

Iwaniec の g -関数の性質

山形大学教育 鹿野 健 (Takeshi Kano)

微分差分方程式

$$(1) \quad (u g(u))' = \alpha g(u) + \beta g(u+1)$$

は, Iwaniec [4]によって, いわゆる一般篩(ふるい)法の研究の中で導入された。ここで, 通常 α, β は正の定数で, $g = g(u)$ は $u > 0$ で定義されていて, $u \rightarrow \infty$ のとき

$$(2) \quad g(u) \sim u^{\gamma}$$

となるような定数 $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ が存在するものとする。

ここでは, 特に基本的な場合である

$$(3) \quad \alpha = \beta = k > \frac{1}{2}$$

の場合を考察する。このとき, (1)の解 $g(u)$ は単一で,

$$\gamma = 2k - 1$$

であることが知られている [1]。このとき, 解 $g(u)$ は幾つかの興味ある解析的な性質を有することが, Grupp [3],

Tsang [5], Wheeler [6] 等によって示され, 応用も知られている. Diamond と Halberstam [2] は, 最近 $g(u)$ の新しい解析的な性質を見出し, 最終的に2つの予想に到達した.

本稿では, それらの解決 (予想2) と, 部分的解決 (予想1) について報告する.

(1) の連続解 $g(u)$ は, (3) の π で正の実根を有し, その最大のもつを $p = p_k$ とすると, p は単根で $k > 1$ のとき $p > 2k-1$ であることが知られている (cf. [2]).

Diamond と Halberstam が得た主要な結果をまとめると, 次の定理になる.

[定理 A] $k > 1$ のとき, $u > p$ の範囲で

$$(i) \quad f(u) = \frac{(u-p)g'(u)}{g(u)} \quad \text{は単調増加関数で,}$$

$$f(u) > 1.$$

$$(ii) \quad \frac{g'(u)}{g(u)} \quad \text{は単調減少の凸関数.}$$

この定理を含む幾つかの結果を証明するために彼等が用いたのが, いわゆる「連続帰納法」(induction on the continuum) であるが, これは既に Wheeler [6] においても用いられた方法である.

この定理 A に関連して彼等の述べた予想が次の主張である。

予想 1. $f(u)$ は $u > p$ で凹関数である。

予想 2. $\frac{g'(u)}{g(u)} - \frac{1}{u-p}$ は $u > p$ で単調減少関数である。

後者については、彼等が示したように、予想 1 が正しいければ成り立つことが証明できる。ここではまず、予想 2 が正しいことを (何の仮定も設けずに) 証明し、それが逆に予想 1 に対する弱い結果を与えることを示そう。

[補題] $u \rightarrow \infty$ のとき、

$$(4) \quad \frac{g'(u)}{g(u)} = \frac{2k-1}{u-k} + \frac{k(2k-1)(k-1)}{(u-k)^3} + O(|u-k|^{-4}),$$

$$(5) \quad \frac{g''(u)}{g(u)} = \frac{(2k-1)(2k-2)}{(u-k)^2} + \frac{k(k-1)(2k-1)(4k-5)}{(u-k)^4} + O(|u-k|^{-5}).$$

(証明) (4) は, [2] の (3.1) 式であり, (5) はその (3.1) 式と (3.2) 式から (辺々掛け合わせることにより) 得られる。

予想 2 の証明は, まず十分大きい u の値に対して成り立つことを上の補題によって証明し, 次に前述の連続帰納法によって最終的に $u > \rho$ について成り立つことを得る, という方針で行う.

$$(6) \quad F(u) = \frac{g'(u)}{g(u)} - \frac{1}{u-\rho},$$

とおくと, 補題により

$$\begin{aligned} -F'(u) &= \left(\frac{g'}{g}\right)^2 - \frac{g''}{g} - \frac{1}{(u-\rho)^2} \\ &= \left\{ \frac{2k-1}{u-k} + \frac{k(2k-1)(k-1)}{(u-k)^3} + O(|u-k|^{-4}) \right\}^2 \\ &\quad - \left[\frac{2(2k-1)(k-1)}{(u-k)^2} + \frac{k(k-1)(2k-1)(4k-5)}{(u-k)^4} + O(|u-k|^{-5}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{(u-\rho)^2} \\ &= \left\{ \frac{2k-1}{(u-k)^2} - \frac{1}{(u-\rho)^2} \right\} + \frac{3k(k-1)(2k-1)}{(u-k)^4} + O(|u-k|^{-5}). \end{aligned}$$

ここで, 最初の $\{ \}$ の中 > 0 は不等式

$$u > \rho + \frac{\rho-k}{\sqrt{2k-1}-1},$$

と同値であるから, これは (u が十分大きいければ) 成り立つ. 故に, 十分大きな u に対して $F(u)$ が単調減少であることが示された. 次のステップは連続帰納法である.

$u > v > p$ であるようなすべての u に対して $F(u)$ が単調減少であると仮定すると, $F'(v) < 0$ となることを示そう。まず (1) と (3) より,

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{u} \left(\frac{u g'}{g} \right) - \frac{1}{u-p} \\ &= \frac{(k-1)g(u) + k g(u+1)}{u g(u)} - \frac{1}{u-p} \\ &= \frac{1}{u} \left\{ (k-1) + k \frac{g(u+1)}{g(u)} \right\} - \frac{1}{u-p}. \end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned} (7) \quad F'(u) &= -\frac{1}{u^2} \left(\frac{u g'}{g} \right) + \frac{k}{u} \cdot \frac{g'(u+1)g(u) - g(u+1)g'(u)}{g^2(u)} + \frac{1}{(u-p)^2} \\ &= -\frac{g'(u)}{u g(u)} + \frac{k g(u+1)}{u g(u)} \left\{ \frac{g'(u+1)}{g(u+1)} - \frac{g'(u)}{g(u)} \right\} + \frac{1}{(u-p)^2}. \end{aligned}$$

ここで, $u > p$ のとき

$$(8) \quad k g(u+1) > g(u) + g'(u),$$

が成り立つことに注意する。なぜならば, (1) と (3) より

(8)は結局不等式

$$(8') \quad \frac{g'(u)}{g(u)} > \frac{k}{u-1}$$

と同値であるが ($u > p > 2k-1 > 1$ に注意), [2] の (1.4)

式により, $u > p$, $k > 1$ のときは

$$(9) \quad \frac{g'(u)}{g(u)} > \frac{2k-1}{u-k}$$

が成り立つので, (8') が従って (8) の成り立つことが分る.

一方, $g'(u)/g(u)$ は単調減少関数 (定理 A の (ii)) なので,

$$(10) \quad \frac{g'}{g}(u+1) - \frac{g'}{g}(u) < 0.$$

故に, (8) と (10) を (7) の右辺に適用して,

$$\begin{aligned} F'(u) &< -\frac{g'(u)}{u g(u)} + \frac{k}{u} \cdot \frac{g(u) + g'(u)}{g(u)} \left\{ \frac{g'}{g}(u+1) - \frac{g'}{g}(u) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{(u-p)^2} \\ &= -\frac{g'(u)}{u g(u)} + \frac{k}{u} \left(1 + \frac{g'(u)}{g(u)} \right) \left\{ \left(\frac{g'}{g}(u+1) - \frac{1}{u+1-p} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{g'}{g}(u) - \frac{1}{u-p} \right) - \frac{1}{(u+1-p)(u-p)} \right\} + \frac{1}{(u-p)^2}. \end{aligned}$$

ここで, (帰納法の) 仮定より

$$\frac{g'}{g}(u+1) - \frac{1}{u+1-p} < \frac{g'}{g}(u) - \frac{1}{u-p}$$

であるから, $u \geq v > p$ に対して

$$\begin{aligned} F'(u) &< -\frac{g'(u)}{u g(u)} - \frac{k}{u} \left(1 + \frac{g'(u)}{g(u)} \right) \frac{1}{(u+1-p)(u-p)} \\ &\quad + \frac{1}{(u-p)^2}, \end{aligned}$$

が成り立つ。

従って,

$$\begin{aligned}
 F'(v) &< -\frac{g'(v)}{v g(v)} - \frac{k}{v} \left(1 + \frac{g'(v)}{g(v)}\right) \frac{1}{(v+1-p)(v-p)} \\
 &\quad + \frac{1}{(v-p)^2} \\
 &= \frac{-g'}{v g} - \frac{1}{v-p} \left\{ k \left(1 + \frac{g'}{g}\right) \frac{1}{v+1-p} - \frac{1}{v-p} \right\} \\
 &= \frac{-1}{v-p} \left\{ \frac{(v-p)g'}{v g} + \left(1 + \frac{g'}{g}\right) \frac{k}{v+1-p} - \frac{1}{v-p} \right\} \\
 &= \frac{-1}{v-p} \left\{ \frac{g'}{g} \left(\frac{v-p}{v} + \frac{k}{v+1-p} \right) + \left(\frac{k}{v+1-p} - \frac{1}{v-p} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

ところが, 定理 A の (i) より $g'/g > 1/(v-p)$ なので, 上式の最後の $\{ \}$ の中は次式よりも大きい:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{v-p} \left(\frac{v-p}{v} + \frac{k}{v+1-p} \right) + \left(\frac{k}{v+1-p} - \frac{1}{v-p} \right) \\
 &= \frac{1}{v} + \frac{k}{(v-p)(v+1-p)} + \frac{k(v-p) - (v+1-p)}{(v+1-p)(v-p)} \\
 &= \frac{1}{v} + \frac{k-1}{v-p} > 0.
 \end{aligned}$$

故に $F'(v) < 0$ が示され, 結局 $F(u)$ が $u > p$ で単調減少であることが証明された。

予想 1 に関する結果を述べる前に, 次のような事実に注意する。

一般に、関数 $f(x)$ が 2 つの凹関数 $g(x)$ と $h(x)$ によって、

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

と表わされるとき、 $f(x)$ は準凹 (quasi-concave) とよばれる。また、 $\log |f(x)|$ が(準)凹 であるとき、 $f(x)$ は(準)対数的凹 ((quasi) log-concave) という。

このとき、次のような包含関係が成り立つ。

$$\text{凹} \subset \text{対数的凹} \subset \text{準対数的凹}.$$

さて、上に証明したように (予想 2), $u > p$ のとき

$$\left(\log \frac{g(u)}{u-p} \right)'' = \left(\frac{g'(u)}{g(u)} - \frac{1}{u-p} \right)' < 0$$

であるから、 $\frac{g(u)}{u-p}$ は対数的凹である。また、[2] の Proposition 4.1 によれば、 $u > p$ のとき

$$(\log g')'' = \left(\frac{g''}{g'} \right)' < 0.$$

従って、

$$\log f(u) = \log g'(u) - \log \frac{g(u)}{u-p},$$

は 2 つの凹関数の差であるから、 $\log f(x)$ は準凹、従って $f(x)$ は準対数的凹 である。

[文 献]

- [1] Diamond, H.G., Halberstam, H., Richert, H.-E., Sieve auxiliary functions II, *Contemporary Math.* 143, p. 247 - 253 (AMS, 1993).
- [2] Diamond, H.G. and Halberstam, H., Differential inequalities for Iwaniec's g functions, In *Number Theory in Progress vol. II*, p. 721 - 735. Walter de Gruyter, 1999.
- [3] Grupp, F., On zeros of functions satisfying certain difference - differential equations, *Acta Arith.* 51 (1988), 247 - 268.
- [4] Iwaniec, H., Rosser's sieve, *Acta Arith.* 36 (1980) 171 - 202.
- [5] Tsang, K.-M., Remarks on the sieving limit of the Buchstab - Rosser sieve, In *Number theory, trace formulas and discrete groups*, p. 485 - 502. Academic Press, 1989.
- [6] Wheeler, F.S., Two differential - difference equations arising in Number Theory, *Trans. AMS*, 318 (1990) 491 - 523.