}|_{D_1}) \rightarrow \mathcal{Q}$ なる non-zero homomorphism が誘導される. $\mathcal{Q}'$ をこの homomorphism の像とする. (i) の議論において $\mathcal{F} = F^n(\mathcal{H})$ のかわりに $G_{r,d}^w(\mathcal{F}|_{D_1}) = F^n(\mathcal{P}_d) \subset \mathcal{P}_d$ を使えば, $\deg_C \mathcal{Q}' \geq 0$ が証明出来る. 故に $\deg_C \mathcal{Q} \geq \deg_C \mathcal{Q}' \geq 0$

(iii) D_2 : D の他の irreducible component.

$$D_2 = D_1 \cap D_2$$

$$D_{12}^\circ = \overline{D_2 - (D - D_1 - D_2)}$$

$\varphi(C) \subset D_{12}$, $\varphi(C) \cap D_{12}^\circ \neq \emptyset$ の場合も.

(ii) と同様に証明出来る.

以下, $\varphi(C)$ と D の包含関係によって帰納的に証明出来る.

参考文献:

- Fujita: On Kähler fiber spaces over curves
 J. Math. Soc. Japan, 30, (1978), 779-794
- Griffiths: Periods of integrals on algebraic
 manifolds III, Publ. Math., I.H.E.S., 38 (1970)
 125-180
- Sakai: Kodaira dimensions of complements of
 divisors, Complex Analysis and
 Algebraic Geometry, 1977, Iwanami, 239-257
- Schmid: Variation of Hodge structure
 ; the singularities of period mapping
 Inv. Math. 22 (1973), 211-319