

Analysis of the Unsteady Navier-Stokes Equations Based  
on Green's Function Approach

名大工 桑原 真二

名大工 M. U. Farooq Shaikh

§ 1. 基礎方程式

2次元の Navier-Stokes 及び連続の方程式系は流れの関数  $\psi$  及び渦度  $\omega$  をもちいて次のように書き表わすことができる。

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{R} \nabla^2 \omega \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (1.2)$$

ここで座標  $(x, y)$ , 時間  $t$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  はそれぞれ  $L, L^2/\nu, \nu L, \nu/L$  で無次元化してある。  $\nu, L$  は代表的長さ, 長さ  $\nu$  は動粘性率である。

§ 2. 数学的定式化

Laplace オペレーターは伴随熱伝導オペレーターに対して Green 関数  $G_1(x, x')$ ,  $G_2(x, t; x', t')$  を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G_1(x, x') &= \delta^2(x - x') \equiv \delta(x - x') \delta(y - y') \\ \left( \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) G_2(x, t; x', t') &= \delta^2(x - x') \delta(t - t') \end{aligned} \right\} x, x' \in D \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1(x, x') &= G_2(x, t; x', t') = 0, \quad x \in \partial D, \quad x' \in D + \partial D \\ G_2(x, t; x', t') &= 0 \quad t \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$D$  は 2 次元の開領域,  $\partial D$  は  $D$  の境界である。

次の 2 つの Green の定理:

$$\iint_D (v' \nabla'^2 u' - u' \nabla'^2 v') d^2 x' = \int_{\partial D} \left( v' \frac{\partial u'}{\partial n'} - u' \frac{\partial v'}{\partial n'} \right) ds' \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{\infty} \iint_D \left[ v' \left( \nabla'^2 - \frac{\partial}{\partial t'} \right) u' - u' \left( \nabla'^2 + \frac{\partial}{\partial t'} \right) v' \right] d^2 x' dt' \\ &= \int_{t_0}^{\infty} \int_{\partial D} \left( v' \frac{\partial u'}{\partial n'} - u' \frac{\partial v'}{\partial n'} \right) ds' - \iint_D [u' v']_{t_0}^{\infty} d^2 x' \end{aligned} \quad (2.4)$$

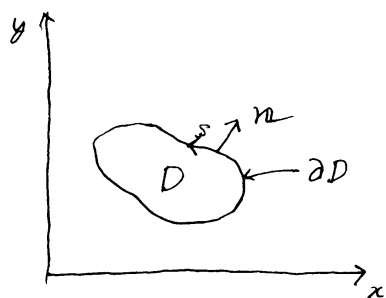
を考へて。  $n'$  は  $\partial D$  にあつる外向き法線である。 (2.3)

において

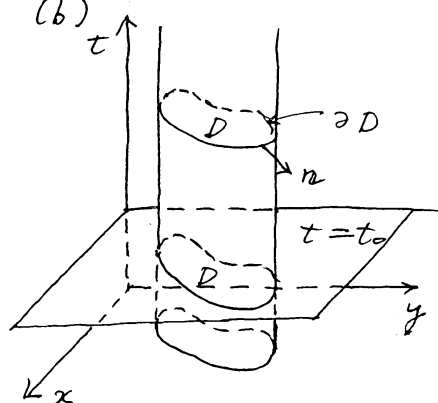
$$u' = \psi(x', t) \quad v' = G_1(x', x)$$

(2.4) において

(a)



(b)



第1図 Green の定理の適用せられし領域 (a): (2.3), (b): (2.4)

$$u' = \omega(x', t'), \quad v' = G_2(x', t'; x, t)$$

とおくと

$$\psi(x, t) = - \iint_D \omega(x', t) G_1(x', x) d^2x' + \int_{\partial D} \psi(s, t) \frac{\partial}{\partial n'} G_1(s', x) ds' \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & -R \int_{t_0}^t \iint \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')}(t') G_2(x', t'; x, t) d^2x' dt' \\ & + \int_{t_0}^t \int_{\partial D} \omega(s', t') \frac{\partial G_2}{\partial n'}(s', t'; x, t) ds' dt' \\ & - \iint_D \omega(x', t_0) G_2(x', t_0; x, t) d^2x' \end{aligned} \quad (2.6)$$

をうる。ここで  $s$  は  $\partial D$  における点、 $n$  は  $\partial D$  の外向き法線、 $\psi(s, t)$  は  $x \rightarrow s (s \in \partial D)$  の値、 $\frac{\partial}{\partial n'} G_2(s', t'; x, t)$  は  $G_2(x', t'; x, t)$  の  $x' = s'$  における外向き法線方向の微分である。

$\psi(s', t')$ ,  $\omega(s', t')$  ( $t_0 \leq t' \leq t$ ) は  $\omega(x, t_0)$  が与えられれば、(2.5), (2.6) から  $\psi(x, t)$ ,  $\omega(x, t)$  を求めることができる。初期値問題を考えるばあい、 $\omega(x, t_0)$  は初期値として与えられ、 $\partial D$  が境界のばあいには  $\psi (= 0)$  も与えられている。しかし、 $\omega(s', t')$  は直接には与えられず、一般に  $\psi$  についてのもう一つの条件  $\partial\psi/\partial n =$  境界速度を与えられるので方程式を解いて決定されることになる。

境界条件：

$$\left. \begin{aligned} \psi(s, t) &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n}(s, t) &= f(s, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

が与えられている。  $\omega$  の表式 (2.6) を (2.5) に代入し、(2.7) の第2の境界条件をもちいと

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\partial D} \omega(s', t') H_1(s', t'; s, t) ds' dt' &= -f(s, t) \\ + R \int_{t_0}^t \iint_D \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')}(t') H_2(x', t'; s, t) d^2x' \\ + \iint_D \omega(x', t_0) H_2(x', t_0; s, t) d^2x' \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1(s', t'; s, t) &= \iint_D \frac{\partial}{\partial n'} G_2(s', t'; x'', t) \frac{\partial}{\partial n} G_1(x', s) d^2x'' \\ H_2(x', t'; s, t) &= \iint_D G_2(x', t'; x'', t) \frac{\partial}{\partial n} G_1(x'', s) d^2x'' \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

をうる。(2.8)において  $\omega(s', t)$  は未知で ( $\omega(s', t')$  ( $t' < t$ ) は既知) に対する特異積分方程式である。

### §3. 2次元の箱の中の流れ

11.2<sup>2)</sup> は3方の壁が停止し一方の壁が一定速度で動く長方形の2次元の箱の中の定常流の数値計算を行った。この問題を Green関数を用いた方法で前回解いた<sup>1)</sup>。  $D$  が長方形のばあいの  $G_1(x, x')$  は鏡像の方法によって容易におめられ、その複素解析関数:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} [ \log(z - z'_{lm}) - \log(z - \bar{z}'_{l-m}) + \log(z + z'_{lm}) \\ - \log(z + \bar{z}'_{l-m}) ] \end{aligned} \quad (3.1)$$

の実数部で表わされる。ここで

$$\left. \begin{aligned} z &= x+iy, \quad \bar{z} = x-iy \\ z'_{lm} &= z' + 2lb + 2mi, \quad \bar{z}'_{lm} = \bar{z}' + 2lb - 2mi \end{aligned} \right\} (1.2)$$

である。(x, y) は長方形の高さ (y 方向) で規格され、したがって z も長方形の中である。(3.1) は又重同期関数であり、結局随伴関数  $\vartheta_1$  で表わされる。  $G_1$  は又  $z'$  の解析関数としても表わされる。こゝうな事をめると

$$\left. \begin{aligned} G_1(x, y; x', y') &= \operatorname{Re} F(z, z') = \operatorname{Re} F_1(z, z') \\ F(z, z') &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_1(\alpha(z-z')) \vartheta_1(\alpha(z+z'))}{\vartheta_1(\alpha(z-\bar{z}')) \vartheta_1(\alpha(z+\bar{z}'))} \\ F_1(z, z') &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{\vartheta_1(\alpha(z-z')) \vartheta_1(\alpha(z+z'))}{\vartheta_1(\alpha(\bar{z}-z')) \vartheta_1(\alpha(\bar{z}+z'))} \\ \alpha &= \frac{1}{2b} \end{aligned} \right\} (3.3)$$

となる。  $F_1$  は  $z'$  の解析関数である。したがって微分演算は次のように表わされる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} G_1(x, x') &= \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial x} F(z, z') = \operatorname{Re} \frac{dF}{dz} \\ \frac{\partial}{\partial y} G_1(x, x') &= \operatorname{Re} i' \frac{\partial}{\partial y} F(z, z') = \operatorname{Re} i' \frac{dF}{dz} = -\operatorname{Im} \frac{dF}{dz} \\ \frac{\partial}{\partial x'} G_1(x, x') &= \operatorname{Re} \frac{dF_1}{dz}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} G_1(x, x') = -\operatorname{Im} \frac{dF_1}{dz} \end{aligned} \right\} (3.4)$$

熱伝導  $\kappa$  の階伴熱伝導  $\sigma$  への  $\tau$  に対する基本解  $F_2$

$$(x, t), \quad F_2(x, t)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{F}_2(x, t) &= \delta^2(x) \delta(t) \\ \left( \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) F_2(x, t) &= \delta^2(x) \delta(t) \end{aligned} \right\} (3.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_2(x, t) &= 0 & t \rightarrow -\infty \\ F_2(x, t) &= 0 & t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

は

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}_2(x, t) &= -\frac{Y(t)}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ F_2(x, t) &= \frac{Y(-t)}{4\pi t} e^{\frac{|x|^2}{4t}} = \hat{F}_2(x, -t) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

と等しい。  $Y(t)$  は Heaviside 関数:

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

である。そこで

$$F(x, t) = \sum_{l, m=-\infty}^{\infty} F_2(x - 2l e_1 - 2m e_2, t) \quad (3.8)$$

とかくと Green 関数  $G_2$  は

$$\left. \begin{aligned} G_2(x, t; x', t') &= F(x' - x, t' - t) - F(\bar{x}' - x, t' - t) \\ &\quad - F(-x' - x, t' - t) + F(-\bar{x}' - x, t' - t) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\bar{x}' = x' e_1 - y' e_2$$

と等しい。  $e_1, e_2$  は  $x$  軸と  $y$  方向の単位ベクトルである。

計算にあたっては、空間、時間を等間隔に分割し、格子点の値を考へる。時間  $t_0 = t - N\Delta t, t - (N-1)\Delta t, \dots$

$\dots, t - \Delta t, t$ , 空間は  $x_{lm} = (\Delta x l, \Delta y m)$  ( $l = 0, \dots, L, m = 0, \dots, M$ ), とくに境界の点  $s_p$  ( $p = 0, \dots, 2L+2M-1$ ) と分割する。  $s_p$  は



$$\frac{y'}{2\pi(t-t')^2} e^{-\frac{(x''-x')^2+y''^2}{4(t-t')}}$$

これを、時間について積分を実行した結果、

$$I_{pp} = \frac{2}{\pi} \int_{s_p - \Delta x/2}^{s_p + \Delta x/2} \int_0^{\Delta y/2} \int_{s_{p'} - \Delta x/2}^{s_{p'} + \Delta x/2} \frac{1}{(x''-x')^2+y''^2} e^{-\frac{1}{2\Delta t}\{(x''-x')^2+y''^2\}}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G_1(x'', s) d^2x'', ds' \quad (3.12)$$

を、 $p' = p$  ( $x'' = s$ ) のときは  $\frac{\partial}{\partial n} G_1(x'', s)$  の主要部

$$\frac{1}{\pi} \frac{y''}{(x''-x)^2+y''^2}$$

に近似して

$$I_{pp} = \frac{2}{\pi^2} \int_{s_p - \Delta x/2}^{s_p + \Delta x/2} \int_0^{\Delta y/2} \int_{s_{p'} - \Delta x/2}^{s_{p'} + \Delta x/2} \frac{y''^2}{(x''^2+y''^2)\{(x''-x')^2+y''^2\}} e^{-\frac{1}{2\Delta t}\{(x''-x')^2+y''^2\}} dx'' dy'' dx' \quad (3.13)$$

を、

積分方程式中の記号を対応する格子量に改める。

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_2(s', t'; x'', t) \longrightarrow DG_2^n_{p'(l'', m'')}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G_1(x'', s) \longrightarrow DG_1^n_{(l'', m'')} p$$

$$G_2(s', t'; x'', t) \longrightarrow G_2^n_{p'(l'', m'')}$$

$$H_1(s', t'; s, t) \longrightarrow H_1^n_{p, p}$$

$$H_2(x', t'; s, t) \longrightarrow H_2^n_{(l', m')} p$$

$$t-t' = n \Delta t$$

そこで (2.8) の差分方程式は

$$\begin{aligned} \sum_{p'=1}^{2L+2M} I_{p'p} \omega_{p'}^0 + \sum_{n=1}^N \sum_{p'=1}^{2L+2M} (H1_{p'p}^{n'} \Delta t^n \Delta p') \omega_{p'}^n = -f_p^0 \\ + R \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=1}^{M-1} (H2_{(l',m')p}^n \Delta t^n \Delta x \Delta y) J_{(l',m')}^n \\ + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=1}^{M-1} (H2_{(l',m')p}^N \Delta x \Delta y) \omega_{l'm'}^N \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} H1_{p'p}^n &= \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=1}^{M-1} DG2_{p'(l'',m'')}^n DG1_{(l',m')} \Delta x \Delta y \\ H2_{(l',m')p}^n &= \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=1}^{M-1} G2_{(l',m')(l'',m'')}^n DG1_{(l',m')} \Delta x \Delta y \\ J_{(l',m')}^n &= \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')}(t') \bigg|_{\substack{t'=t-n\Delta t \\ x'=x_{l'm'}}} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

となり。これは  $\omega_p^0$  ( $t=0$  における境界の渦度分布) に対する代数方程式である。

#### §4. 円柱をすまゝ定常及び非定常の流れ

§2で行った解析を円柱をすまゝ外部問題<sup>流れの</sup>について適用する。その前に定常の問題を考える。定常の問題を考えれば、渦度の運動方程式において非線形項をまったく落しこんで Laplace オペレーターの green 関数から始めると収束する。という問題 (Stokes のハーフボックス) が起るので隣接の Laplace オペレーターの green 関数から考える。

Navier-Stokes の連続の方程式系を規格化した形で

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x}) \omega &= -2k \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} - 2k \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \nabla^2 \psi &= -\omega \\ 2k &= \nu a / \nu = R/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

とかく。次の Green 関数  $G_3, G_4$  を考へる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G_3(x, x') &= \delta^2(x - x') \\ (\nabla^2 + 2k \frac{\partial}{\partial x}) G_4(x, x') &= \delta^2(x - x') \\ G_3(x, x') &= G_4(x, x') = 0 \quad x \in \partial D, x' \in D + \partial D \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ここで  $D$  は円柱の外側,  $\partial D$  は円周は無限遠である。  $G_3$  は

$$\left. \begin{aligned} G_3(x, x') &= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{x - x'}{2|x - x'|/2} \right| \\ r &= |x| \quad r' = |x'| \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

となり。次に

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + 2k \frac{\partial}{\partial x}) F_4(x) &= \delta^2(x) \\ F_4(x) &= 0 \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

の基本解は

$$F_4(x) = -\frac{1}{2\pi} e^{-kx} K_0(kr) \quad (4.5)$$

である。Green 関数  $G_4$  は  $x = x'$  に (4.5) を, 円周上に  $F_4$  を分布させる方法で求めるとかく。その結果

$$\begin{aligned} G_4(x, x') &= F_4(x - x') + \frac{1}{2\pi} e^{-kx - x'} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_l(k)}{K_l(k)} \\ &\quad K_l(kr) K_l(kr') e^{il(\theta - \theta')} \end{aligned} \quad (4.6)$$

とある。これは種分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \omega(\theta') H_3(\theta', \theta) d\theta' &= -2\omega\theta - 2k \iint \left( \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x'} \omega(x') \right) H_4(x', \theta) d^2x' \\ H_3(\theta', \theta) &= \iint_D \frac{\partial}{\partial z} G_4(\theta', x'') \frac{\partial}{\partial z} G_3(x'', \theta) d^2x'' \\ H_4(x', \theta) &= \iint_D G_4(x', x'') \frac{\partial}{\partial z} G_3(x'', \theta) d^2x'' \end{aligned} \right\} (4.7)$$

とある。これらの関数  $\psi$ , 流度  $\omega$  は

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \left(2 - \frac{1}{2}\right) \omega\theta - \iint_D \omega(x') G_3(x', x) d^2x' \\ \omega(x) &= - \int_{\partial D_1} \omega(\theta') \frac{\partial}{\partial z} G_4(\theta', x) d\theta' \\ &\quad - 2k \iint_D \left( \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')} + \frac{\partial}{\partial x'} \omega(x') \right) G_4(x', x) d^2x' \end{aligned} \right\} (4.8)$$

とある。 $\partial D_1$  は円周上を表わす。

急に一定速度で動かしなばあるの非定常の流と仮定  
考へる。基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} \left( \nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \omega &= -2k \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} - 2k \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \nabla^2 \psi &= -\omega \end{aligned} \right\} (4.9)$$

である。随伴非定常 Oseen オペレータの基本解:

$$\left. \begin{aligned} \left( \nabla^2 + 2k \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) F_5(x, t) &= \delta^2(x) \delta(t) \\ F(x, t) &= 0 \quad |x| \rightarrow 0 \\ F(x, t) &= 0 \quad t \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} (4.10)$$

は

$$F_5(x, t) = \frac{Y(-t)}{4\pi t} e^{-kx + k^2 t + \frac{|x|^2}{4t}} \quad (4.11)$$

と表す。

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + 2k \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}) G_5(x, t; x', t') &= \delta^2(x - x') \delta(t - t') \\ G_5(x, t; x', t') &= 0 \quad x \in \partial D, \quad x' \in D + \partial D \\ G_5(x, t; x', t') &= 0 \quad t \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

を満足する Green 関数  $G_5$  を Laplace 変換を  $t$  について

と

$$\begin{aligned} G_5(x, t; x', t') &= F_5(x - x'; t - t') + \frac{Y(-t)}{(2\pi)^2} e^{-k(x - x')} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_l(\sqrt{k^2 - p})}{K_l(\sqrt{k^2 - p})} K_l(\sqrt{k^2 - p} r) K_l(\sqrt{k^2 - p} r') \\ &\quad e^{i l(\theta - \theta')} e^{p t} dp \end{aligned} \quad (4.13)$$

と表すことができる。

$\omega(\theta, t)$  に関する積分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\partial D_1} \omega(\theta', t') H_5(\theta', t'; \theta, t) d\theta' dt' &= 2 \sin \theta \\ -2k \int_{t_0}^t \iint_D \left( \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')}(\theta') + \frac{\partial}{\partial x'} \omega(x') \right) H_6(x', t'; \theta, t) d^2 x' dt' \\ &+ \iint_D \omega(x', t_0) H_6(x', t_0; \theta, t) d^2 x' \\ H_5(\theta', t'; \theta, t) &= \iint_D \frac{\partial}{\partial z'} G_5(\theta', t'; x'', t) \frac{\partial}{\partial z} G_3(x'', \theta) d^2 x'' \\ H_6(x', t'; \theta, t) &= \iint_D G_5(x', t'; x'', t) \frac{\partial}{\partial z} G_3(x'', \theta) d^2 x'' \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

と置き。  $\psi, \omega$  は

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, t) &= (2 - \frac{1}{2}) \sin \theta - \iint_D \omega(x', t) G_3(x', x) d^2x' \\ \omega(x, t) &= -2k \int_{t_0}^t \iint_D \left( \frac{\partial(\psi', \omega')}{\partial(x', y')} (t') + \frac{\partial}{\partial x'} \omega(x', t') \right) \\ &\quad G_5(x', t'; x, t) d^2x' dt' + \int_{t_0}^t \int_{\partial D_1} \omega(\theta', t') \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x'} G_5(\theta', t'; x, t) d\theta' dt' - \iint_D \omega(x, t_0) \\ &\quad G_5(x', t_0; x, t) d^2x' \end{aligned} \right\} (4.16)$$

と置き。

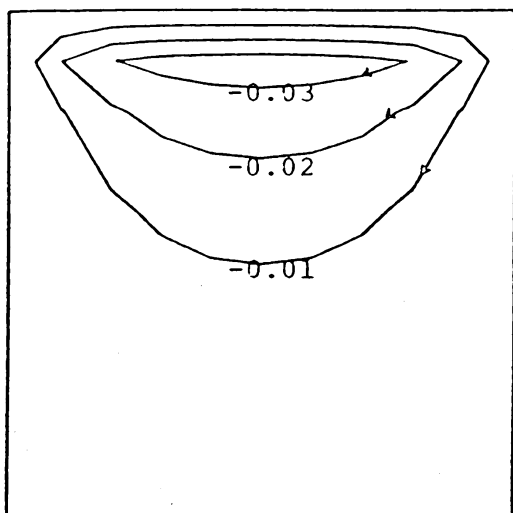
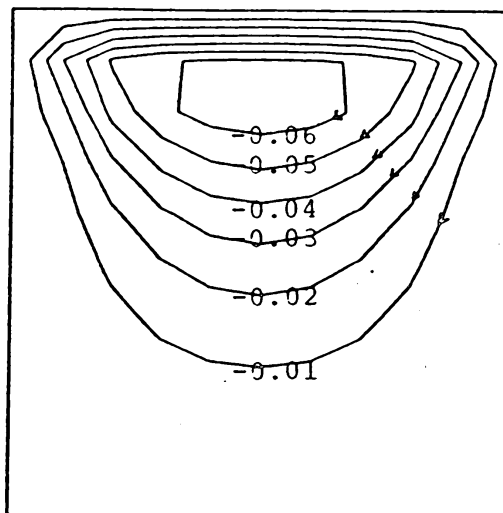
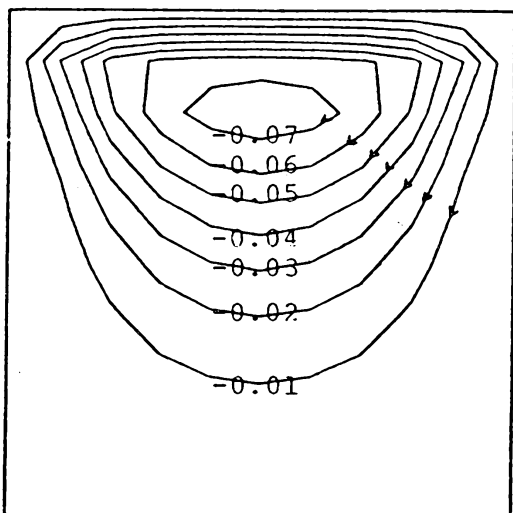
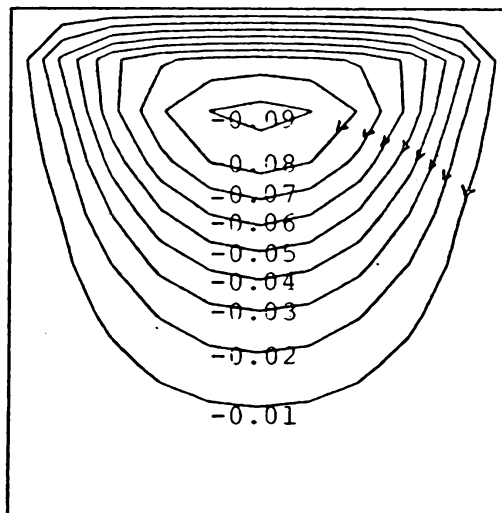
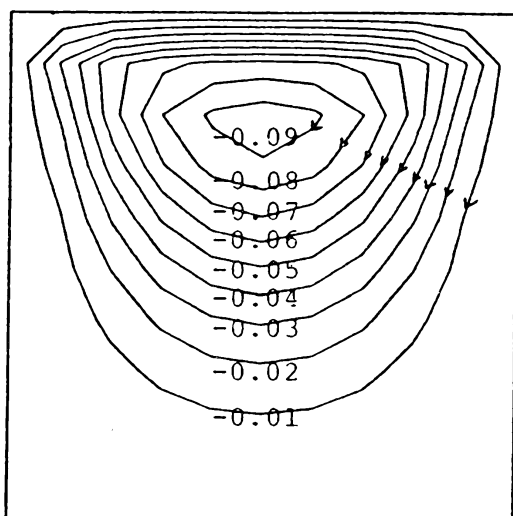
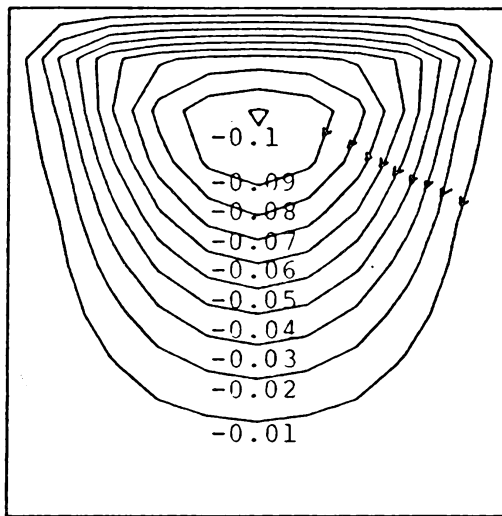
### §5. おわりに

この論文では2次元非定常の Navier-Stokes 方程式の初期値問題を Green 関数を用いて、積分方程式に帰着させ解くことを考えた。これらの積分方程式は非線形特異積分方程式である。箱の中の流れについて数値計算を行い、 $R=0$  (第2図),  $R=100$  (第3図),  $R=200$  (第4図) のばあい  
の流線(a), 等速度線(b)の時間的发展をおめた。いずれも上の壁が急に一定速度で動き出しにばあいである。いずれのばあいにも  $t=0.1$  位で定常解に達するようである。差分法等で箱の中の  $R=200$  の定常解は求められているが2の方法では十分定常とみられる解がえられた。

一般の Navier-Stokes 方程式のような放物形偏微分方程式の初期値問題を差分法で解くには、境界条件を合わせずに時間の各ステップで繰りかえし計算を必要とするが、この方法では green 関数の性質によってその必要はなく、計算時間を節約することになる。

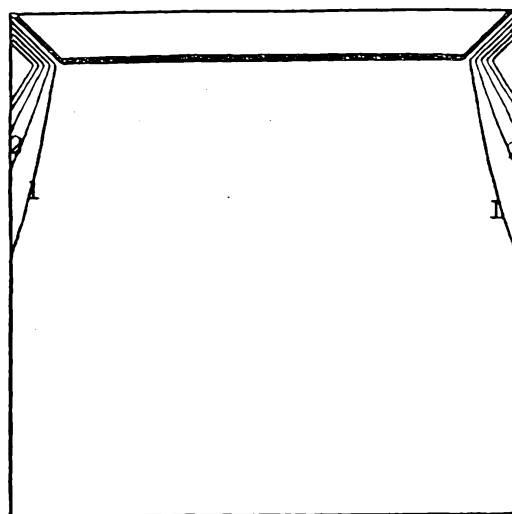
### 参考文献:

- 1) Farooq, M. U. and S. Kuwabara: Analysis of the Navier-Stokes Equations Based on Green's Function Technique, 京大数理解析研講究録 393 (1980) 84.
- 2) Kawaguti, M., JPSJ 16 (1961) 2307.
- 3) Mills, R. D., JFM 70 (1977) 609.
- 4) Ozawa, S., JPSJ 38 (1975) 889.

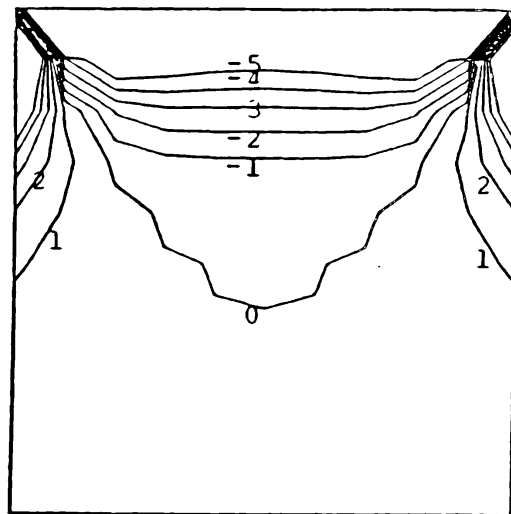
 $t=0.002$  $t=0.008$  $t=0.012$  $t=0.022$  $t=0.030$  $t=0.1$ 

才2图 (a)

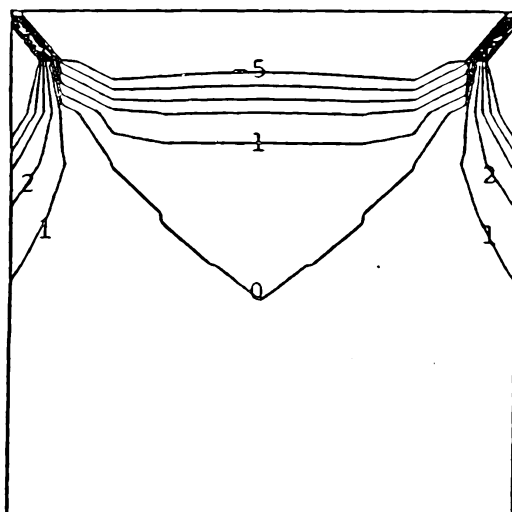
STREAM LINES AT  $R = 0$



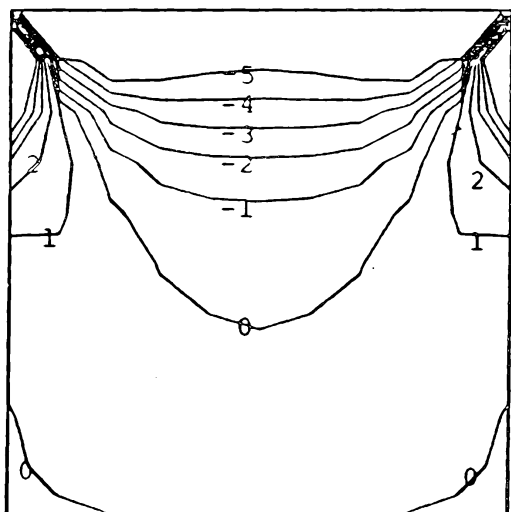
$t=0.002$



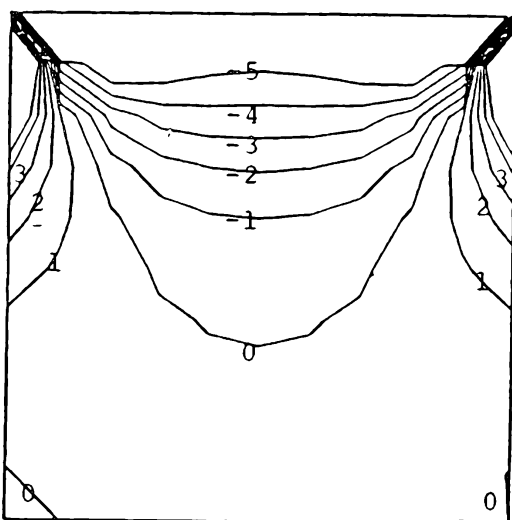
$t=0.008$



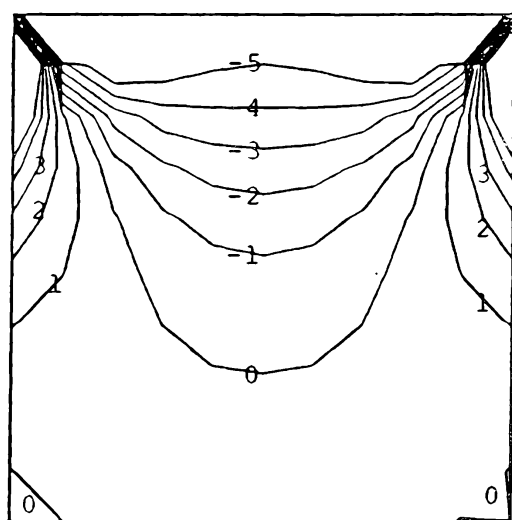
$t=0.012$



$t=0.022$



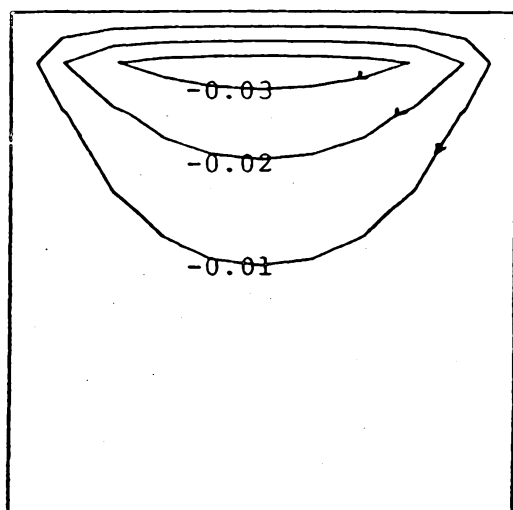
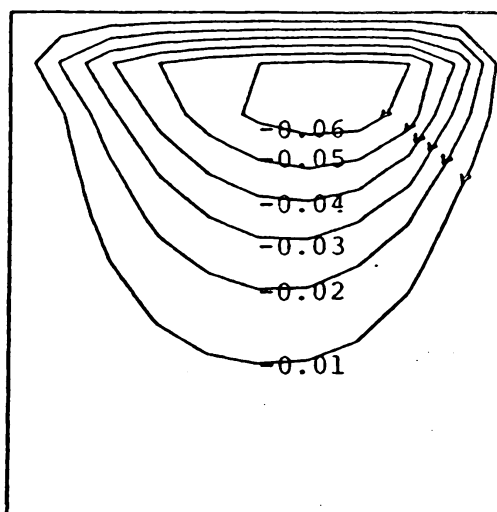
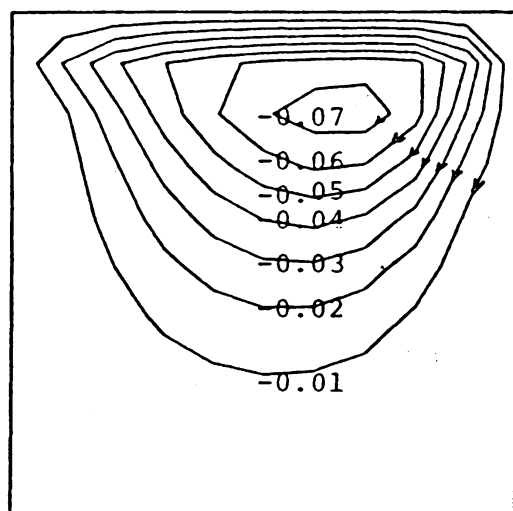
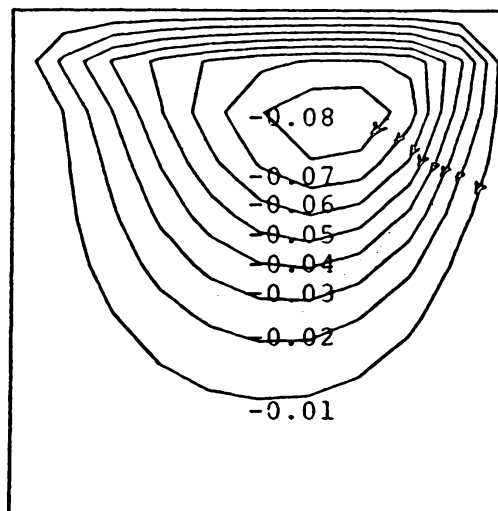
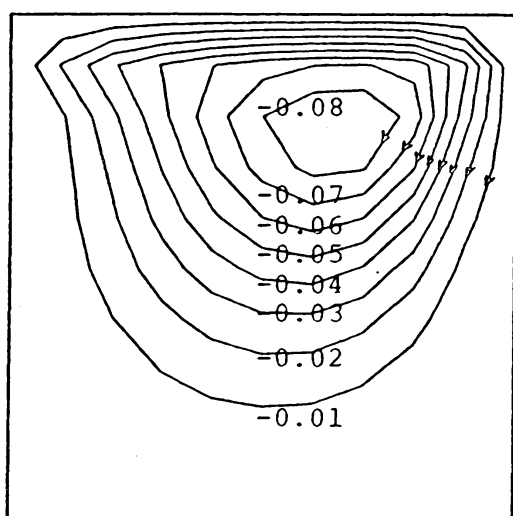
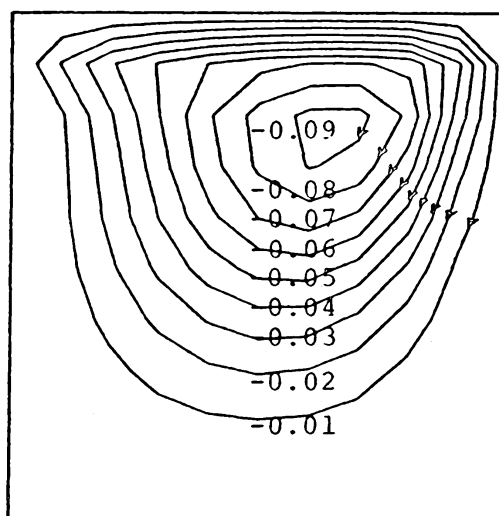
$t=0.030$



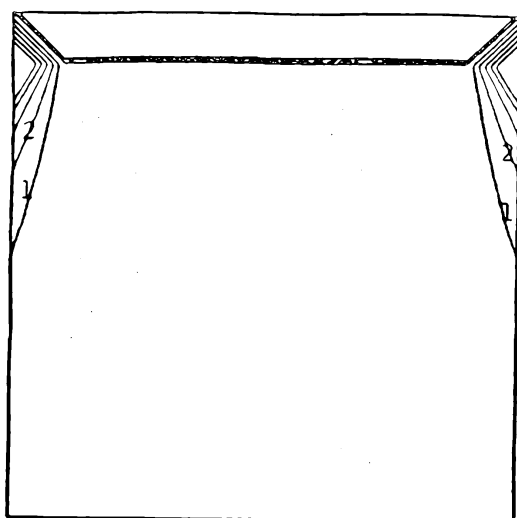
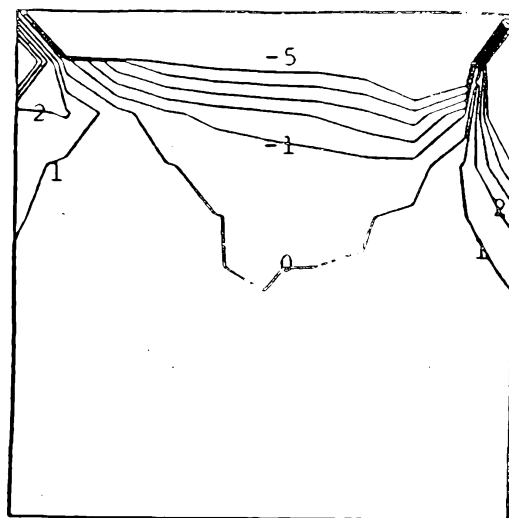
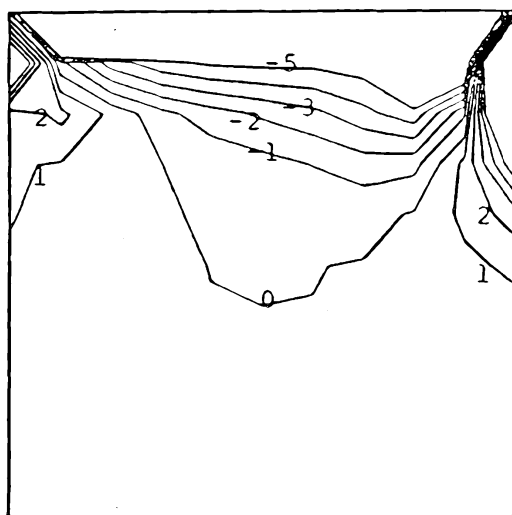
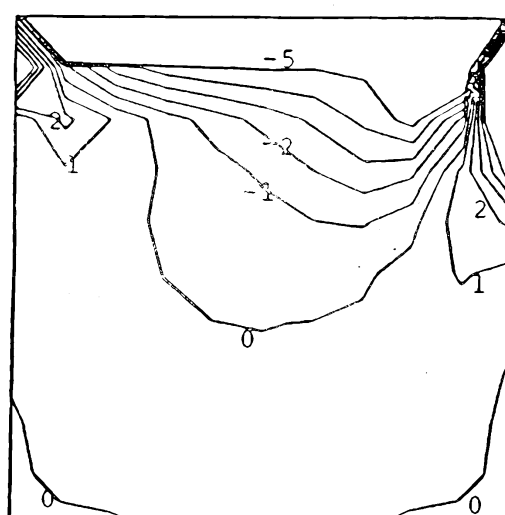
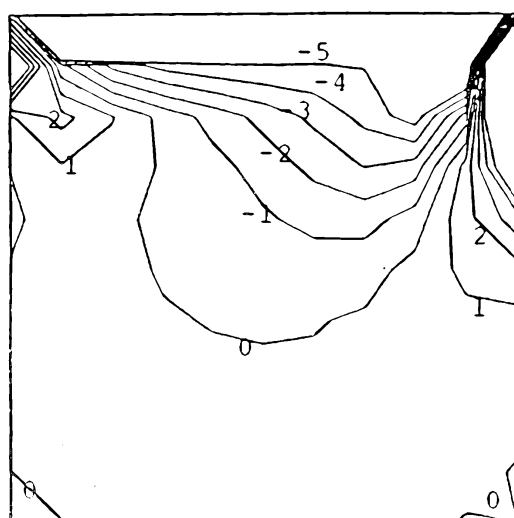
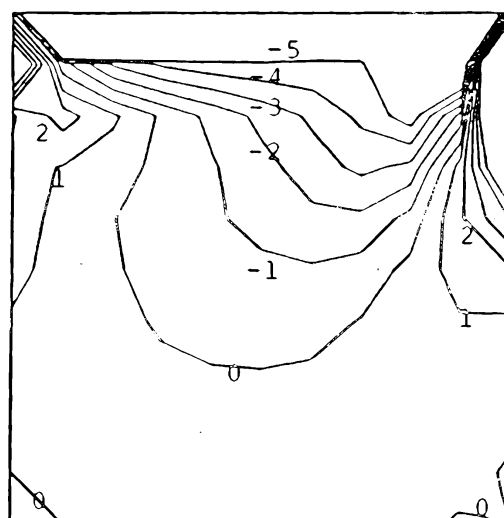
$t=0.1$

第2図(6)

EQUI-VORTICITY LINES AT  $R=0$

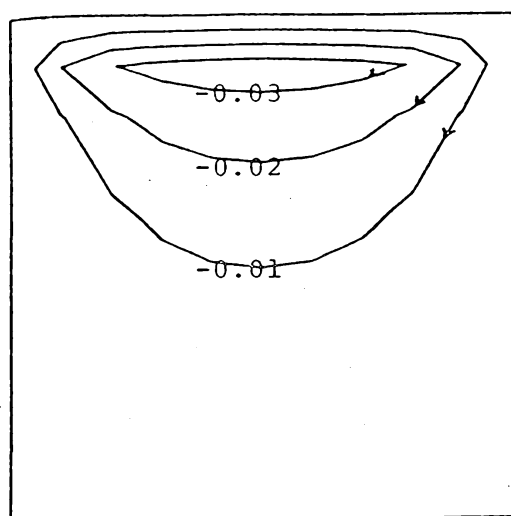
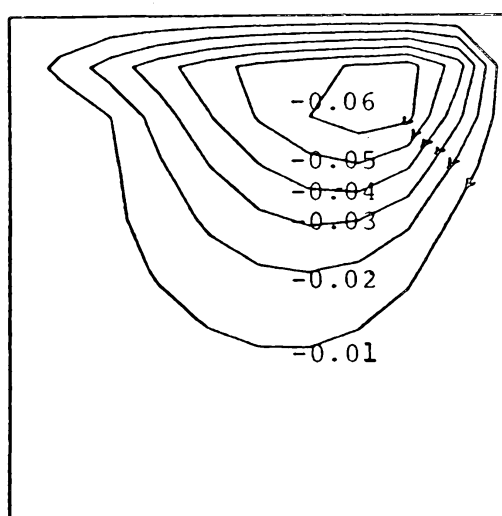
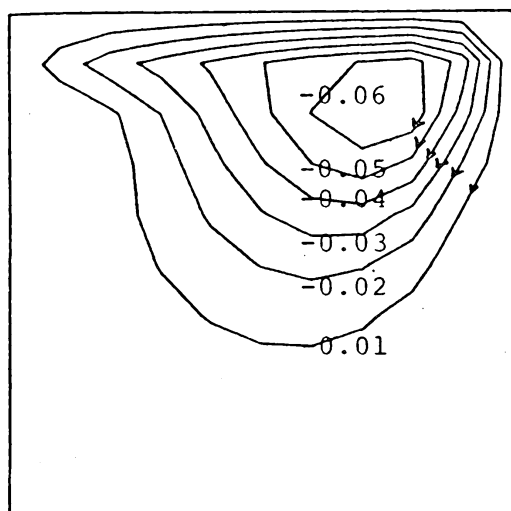
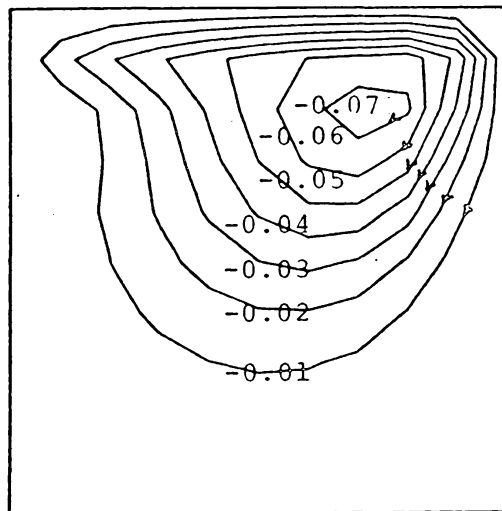
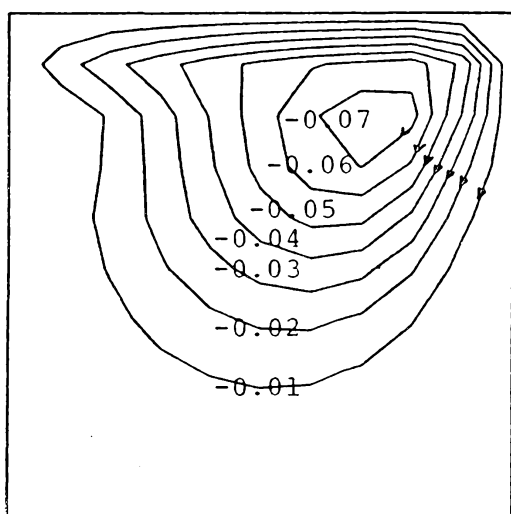
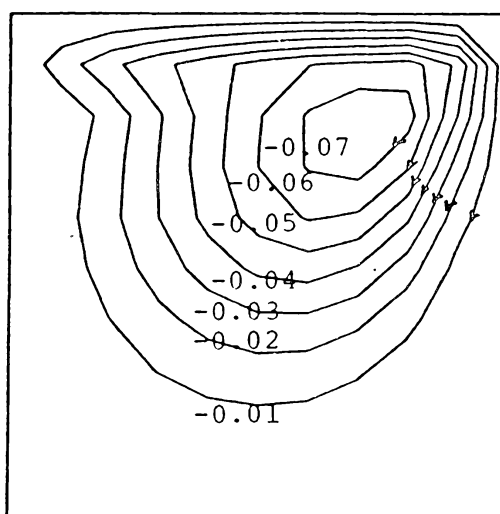
 $t=0.002$  $t=0.008$  $t=0.012$  $t=0.022$  $t=0.03$  $t=0.1$ STREAM LINES AT  $R = 100$ 

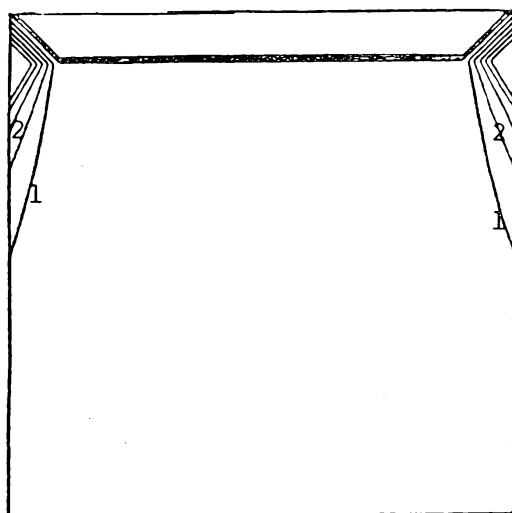
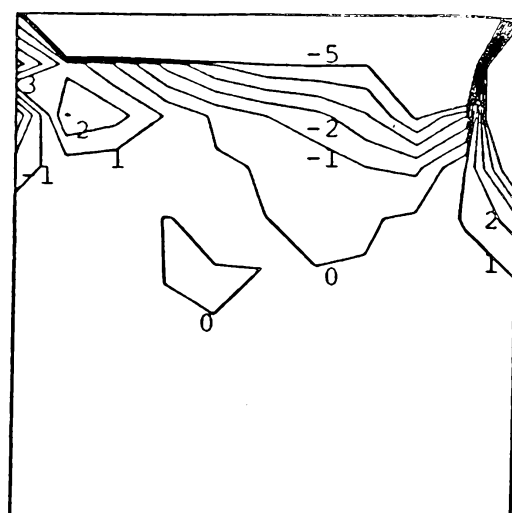
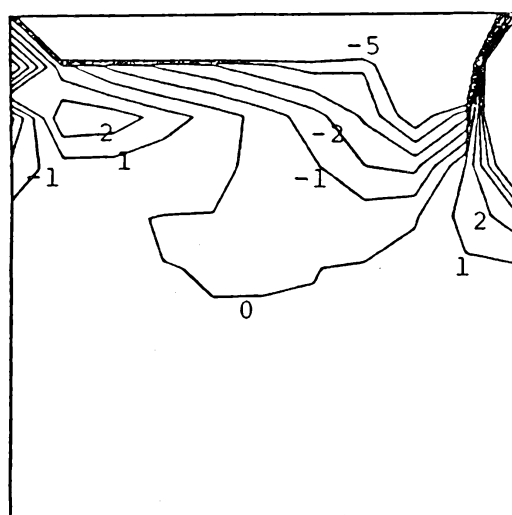
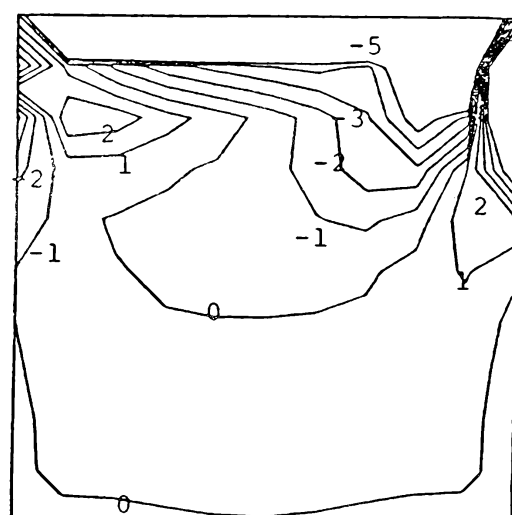
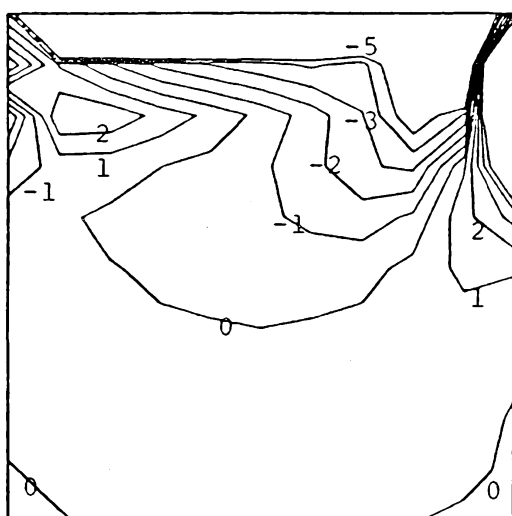
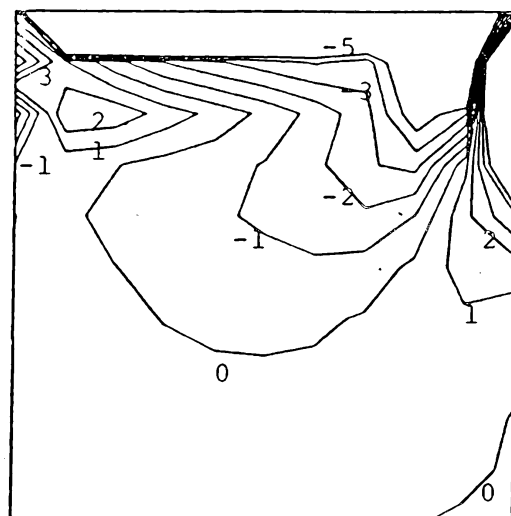
第31回 (a)


 $t = 0.002$ 

 $t = 0.008$ 

 $t = 0.012$ 

 $t = 0.022$ 

 $t = 0.030$ 

 $t = 0.1$ 

第3图(6)

EQUI-VORTICITY LINES AT  $R = 100$

 $t=0.002$  $t=0.008$  $t=0.012$  $t=0.022$  $t=0.03$  $t=0.22$

 $t=0.002$  $t=0.008$  $t=0.012$  $t=0.022$  $t=0.030$  $t=0.22$ 

第4図(6)

EQUI-VORTICITY LINES AT  $R = 200$