

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	ながお けんたろう 長尾 健太郎
学位 (専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) K-theory of quiver varieties, q-Fock space and nonsymmetric Macdonald polynomials (簾多様体の同変 K 群と q-Fock 空間、 及び非対称 Macdonald 多項式)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 中島 啓 教授 向井 茂 教授 有木 進 准教授

理 学 研 究 科

(論文内容の要旨)

簾多様体は、主査の中島が導入した多様体で、そのホモロジー群上にカツ・ムーディー・リー代数の、また同変 K 群の上には対応する量子ループ代数の表現の構造を与えられることが知られている。特に、この論文で取り扱われているアファイン型の簾多様体の場合には、アファイン・リー代数のループ代数を量子変形したものとして、量子トロイダル代数の表現が実現される。しかし、構成は一般の簾多様体についてなされているので、特別な型のときにどのような表現が現れるかを具体的に調べるということは、また別の問題であり、本論文で得られた結果は、そういった方向にある。

斎藤-竹村-Uglov と Varagnolo-Vasserot によって、純粋に代数的な方法でアファインの A 型の量子トロイダル代数の表現を構成することができている。これは、無限次元のベクトル空間の半無限次の外積代数である、フォック空間の上に Dunkl-Cherednik 作用素とよばれるものを用いて構成されるものである。フォック空間自体は、量子アファイン代数の表現の構成のために柏原・三輪・Stern が用いたものであるが、量子変形前のアファイン代数の表現の構成となると、さらに遡り、多くの研究がなされている。

この論文では、これら幾何学的、純代数的な二つの構成によってできる表現が同じものであることを、表現の間に具体的な同型を構成することによって証明した。そのために、量子トロイダル代数が大きな可換代数を部分代数として含むことに着目して、その同時固有ベクトルを両者において決定した。これは、表現のベクトル空間としての基底を与えることを示し、それらを対応させることで同型を構成した。

簾多様体から作られる表現については、同変 K 群の局所化公式を通じて、簾多様体へのトーラス作用に関する固定点が同時固有ベクトルを定める。(これは、アファイン A 型の特殊事情によるが、この観察は Varagnolo-Vasserot によって、中島の一般的な構成以前にすでになされていた。) 一方で、フォック空間による表現の方では、可換代数は Dunkl-Cherednik 作用素からくるものと分かり、同時固有ベクトルは、非対称 Macdonald 多項式とよばれるものにより与えられることを本論文で示した。

次に、これらの同時固有ベクトルの間に量子代数の表現が同じになるように全単射をつける必要がある。これは、簾多様体へのトーラス作用の固定点をパラメトライズする組み合わせ論的な対象であるヤング図式と、非対称 Macdonald 多項式をパラメトライズする組み合わせ論的な対象(ある種の性質をみたす整数の列)の間の全単射になるが、フォック空間に関する研究で現れた先行研究を参考にしながら、構成した。

そして最後に、この全単射のもとで表現が同じになっていることをチェックする必要がある。これは、二つの構成の表現行列を上に見れた組み合わせ論的な記述を用いることでそれぞれ具体的にあらわすことで証明された。

(論文審査の結果の要旨)

量子アファイン展開環の有限次元表現については、幾何学的、純代数的両者からのアプローチがあり、前者から既約表現の指標公式や、後者から特別な場合の大域結晶基底の存在など、特筆すべき研究が成されてきた。それに比べて、そのループ代数版である、量子トロイダル代数の可積分表現については籐多様体を用いた幾何学的アプローチによる指標公式の計算アルゴリズムは存在するものの、具体的な構成や、大域結晶基底の存在の問題、テンソル積の定義の問題など、まだまだ未解決なことが多い。

その中で、本論文では、代数的なアプローチが存在しているアファインA型の特別な場合に、幾何学的なアプローチと代数的なアプローチを並行して調べながら、表現の構造をきわめて具体的かつ、徹底的に調べた。特に、顕著な点は大きな可換部分代数に関する同時固有ベクトルを、二つのアプローチについて比較することで、同じ表現が構成されていることを証明したことにある。同時固有ベクトルを求める問題は、可積分系の基本的な問題であり、また多くの問題において得られた同時固有ベクトルが、他の研究でも現れるきわめて重要な対象になることが多い。古くから多くの特殊関数がそのようにして得られることが知られているが、最近の研究として有名なものに、対称 Macdonald 多項式がある。これはそもそも対称多項式の空間に作用する互いに可換な差分作用素に関する同時固有ベクトルとして現れる。また Haiman により、対称 Macdonald 多項式は、複素アファイン平面上の点のヒルベルト概型の同変K群において、トーラス作用の固定点として現れることが証明され、幾何学的なアプローチと代数的なアプローチの両者が現れて、きわめて深い研究がなされた。本論文で現れた非対称 Macdonald 多項式は、対称 Macdonald 多項式の自然な拡張と考えられるものであり、それに対応する幾何学的な対象として籐多様体であらわれたことは、特筆すべきことである。Dunkl-Cherednik 作用素が、籐多様体の上のベクトル束が定める同変K群の元と解釈されたことにより、さらにこの方向で研究を深く進めることによって、Haiman の研究に類似するような多くの結果が期待できる。

また、本論文で行われた研究にあらわれたとおり、申請者が幾何学的な手法と、代数的な手法の両者をマスターして新たな研究に用いていることは特筆すべきであり、関係分野の多くの研究者に注目されており、本論文はすでに Osaka Journal of Mathematics に掲載が決定している。また、本論文に関して日本国内ですでに多くの研究集会で発表をおこなった。さらに本研究の延長として行った3次元の Calabi-Yau 代数の表現に関する籐多様体のトーラス固定点に関する研究に関して、ニューヨーク州立大学ストーブルック校で行われた国際研究集会に招待されて講演を行うなど、申請者の研究にはさらに注目が高まっている。

以上の理由により、大学院在学5年未満であるが、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認めた。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。