

$$S(y) = (1 + \varepsilon y) \ln(1 + \varepsilon y) - \varepsilon y \quad (10)$$

$$y_{\varepsilon=+} = \frac{\alpha - b}{a}, \quad y_{\varepsilon=-} = \frac{\alpha - b}{a - b} \quad (11)$$

上式で、 $\varepsilon = +$ と $\varepsilon = -$ はそれぞれ $p \rightarrow 0$, $p \rightarrow 1$ に対応している。これは図4に示した。

パラメーター q を複素数 z に拡張し、複素分配関数 $Z(z)$ を $Z(z) \equiv \exp(z \lambda_z)$ で導入する。方程式 $Z(z) = 0$ の根を求めると、 λ_q が(3)式の場合は、

$$z_n = \frac{p(1-p)}{a-bp} \left[\ln \frac{1-p}{p} + (2n+1)\pi i \right] \quad (12)$$

; ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

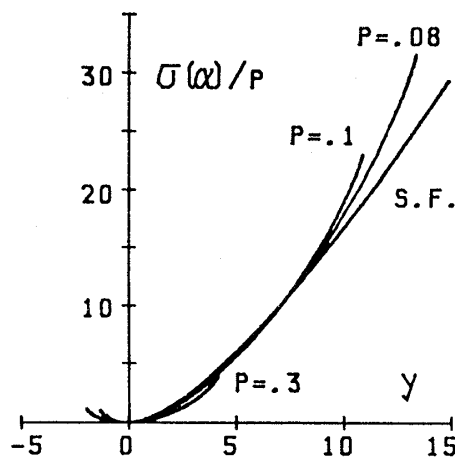


図4

ここで $i^2 = -1$, この場合、 $Z(z)$ は超越整関数であるから、根は $Z(z)$ の1位の零点と一致している。

コントロール・パラメーター p が $p \rightarrow 0$ (1)のとき根が原点に集積する。すなわち、実根の出現が転移に対応している。

29. 保存系カオスの新しいユニバーサリティ予想

早大・理工 相 沢 洋 二

保存系のカオスには、これまでもいくつかの普遍則が知られている。(Greene, Kadanoff, Mackay, etc) それらは或る種の周期軌道に注目する方法(ファイゲンバウム・アプローチ)に依存している。ここではカオスとKAMトーラスの境界に存在する新しい統計的普遍則について最近我々が得た結果をレビューする。

次の二つの基本的制約によって、KAMトーラス近傍の運動には長時間相関がある。

(a) 写像の連続性に由来する淀み運動の出現

(b) 島トーラスの階層的分布による多重エルゴード運動の出現

その結果として、たとへばトーラス付近の運動の待ち時間分布が逆ベキ則に従い、パワー・ス

ペクトルが $f^{-\nu}$ 則に従うことが計算機実験によっても明らかにされている。(本研究会の菊地一相沢「保存系のスペクトル異常指数ゆらぎと多重エルゴード性」を参考)したがって、我々は上記 (a), (b) を力学系の構造から導き出すことが理論的な課題であると考えている。これまで解明できた事柄を以下 (A), (B), (C) に述べる。

(A) ネコロシェフの定理から $f^{-\nu}$ スペクトル等の導出

トーラスの崩壊によって出現するカオス軌道が或るトーラス付近に滞在する時間は

$$T = \frac{1}{\varepsilon^a} \cdot e^{-\frac{c}{\varepsilon^b}} \quad (\varepsilon: \text{摂動}, \quad a, b, c \text{ は正})$$

である。(ネコロシェフの評価) カオス層のルベグ測度が $g(\varepsilon)$ ($g(\varepsilon \rightarrow 0) = 0$) であることから滞在時間の分布は

$$P(T) \sim T^{-a} \times (\log \text{補正})$$

となる。これよりパワー・スペクトルは $f^{-(3-a)}$ をもつことになる。

また、Last KAM の理論からやはり滞在時間がネコロシェフの評価に従うことも示せた。したがって、このことはすでに知られている Last KAM 付近の f^{-1} スペクトルがもっと広い理論的立場から理解すべきことを暗示しているように思える。しかし、なぜファイゲンバウムのアプローチがネコロシェフの摂動論と同一の結果を与えるのかについては、直感的にはまだ納得ゆかない点がある。先に述べた (b) と関係して調べてみようと考えている。

(B) 自己相似モデルによる結果

島トーラスが自己相似的に分布しているモデル (Aizawa, Prog. Theor. Phys. 71 (1984) 1419) の計算によると、トーラスサイズの分布は $v^{-(1-D')}$ ($D' < 1$)、滞在時間の分布は $T^{-1/D'}$ 、回転数のような力学量のパワー・スペクトルは $f^{-(3-1/D')}$ であり、さらに最近ファット・フラクタル指数が $2(1-D')$ 、リヤプノフ指数の分布が $\lambda = 0$ 付近で $\lambda^{1/D'-2}$ となることがわかった。いくつかの指数の間に一定の関係があることが現在行っている数値実験によってもほぼ確認されて来た。

(C) KAM 近傍の運動が非定常である事

パワー・スペクトルや滞在時間分布の特異性によって非定常性のあることはすでに主張して来たとうりであるが、さらに First Passage Time の分布 $P(\tau)$ にも特異性がある。トーラ

スの中心からの距離で一次的に表わすとき $P(\tau) \sim \tau^{-\beta} (\beta < 3/2)$ であることからトーラス付近の運動は非線形の関数で変換された fractional Brownian Motion として解釈し直すことが可能である。KAM トーラス付近の運動が Slow Diffusion であることはこのことから理解できる。

以上の解析的結果は経験的には急には受け入れ難いものも多いと思われる。しかし、たとえば保存系のリヤプノフ指数の分布は大数則、または Large Deviation 特性を満たさないという結果も含めて今後もっと整理した形式で明らかに出来ると思っている。おわりに、一応このレビューの結果の範囲内で2つの定性的な予想についてふれておくことにする。

(1) 等重率の仮定はどうか

保存系には KAM トーラスが存在するが、自由度 3 以上ではアーノルド拡散によってカオス領域は連結しているものと一応仮定しておく。その条件の下でもはたしてカオス領域に等重率の原理が成立するかどうか疑わしい。微視的詳細釣合いの原理についても、遷移時間が大きい極限をとったとしても同様と考えられる。これらは Long Tail の存在と関係しているが、直接的には保存系にはルベーグ測度以外にも漸近的に安定な測度（多重エルゴード成分）が無数に存在するという結果に起因する。

(2) 相空間の流れは粘性流か、また平均操作は意味をもつか

相空間の流れは完全流体と考えて来た。非圧縮性は測度保存性による。しかし、多重エルゴード運動や淀み運動の存在によって完全流体ではあり得ない。さらに同じ理由によって観測量の Large Deviation 特性が失われることがあり、平均の意味も再考をせまられることになる。

以上の予想はカオスと KAM の狭い境界に注目して得た普遍則をよりどころとしているので、いづれ統計力学の枠組みの中でもっと合理的に解釈されるべきものと考えているが、ここでは敢えてパラドックス的に述べた。

以 上