

Borel の恒等式について

名大 教養 藤 本 坦 孝

§ 1. 序.

・ 1897 年, E. Borel は次の結果を与えた.

定理 ([1]). 整関数 $a_0(z), a_1(z), \dots, a_p(z)$; $h_0(z), h_1(z), \dots, h_p(z)$ に対し, 各 $a_i(z)$ の絶対値の $\{z\} = r$ 上の最大値が, すべて $e^{\mu(r)}$ より小さく, $h_i(z) - h_j(z)$ ($i \neq j$) のそれが, すべて $\mu(r)^2$ より大きくなる様な, 正值単調増加関数 $\mu(r)$ ($0 < r < +\infty$) が存在すると仮定する. もし,

$$a_0(z) e^{h_0(z)} + a_1(z) e^{h_1(z)} + \dots + a_p(z) e^{h_p(z)} \equiv 0$$

ならば, "必ず"

$$a_0(z) \equiv a_1(z) \equiv \dots \equiv a_p(z) \equiv 0$$

である.

ここでは, 各 $a_i(z)$ が定数の場合に限れば, この結果が, H. Cartan の得た defect relation ([3]) を使う事によって, より精密化された形で証明できる事を示し, その応用として, 有理型関数の除外値に関する Picard の定理や, 有

理型関数の一意性に関する Polya-Nevanlinna の定理の, N 次射影空間 $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の場合への拡張を考える.

§2. H. Cartan の defect relation.

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の $\{z; r_0 \leq |z| < +\infty\} (r_0 \geq 0)$ を含む領域 D 上の共通零点を持たぬ p 個の正則関数の組 $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ に対し,

$$u(z) := \max_{1 \leq i \leq p} \log |f_i(z)|$$

と置く.

定義 2.1. H. Cartan ([3]) に従って, 各 $r (> r_0)$ に対し

$$T(r, \mathcal{F}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_0 e^{i\theta}) d\theta$$

とおき, これを $\mathcal{F}$ の特性関数と呼ぶ.

D 上の有理型関数 $g(z)$ を, 共通零点のない正則関数 f_1, f_2 によって $g = \frac{f_2}{f_1}$ とかく時, $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ の特性関数は, 定数項を無視すれば, R. Nevanlinna の意味の特性関数 (c.f. [10]) に等しい. 有理型関数の場合と同様に,

(2.2) $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ が超越的, 即ち, 或る j ($\neq 1$) に対し, $\frac{f_i}{f_j}$ が ∞ で真性特異点をもつ 必要条件は

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T(r, \mathcal{F})}{\log r} = +\infty$$

である.

定義 2.3. 集合 $\gamma_{r_0} = \{z; |z| = r_0\}$ 上零でない D 上の正則関数 $F(z)$ に対し,

$$N_m(r, F) := \sum_{\mu} \min(m_{\mu}, m) \log \left| \frac{r}{a_{\mu}} \right|$$

と定義する。ここで、 m は正整数で、 $\sum_{\mu}$ は、 $\{r_0 < |z| \leq r\}$ 内の、重複度が m_{μ} の $F(z)$ の零点 a_{μ} のすべての和を表わす。
共通零点のない正則関数の組 $f = (f_1, \dots, f_p)$ の一次結合

$$F = a^1 f_1 + a^2 f_2 + \dots + a^p f_p$$

に対し、 δ_{r_0} 上 $F(z) \neq 0$ とする。この時、任意の m に対し、

$$(2.4) \quad N_m(r, F) \leq T(r, f) + O(1)$$

が成り立つ。

定義 2.5. 上記の f, F に対する defect を

$$\delta_m(f, F) := 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_m(r, F)}{T(r, f)}$$

と定義する。

(2.4) より、つねに $0 \leq \delta_m(f, F) \leq 1$ である。

[3]において、H. Cartan は次の defect relation を得た。

定理 2.6. $\mathbb{D}$ 上共通零点をもたぬ正則関数の組 $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ に対し、 $q (> p)$ 個の一次結合

$$F_j = a_j^1 f_1 + a_j^2 f_2 + \dots + a_j^p f_p \quad (1 \leq j \leq q)$$

を考える。ここで、行列 $((a_j^i; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q))$ の任意の p 次の小行列式が零でなく、更に δ_{r_0} 上つねに Wronskian

$$W_f(z) := \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_p \\ f_1' & f_2' & \dots & f_p' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(p-1)} & f_2^{(p-1)} & \dots & f_p^{(p-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

且つ, $F_j(z) \neq 0$ ($1 \leq j \leq p$) とし, $r_0 > 0$ の場合には, f が超
越的であると仮定する. この時

$$\sum_{j=1}^p \delta_{p-1}(f, F_j) \leq p$$

が成り立つ.

注意. 定理 2.6 で $p=2$ の場合は, R. Nevanlinna のい
わゆる第二基本定理と本質的に同じものである.

§ 3. Borel の恒等式の精密化

$\mathbb{C}^n$ 内の領域 D 上の正則関数 $f(z)$ ($\neq 0$) に対し, 一点
 $a \in D$ の近くで, f を級数

$$f(u_1 + a_1, \dots, u_n + a_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(u_1, \dots, u_n)$$

に展開する. ここで $P_m(u)$ は, 恒等的に零か, 又は m 次同
次多項式を表わす.

定義 3.1. f の零集 a の重複度を

$$\nu_f(a) := \min \{m; P_m(u) \neq 0\}$$

と定義する. ここで $f(a) \neq 0$ の時は $\nu_f(a) = 0$ とおく,

特に $D = \mathbb{C}^n$ の場合は, 次の事がいえる.

補題 3.2. 単位球面 $S^{2n-1} := \{ |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1 \}$ 内の適当
な Lebesgue 測度零の集合 E に対し, $zu^0 := (z_1 u^0, \dots, z_n u^0)$
($z = (z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1} - E$, $u^0 \neq 0$) とかける任意の $f(z)$ の
零集について, $\nu_f(zu^0)$ が, u のみの関数 $\nu_z(u) = \nu_f(z, u,$
 $\dots, z_n u)$ の $u = u^0$ での零集の位数に等しい.

又、 $D = \{ |z_i| < r_i, 1 \leq i \leq n \}$ の場合は、

補題 3.3. $\tilde{D} := \{ |z_i| < r_i, 2 \leq i \leq n \}$ 内の適当な Lebesgue 測度正の集合 E に対し、 $a = (a_1, \bar{a})$ ($\bar{a} = (a_2, \dots, a_n) \in \tilde{D} - E$) とかける任意の $f(z)$ の零点について、 $N_f(a)$ が、 $f(z, \bar{a})$ を z_1 のみの関数とみての $z_1 = a_1$ での零点の位数となる。

多変数有理型関数の真性特異点に関し、次の事が成り立つ。

補題 3.4. 領域 $D := \{ 0 < |z_1| < r_1, |z_i| < r_i, 2 \leq i \leq n \}$ 上の有理型関数 $g(z_1, \dots, z_n)$ に対し、 $\tilde{D} = \{ |z_i| < r_i, 2 \leq i \leq n \}$ 内の或 Lebesgue 測度正の集合 P に属する任意の $\bar{z}$ に対する $f(z_1, \bar{z})$ が、 z_1 のみの有理型関数として意味をもち、 $z_1 = 0$ が除き得る特異点であると仮定する。この時、 $f(z)$ は $\{ |z_i| < r_i, 1 \leq i \leq n \}$ 全体の有理型関数に接続される。

いずれも証明を略す(参. 付., [6]). 尚, [8] によれば、最近 B. Shiffman が補題 3.4 と同じ結果を得た (unpublished) との事である。

以上の準備のもとに、Borel の結果を次の様に精密化する。

定理 3.5. 恒等的に零ではない n 変数整関数 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p$ ($p \geq 2$) が、適当な正整数 m_i ($0 \leq i \leq p$) に対し、以下の条件をみたすものとする。

$$a) \quad \sum_{i=0}^p \frac{1}{m_i} < \frac{1}{p-1},$$

b) 各 ϕ_i は重複度 $< m_i$ の零点をもたない。

c) $f_0, f_1, \dots, f_k$ ($0 \leq i \leq p, k \geq 1$) が共通零点をもつ時

$$\nu_i := \nu_{f_i}(z_0) - \min(\nu_{f_0}(z_0), \nu_{f_1}(z_0), \dots, \nu_{f_k}(z_0)) > 0$$

ある任意の l ($0 \leq l \leq k$) に対し, $\nu_l \geq m_{il}$ である.

d) 任意の i, j ($i \neq j$) に対し $\frac{f_i}{f_j} \neq \text{定数}$ である.

この時, $f_0, f_1, \dots, f_p$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である.

注意 1. 各 $f_i(z)$ が或整関数 $h_i(z)$ によって $f_i(z) = e^{h_i(z)}$ とかける時, 零点をもたぬ事から, 十分大きな m_i に対し, 条件 a) ~ c) がみたされる. 従って, 定理 3.5 は, Borel の結果の $q_i(z) \equiv \text{定数}$ の場合の精密化とみられる.

2. 定理 3.5 で, 各 f_i ($0 \leq i \leq p-1$) が $f_i^{m_i}$ なる形をとり, $f_p \equiv 1$ なる場合は, N. Toda によって研究された ([13]).

証明. 補題 3.2 によって, u のみの関数.

$$(f_0)_z^*(u) := f_0(zu), \dots, (f_p)_z^*(u) := f_p(zu)$$

が, 定理 3.5 の仮定 a) ~ d) をみたす $z \in S^{2n-1}$ が取れる. 又, $(f_0)_z^*, \dots, (f_p)_z^*$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立なら, $f_0, f_1, \dots, f_p$ も一次独立故, 定理 3.5 は, $n=1$ の場合にのみ証明すれば十分である. そこで, 定数 $c^0, c^1, \dots, c^p$ に対し

$$c^0 f_0 + c^1 f_1 + \dots + c^p f_p = 0$$

とする. どれかの i に対し $c^i = 0$ なる事を示せば十分である. 実際, これがいえれば, f_i ($0 \leq i \leq p$) から任意に選んだ p 個についても条件 a) ~ d) が成り立つ事に注意すれば,

定理 3.5 は, p に関する数学的帰納法で容易に証明される. $c_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq p$) と仮定する. 零でない位数もこの度 f_i ($1 \leq i \leq p$) の共通零点である様な整関数 g をとり, $g_i = \frac{c_i f_i}{g}$ ($0 \leq i \leq p$) とおく. 正則関数の組 $\mathfrak{g} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ は共通零点なく, 条件 b), c) より, $g_0 = -(g_1 + \dots + g_p)$ あるいは g_i ($1 \leq i \leq p$) が, 夫々, 重複度 $< m_i$ ($0 \leq i \leq p$) の零点をもたない. 更に, 帰納法の仮定から, $g_1, \dots, g_p$ は一次独立, 従って, Wronskian $W_{\mathfrak{g}}(z) \neq 0$ である. 必要なら原点をずらして, $W_{\mathfrak{g}}(0) \neq 0$, $g_i(0) \neq 0$ ($0 \leq i \leq p$) としよう. この時, 定義 2.3 および (2.4) から

$$\begin{aligned} N_{p-1}(r, g_i) &\leq (p-1) N_1(r, g_i) = \frac{p-1}{m_i} m_i N_1(r, g_i) \\ &\leq \frac{p-1}{m_i} N(r, g_i) \\ &\leq \frac{p-1}{m_i} (T(r, \mathfrak{g}) + o(1)) \end{aligned}$$

が成り立つ. これより, $\delta_{p-1}(\mathfrak{g}, g_i) \geq 1 - \frac{p-1}{m_i}$ ($0 \leq i \leq p$) がいえ, 定理 2.6 を使えば,

$$\sum_{i=0}^p \left(1 - \frac{p-1}{m_i}\right) \leq p$$

となる. これは条件 (a) に矛盾する. よって定理 3.5 を得る.

Borel の恒等式の次の形の精密化も成り立つ.

定理 3.6. 領域 $D (\subset \mathbb{C}^n)$ およびその既約解析的集合 $S (\subsetneq D)$ に対し, $D - S$ 上の恒等的に零でない正則関数 $f_1, \dots, f_p$ が定理 3.5 の条件 a) ~ c) をみたし, 更に,

d') 任意の $\frac{f_i}{f_j} (i \neq j)$ を, D 全体の有理型関数として連続
できる。

とする。この時, D 上の有理型関数 $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^p$ に対し,

$$\alpha^0 f_0 + \alpha^1 f_1 + \dots + \alpha^p f_p = 0$$

ならば, 常に

$$\alpha^0 = \alpha^1 = \dots = \alpha^p = 0$$

である。

証明は, まず, 補題 3.3 および補題 3.4 を使って一変数の
場合へ帰着させた上, 定理 2.6 の $v_0 > 0$ の場合を適用し
て, 定理 3.5 と同じ方針で与える。詳細は略す (c. f. [6])。

§ 4. Picard の定理の拡張。

いわゆる Picard の小定理は, " $\mathbb{C}$ から, Riemann 球 $P(\mathbb{C})$
への正則写像 f が ∞ を除外すれば定数に限る" という
形で述べられる。前節の結果を使って, この定理を, $P_N(\mathbb{C})$
への有理型写像の場合に拡張する。

領域 $D (\subset \mathbb{C})$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像 f は, 各点の十
分小さな近傍 U 上では, $P_N(\mathbb{C})$ の斉次座標を使って, U 上の正
則関数 $f_i(z) (0 \leq i \leq N)$ によって $f(z) = f_0(z) : f_1(z) : \dots : f_N(z)$
と表わされる。更に, $z \in D$ で

$$\text{codim} \{ f_0(z) = f_1(z) = \dots = f_N(z) = 0 \} \geq 2$$

をみたす様にできる。以後, この様な f の表示を, U 上での

admissible representation と呼ぶ事にする。 $P_N(\mathbb{C})$ 内の超平面

$$H : a^0 w_0 + a^1 w_1 + \dots + a^N w_N = 0$$

を考える。 $f(P) \notin H$ なる仮定のもとに、正則関数 $f :=$

$$a^0 f_0 + a^1 f_1 + \dots + a^N f_N$$

を用いて、 $\nu(f, H) := \nu_f$ とおく。こ

れは、 f の局所的な admissible representation の取り方に依

らずに、 $\mathbb{D}$ 全体で確定した意味をもつ。
さてそこで、 $P_N(\mathbb{C})$ 内に、 q ($:= N+k+1 > N+1$) 個の

一般の位置にある超平面 H_i ($0 \leq i \leq N+k$) を取る。各 H_i が

$$H_0 : w_0 = 0 \quad 0 \leq i \leq N$$

$$H_j : a_j^0 w_0 + a_j^1 w_1 + \dots + a_j^N w_N = 0 \quad N+1 \leq j \leq N+k$$

として与えられる様な座標 $w_0 = w_1 = \dots = w_N$ を固定する。

そこで、添字の集合 $I := \{0, 1, \dots, N\}$ の任意の分割 $J =$

$(J_1, \dots, J_p)$ を考える。ここで $I = \bigcup_{l=1}^p J_l$, $J_l \cap J_m = \emptyset$

$(l \neq m)$ 且つ $p \geq 2$ とする。又、写像 $\chi : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow$

$\{1, 2, \dots, p\}$ を任意に取り、 $l \neq \chi(s)$ なるすべての l, s

$(1 \leq l \leq p, 1 \leq s \leq k)$ に対し、 $\sum_{i \in J_l} a_{N+s}^i w_i = 0$ をみ

たす $P_N(\mathbb{C})$ の点 $W = W_0 = W_1 = \dots = W_N$ の全体を $E_{J, \chi}$ とおく。

定理 4.1. $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像 f が、上述の
 $\{H_i : 0 \leq i \leq N+k\}$ に対し、次の条件を満たすとする。

適当な正整数 m_i ($0 \leq i \leq N+k$) に対し

a) 任意の $1 \leq s \leq k$ なる s に対し

$$\sum_{i=0}^N \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{N+t}} < \frac{1}{N}.$$

b) $f(C^n) \not\subset H_i$ ($0 \leq i \leq N+t$) であり、且つ、 $\nu(f, H_i)(z) > 0$ なる z であるならば $\nu(f, H_i)(z) \geq m_i$,

c) $f(z^0) \in H_{i_0} \cap H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}$ ($z^0 \in C^n$, $0 \leq i_l \leq N+t$, $k \geq 1$) なる時、任意の l ($0 \leq l \leq k$) に対し、

$$\nu_l := \nu(f, H_{i_l})(z^0) - \min_{0 \leq l \leq k} \nu(f, H_{i_l})(z^0)$$

が、零か、さもなければ $\geq m_{i_l}$,

この時、 f は定数であるか、又はその像が、或 $E_{J,p}$ の $\leq p-1$ 次元の線型部分空間に含まれる。ここで、 p は分割 J における類の数を表わし、かつ $p \leq \frac{t+N+1}{t+1}$ である。

証明、 C^n 全体での f の admissible representation $f = f_0 + f_1 + \dots + f_N$ を取り、 $\frac{f_i}{f_j} = \text{定数}$ なる i, j を同じ類 J_l に入るとして $\{0, 1, \dots, N\}$ の分割 $J = (J_1, \dots, J_p)$ を考える。 $p=1$ となるのは f が定数の場合だから、 $p \geq 2$ とする。各 J_l から一つづつ代表元 N_l を選び、 $c_j^l := \sum_{i \in J_l} a_j^i \frac{f_i}{f_{N_l}}$ ($1 \leq l \leq p$, $N+1 \leq j \leq N+t$) とおく。この時、

$$F_j = a_j^0 f_0 + \dots + a_j^N f_N = c_j^1 f_{N_1} + c_j^2 f_{N_2} + \dots + c_j^p f_{N_p}$$

なる関係式をうるが、 F_{N+t} ($1 \leq t \leq t$) は、どれかの f_{N_l} ($= f_{N_{X(t)}}$ とおく) との比が定数である。もしそうであれば、 F_{N+t} , f_{N_1} , $\dots$, f_{N_p} に定理 3.5 を適用して矛盾に達するからである。上の式を

$$c'_{N+1} f_{N_1} + \dots + (c'_{N+s} - \frac{F_{N+s}}{f_{N_{X(s)}}}) f_{N_{X(s)}} + \dots + c'_{N+p} f_{N_p} = 0$$

とかきなおし, f_{N_ℓ} ($1 \leq \ell \leq p$) に再び定理 3, 5 を適用すれば,
 $c'_{N+s} = 0$ ($s \neq X(s)$, $1 \leq s \leq p$) を得る. これは, 写像
 $X: s \mapsto X(s)$ に対し, $f(\mathbb{C}^n) \subset E_{J, X}$ とある事を意味す
 る. 更に, 同じ J_ℓ 内の i, j に対し $\frac{f_i}{f_j} \equiv$ 定数. とある事
 に注意すれば, $f(\mathbb{C}^n)$ が $\leq p-1$ 次元部分空間に含まれる事
 は明らかである. 又, $p \leq \frac{t+N+1}{t+1}$ は, 組み合わせ論的
 考察で容易に得られる (c.f., [5]).

注意. 1. 定義からわかる様に, $\bigcup_{J, X} E_{J, X}$ は個々の f による
 ii. 又, $E_{J, X} \not\subset \{w_i = 0\}$ ($0 \leq i \leq N$) とある任意の $E_{J, X}$ に対
 し $\dim E_{J, X} \leq N - (q-1)t \leq N - t$ が容易に示される.

2. $f(\mathbb{C}^n) \cap H_i = \emptyset$ ($0 \leq i \leq N+t$) とある時, 十分大きな m_i
 に対し, 条件 a) ~ c) がみたされる. この特別の場合は,
 [5] および [7] で与えられた. 又, 特に $t = N = 1$ とした
 場合が Picard の小定理である.

3. 定理 4.1 で $N = n = t = 1$, 従って $g = 3$ の場合は,
 条件 a) の不等式は或意味で best possible である. 例
 えば, 相異なる実数 α, β, γ に対し

$$z(w) = \int_0^w (t-\alpha)^{\frac{1}{m_1}-1} (t-\beta)^{\frac{1}{m_2}-1} (t-\gamma)^{\frac{1}{m_3}-1} dt$$

の逆関数 $w = w(z)$ は, $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1$ の時, $-$
 価となり, $w(z) = \alpha$, $w(z) = \beta$, $w(z) = \gamma$ の零点の重複度

は、また、 m_1, m_2, m_3 の倍数ばかりである (C. f., [10], p. 278).

系 4.2. $d > N(N+2)$ に対し、 $P_{N+1}(\mathbb{C})$ 内の超曲面

$$V^d: W_0^d + W_1^d + \dots + W_{N+1}^d = 0$$

への、 $\mathbb{C}^n$ からの任意の正則写像 f は、添字 $0, 1, \dots, N$ を適当に選べ

$$f = a_0 f_1 : a_1 f_1 : \dots : a_{N_1} f_1 : a_{N_1+1} f_2 : \dots : a_{N_2} f_2 : \dots : a_{N_p} f_p$$

とかけられ、ここで、 $0 < N_1 < N_2 < \dots < N_p = N+1$ ($p \geq 1$), a_i

は $\sum_{i=N_{p-1}+1}^{i=N_p} a_i^d = 0$, $(a_0, a_1, \dots, a_{N+1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ なる定数、

f_i は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数である。

証明. 整関数 f_i によって $f = f_0 : f_1 : \dots : f_{N+1}$ と表示する。ここで、 $f_i \neq 0$ ($0 \leq i \leq N+1$) としよう。この時、 $P_N(\mathbb{C})$ への写像 $g = f_0^d : f_1^d : \dots : f_N^d$, および、 $P_N(\mathbb{C})$ 内の超平面

$$H_i: W_i = 0 \quad 0 \leq i \leq N$$

$$H_{N+1}: W_0 + W_1 + \dots + W_N = 0$$

に対し、 $m_0 = m_1 = \dots = m_{N+1} = d$ として、定理 4.1 の条件

a) ~ c) が満たされる。系 4.2 はこれより明らかである。

定理 3.6 を使えば、定理 4.1 の類比として次の事がいえる。

定理 4.3. f を、領域 D から既約解析的集合 $S (\subsetneq D)$ を除いた所からの $P_N(\mathbb{C})$ への正則写像とし、一般の位置にある超平面 $\{H_i: 0 \leq i \leq N+1\}$ に対し、定理 4.1 の条件 a) ~ c) の類比が成り立つとする。この時、 f は、 D から $P_N(\mathbb{C})$ への有

理型写像に拡張されるが、又は、 $f(D-S)$ が或 E_j, π に含まれる。

証明は略す。

§ 5. $P_N(\mathbb{C})$ の有理型写像の一意性。

Borel の恒等式の、今までの応用として、 $P_N(\mathbb{C})$ の有理型写像の一意性定理を与える。

$f, g \in \mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ の有理型写像、 H_i ($0 \leq i \leq N+k$) を $\mathbb{P} := N+k+1$ 個の一般の位置にある超平面とす。 $f(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i, g(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$ ($0 \leq i \leq N+k$) とし、更に、 $\nu(f, H_i) \equiv \nu(g, H_i)$ が成り立つものとする。この仮定のもとに f と g の間の関係を考察する。

斉次座標 $w_0: w_1: \dots: w_N$ を固定し、各 H_i が

$$H_i: a_i^0 w_0 + a_i^1 w_1 + \dots + a_i^N w_N = 0$$

で与えられるとし、 f, g の admissible representation $f = f_0: f_1: \dots: f_N, g = g_0: g_1: \dots: g_N$ に対し、正則関数

$$F_i^f = a_i^0 f_0 + a_i^1 f_1 + \dots + a_i^N f_N$$

$$F_i^g = a_i^0 g_0 + a_i^1 g_1 + \dots + a_i^N g_N$$

を考へる。仮定により、 $h_i = \frac{F_i^g}{F_i^f}$ は到る所零でない整関数である。そこで、連比 $h_0: h_1: \dots: h_{N+k}$ は、斉次座標、admissible representation 等の取り方によらず一定である。

今、 h_i の中から、任意に $2N+2$ 個を選び、それらに

③. $h_0, h_1, \dots, h_{2N+1}$ とする.

補題 5.1. 上述の h_i ($0 \leq i \leq 2N+1$) の間に

$$\sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_N \leq 2N+1} A_{i_0 i_1 \dots i_N} h_{i_0} h_{i_1} \dots h_{i_N} \equiv 0$$

なる関係式が成り立つ。ここで、 $A_{i_0 i_1 \dots i_N}$ は H_i のみによってきまる零でない定数である。

証明. 各座標を取り換えて、各 H_i ($0 \leq i \leq N$) が $H_i = \{w_i = 0\}$, 即ち、 $a_j^i = \delta_j^i$ ($0 \leq i, j \leq N$) としてみよう。この時、 $f_i = F_i^f$, $g_i = F_i^g$ ($0 \leq i \leq N$) だから、 $h_i F_i^f = F_i^g$ ($0 \leq i \leq 2N+1$) から、

$$a_j^0(h_j - h_0)f_0 + a_j^1(h_j - h_1)f_1 + \dots + a_j^N(h_j - h_N)f_N = 0 \quad (N+1 \leq j \leq 2N+1)$$

が成り立つ。これから、 $f_0, f_1, \dots, f_N$ を消去すると

$$\Psi := \begin{pmatrix} a_{N+1}^0(h_{N+1} - h_0), & a_{N+1}^1(h_{N+1} - h_1), & \dots, & a_{N+1}^N(h_{N+1} - h_N) \\ a_{N+2}^0(h_{N+2} - h_0), & a_{N+2}^1(h_{N+2} - h_1), & \dots, & a_{N+2}^N(h_{N+2} - h_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2N+1}^0(h_{2N+1} - h_0), & a_{2N+1}^1(h_{2N+1} - h_1), & \dots, & a_{2N+1}^N(h_{2N+1} - h_N) \end{pmatrix} \equiv 0$$

が得られる。これは、 $h_0, h_1, \dots, h_{2N+1}$ の多項式として展開して、その係数をみる。行列 $((a_j^i))_{\substack{0 \leq i \leq N \\ N+1 \leq j \leq 2N+1}}$ の任意の小行列式が零である事に注意すれば、補題 5.1 にいう形の関係式が容易に得られる。

補題 5.1 で、各 $h_{i_0} h_{i_1} \dots h_{i_N}$ が零でないため整数である事から、定理 3.5 とそれへの注意 1 を適用すれば、任意の $i_0, i_1, \dots, i_N$ ($0 \leq i_0 < \dots < i_N \leq 2N+1$) に対し、 $\frac{h_{i_0} h_{i_1} \dots h_{i_N}}{h_{j_0} h_{j_1} \dots h_{j_N}} \equiv \text{定数}$

となる様な $j_0, j_1, \dots, j_N$ ($0 \leq j_0 < \dots < j_N \leq 2N+1$, $\{i_0, \dots, i_N\} \neq \{j_0, \dots, j_N\}$)
 が取れる。以下の議論で次の補題が基本的である。

補題 5.2. q 個の恒等的には零ではない整数 a_i ($0 \leq i \leq L := q-1$) を考える。ここから勝手な M 個を送る時、その中の任意の相異なる $N+1$ 個 $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_N}$ に対し、これとは組合わせとして異なる $a_{j_0}, \dots, a_{j_N}$ を送った M 個の中から取って

$$\frac{a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_N}}{a_{j_0} a_{j_1} \dots a_{j_N}} = \text{定数}$$

となる様にできると仮定する。ここで $q \geq M > N+1$ ($N \geq 0$) とし、 $k := q - M$ とおく。この時、与えられた q 個の a_i の内、適当な $k+2$ 個について、互いの比が定数となる。

証明. N と q の二重帰納法による。まず、 $N=0$ の時をみる。任意の q 個の a_i に対し、その中の一つ、例えば a_0 との比が定数となるものが n_0 を含めて $\leq k+1$ 個とすると、 q 個から適当な k 個を除き、残り M 個の中に a_0 は含まれ、 a_0 自身の他は、 a_0 との比が定数となるものは含まぬ様にできる。これに仮定を適用すれば矛盾に達する。よってこの場合は正しい。

次に、任意の N に対し $q = N+2$ の時をみる。この時、 $k=0$ である。 $N+2$ 個の元から、 $N+1$ 個の元からなる相異なる二組の組み合わせをとれば、夫々の中の一つづつを除いて、他が等しくなる事から、この場合も補題 5.2 は正しい。

そこで, $\leq N-1$ なる N については, 任意の i に対し, 又, N については, $\leq q-1$ なる任意の q に対し補題 5.2 は正しいと仮定して結論を導く. このとき, 各 h_i ($0 \leq i \leq L$) が定数 d_i , 整数 r_i (> 0) および S_{ij} によって

$$(*) \quad h_i^{r_i} = d_i g_1^{S_{i1}} g_2^{S_{i2}} \cdots g_k^{S_{ik}}$$

の形に書ける様な整数 $g_1, g_2, \dots, g_k$ を考えて, その中で個数 k が最小となる様な組を取る, ここで $h_0, h_1, \dots, h_L$ 自身上の g_j の性質をもつ故 $k \leq q$ である. この様な $g_1, \dots, g_k \in E$ 以下で minimal generator と呼ぶ事にする. この時整数 $s_1, s_2, \dots, s_k$ に対し, $g_1^{s_1} g_2^{s_2} \cdots g_k^{s_k} = \text{定数} (=c)$ ならば必ず $s_1 = s_2 = \dots = s_k = 0$ である. 実際, 例えば, $s_1 \neq 0$ とすると, $g_1^{s_1} = c g_2^{-s_2} \cdots g_k^{-s_k}$ と書け, r_i, d_i, S_{i1} 等 E とりかえて, 各 h_i が $g_2, \dots, g_k$ のみで $(*)$ の形に書ける事になり, k の並び方は反するからである. 又, $(*)$ で $r_0 = r_1 = \dots = r_L = 1$ としてよい. なぜなら, 明らかに, r_i をすべて, その最小公倍数に置きかえてよいし, 更に h_i の代りに $h_i' = h_i^{r_i}$ を考えれば, これに対しても $g_1, \dots, g_k$ は minimal generator であり, $h_0', h_1', \dots, h_L'$ に対して結論が成り立つれば, $h_0, h_1, \dots, h_L$ にもいえるからである.

補題 5.2 をみるには, 或 j_0 に対し $S_{ij_0} \neq S_{ij_0}$ ($i \neq j$) なる i, j が存在するとしてよい. そうでなければ, すべての i ,

j に対し, $\frac{h_i}{h_j} \equiv \text{定数}$ となるからである (ここで, $g \geq k+2$ がつねに成り立つ事に注意). 以後 $S_i = S_{i,j}$ ($0 \leq i \leq L$) と略記する. ここで添字 $0, 1, \dots, L$ をつけかえ, 又, S_N と等しいものに注目して

$$S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_{L_1-1} < S_{L_1} = \dots = S_N = \dots = S_{L_1+L_2} < S_{L_1+L_2+1} \leq \dots \leq S_L$$

とする. 仮定から, $L_1 > 0$ か, 又は $L_1+L_2 < L$ である. この時

$$(5.3) \quad i_0, i_1, \dots, i_N (i_0 < \dots < i_N) \text{ を } i_0=0, i_1=1, \dots, i_{L_1-1}=L_1-1$$

とし, 残りを $L_1, L_1+1, \dots, L_1+L_2$ から任意に選んで,

$$\frac{h_{i_0} h_{i_1} \dots h_{i_N}}{h_{j_0} h_{j_1} \dots h_{j_N}} \equiv \text{定数}$$

となる $j_0, j_1, \dots, j_N$ ($0 \leq j_0 < \dots < j_N \leq L$) を取れる. (必ずす),

$j_0=0, j_1=1, \dots, j_{L_1-1}=L_1-1$ 且 $L_1 \leq j_k \leq L_1+L_2$ ($L_1 \leq k \leq N$) である.

実際, 上の式の分子分母を, $g_1, g_2, \dots, g_N$ で表わし, g_{j_0} の指数と比較すれば, 先にみた様に等しいはずである. 故に

$$S_{i_0} + S_{i_1} + \dots + S_{i_N} = S_{j_0} + S_{j_1} + \dots + S_{j_N}$$

即ち,

$$(S_{j_0} - S_0) + \dots + (S_{j_{L_1-1}} - S_{L_1-1}) + (S_{j_{L_1}} - S_{L_1}) + \dots + (S_{j_N} - S_{i_N}) = 0$$

となる. 添字のきめ方から, 各項は ≥ 0 , 従って $= 0$ となる.

$S_{j_0} = S_0, \dots, S_{j_N} = S_{i_N}$ から (5.3) の結論を得る.

これより, $L_2 - k > N - L_1$ となる. 他せぬと, $L_1 + L_2 \leq$

$N + k$ とすると, h_i ($0 \leq i \leq L$) から $h_0, h_1, \dots, h_N$ を残し,

$h_{N+1}, \dots, h_{L_1+L_2}$ を含む k 個を除いての残りの M 個に,

補題 5.2 を適用して, $\frac{h_0 h_1 \cdots h_N}{h_0 h_{i_1} \cdots h_{i_N}} = \text{定数}$ とする $i_0, i_1, \dots, i_N$ ($0 \leq i_0 < \dots < i_N \leq L$) を取ろうとしても, $i_0 = 0, i_1 = 1, \dots, i_N = N$ となってしまっている. 又, (5.3) を使えば, $h_{L_1}, \dots, h_{L_1+L_2}$ から任意の k 個を選んで除いておき, 残りの L_2+1-k 個から $i_1, \dots, i_N$ を勝手に取り $h_0 h_1 \cdots h_{L_1} h_{i_1} \cdots h_{i_N}$ との比が定数になる様な h_i の $N+1$ 個の積を考える事によって, $N' = N - L_1$, $g' = L_2 + 1$, $M' = g' - k$ として, 補題 5.2 の仮定がみたされる事がわかる. $L_1 > 0$ ならば $N' < N$ だし, $L_1 = 0$ ならば $g' = L_1 + L_2 + 1 < L + 1 = g$ だから, 帰納法の仮定が適用される. 従って, $h_{L_1}, h_{L_1+1}, \dots, h_{L_1+L_2}$ の中の適当な $k+2$ 個に対し互いの比が定数となる. よって補題 5.2 は証明された.

定理 5.4. f, g を, $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への n 個の有理型写像とする. 一般の位置にある $3N+1$ 個の超平面 H_i ($0 \leq i \leq 3N$) に対し, $v(f, H_i) = v(g, H_i)$ ならば, $P_N(\mathbb{C})$ の適当な一次変換 L に対し $L \circ f = g$ となる.

証明. 本節初めの様な整関数 $h_0, h_1, \dots, h_{3N}$ を考えれば, 補題 5.1 の後の議論により, $g = 3N+1, M = 2N+2$ として補題 5.2 の仮定が成り立つ. 従って, h_i の中の適当な $k+2$ ($= 3N+1 - (2N+2) + 2 = N+1$) 個について, 互いの比が定数となる. 連比 $h_0 : h_1 : \dots : h_{3N+1}$ のみが問題故, h_i の $N+1$ 個が定数と考えてよい. よって, 適当な座標を使って

の f, g の admissible representation $f = f_0 : f_1 : \dots : f_N$ およ
 び $g = g_0 : g_1 : \dots : g_N$ に対し, 定数 α_i によって $g_i = \alpha_i f_i$
 $(0 \leq i \leq N)$ とかける. この時,

$$L : w'_i = \alpha_i w_i \quad (0 \leq i \leq N)$$

なる一次変換を考えれば, $Lf = g$ である.

定理 5.5. f, g を $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への非退化写像, 即ち,
 像がいくつかの超平面にも含まれない様な有理型写像とする.
 もし, 一般の位置にある $3N+2$ 個の超平面 $H_i (0 \leq i \leq 3N+1)$
 に対し, $\nu(f, H_i) = \nu(g, H_i)$ ならば $f = g$ である.

注意. $n = N = 1$ の場合, 定理 5.4 および定理 5.5 は, finite
 genus の整関数に対し, G. Pólya によって [11] で初めて
 示された. 後に R. Nevanlinna が, 一般の整関数の場合に
 証明した. この場合, 定理 5.5 では, 重複度は考えず, 写
 像が一致するという仮定のみである. N が一般でも, 十分大
 きい d に対し, $\nu(f, H_i) - \nu(g, H_i)$ が, すべて d の倍数と
 いう仮定で同様の議論ができるが, ここでは, これには立ち
 入らない.

証明. 定理 5.4 の証明と同様の議論をやり, 今度は $N+2$
 個の f_i を定数と考えてよい. 定数 α_i による $g_i = \alpha_i f_i$
 $(0 \leq i \leq N)$ の関係式の他に, 新しい定数 α_{j_0} を取って

$$a_{j_0}^0 g_0 + a_{j_0}^1 g_1 + \dots + a_{j_0}^N g_N = \alpha_{j_0} (a_{j_0}^0 f_0 + \dots + a_{j_0}^N f_N)$$

なる関数式を得る。これは、 $f_0, f_1, \dots, f_N$ の定数係数の一次式に帰されるが、 f が非退化の仮定から係数はすべて零、従って $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_N = \alpha_{j_0}$ を得る。これは $f = g$ を意味する。よって定理 5.5 は証明された。

参考文献

- [1] E. Borel, Sur les zéros des fonctions entières, Acta math., 20 (1897), 357-396.
- [2] H. Cartan, Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications, Ann. de ENS., 45 (1928), 255-346.
- [3] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Math., 7 (1933), 5-31.
- [4] H. Fujimoto, Riemann domains with boundary of capacity zero, Nagoya Math. J., 44 (1971), 1-15.
- [5] H. Fujimoto, Extensions of the big Picard's theorem, Tôhoku Math. J., 24 (1972), 415-422.
- [6] H. Fujimoto, Meromorphic maps into the complex projective space, to appear.
- [7] M. L. Green, Holomorphic maps into the complex projective space omitting hyperplanes, Trans. A.M.S., 169 (1972), 89-103.

- [8] M.L. Green, Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties, thesis, Princeton, 1972.
- [9] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitsätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math., 48 (1926), 367-391.
- [10] R. Nevanlinna, Analytic functions, Springer, Berlin, 1970.
- [11] G. Pólya, Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen, Math. Tidsskrift B, København 1921, 16-21.
- [12] E. M. Schmid, Some theorems on value distributions of meromorphic functions, Math. Z., 120 (1971), 61-92.
- [13] N. Toda, On the functional equation $\sum_{i=0}^p a_i f^{n_i} = 1$, Tôhoku Math. J., 23 (1971), 289-299.