

複素多様体の双有理型分類と

楕円曲面の多種数、位相的性質

東京大学、理、飯高 茂

§ 1. 序.

便宜上 M^n を複素 n -次元の compact 複素多様体とし以下常にこの意味で用いることにする.

20 世紀初頭に 代数曲面の双有理分類理論 がイタリヤの代数幾何学者 G. Castelnuovo と F. Enriques とにより、粗削りながらも美しく完成して以来⁽¹⁾それと凌駕する理論は約半世紀の間生れなかつた. 数学史上の一偉観といふべきである. 小平邦彦は 50 年代の終りから一般の M^2 (最初 $Kähler$ 曲面, Atiyah-Singer 理論が誕生してから M^2) は全く一般の M^2 を考察してその双正則分類と構造の理論をつくり [10] I, II, III, IV に美しく展開した. 又楕円曲面の精緻を極めた一般論 [9], II, III 一般型代数曲面の標準モデルについての深い研究 [11] (更に未発表の研究もある.) も古典をはるかに越えた深刻無比なものであった. M^3 の研究にはじめて取り組んだのは河井壯一

[8] である。この方法は基本的に小平の M^2 の研究に用いられたものであるが、3次元固有の議論、又 M^2 の理論を透明なうしあるものがあって興味深い。

本論文では、小平-河井の方法を基礎にして M^n の理論が現状ではどの程度までできるかを解説する。なお著者の解説の論文「代数多様体の種数と分類」の §5 と重なる所もあるが併読されればよいことであろう。

まず M^n の標準次元 $k(M)$ (canonical dim. of M) を説明する。次に M^n の代数的次元 $a(M)$ を考え、基本定理(在中)に到る。そして最も中心である $a(M)=0$ なる Kähler 多様体の Albanese 多様体の研究を行ない、最後に楕円曲面の基本群の表をかき、多様数との関連をうける。

§2. M^n の標準次元 ([7] 参照).

M^n 上の因子 D (又は invertible sheaf) と一々定めておく。

[D] で D が与えられた line bundle, $\mathcal{O}(D)$ でその section の束の層, $l(D) = \dim H^0(M, \mathcal{O}(D))$ と記すことにする。

更に $N(D) = \{m \in \mathbb{N}; l(mD) > 0\}$ とおく。 $N(D) \neq \emptyset$ のときそれは $\mathbb{N}$ の sub-semigroup をつくる。ゆえに $N(D)$ の元の g.c.d. を $m_0(D)$ とおくと、 $m \in N(D) \Rightarrow m \equiv 0 \pmod{m_0(D)}$, 又 $m \gg 0, m \equiv 0 \pmod{m_0(D)} \Rightarrow m \in N(D)$, となる。

又一般に $l(D) > 0$ のとき, $H^0(M, \mathcal{O}(D))$ の基底 $\psi_0, \dots, \psi_N$ とし, 有理型写像 Φ

$$M \ni p \longmapsto \psi_0(p) : \psi_1(p) : \dots : \psi_N(p) \in \mathbb{P}^N$$

が定まる.

ここで一般の D に戻す, 但し $N(D) \neq \emptyset$ とする. すると,

$$k(D, M) = \max_{m \gg 0} \dim \Phi_{m m_0(D)}(M)$$

として, 非負 ($\leq n$) 整数が定まるから, $z \in M$ の D 次元とよぶことにする. すると, 以上の記号を用いて,

定理 1. 充分大なる整数 m に対して

$$\alpha m^k \leq l(m m_0(D) D) \leq \beta m^k,$$

但し $k = k(D, M)$, α, β は m によらない常数

が成立する.

定理 2. $k(D, M) = k > 0$ のとき, 任意の正なる常数 ρ と一方向定まる. すると充分大なる整数 m に対して

$$l(m m_0(D) D) - l((m - \rho) m_0(D) D) \leq \gamma m^{k-1},$$

但し γ は m によらない常数.

これは定理 1 の右辺の評価の精微化である.

$m_0(D)$ の存在は少々気持悪いが仕方がない. (しかし次の定理が成立する.)

定理 3. i) $k(D, M) = n$ とする. すると $m_0(D) = 1$.

又 ii) 一般には D に対し次の性質をもつ因子 D_0 が唯一
 つ存在する. 1) $m_0(D) = m_0(D_0)$, 2) $m_0(D - D_0) = 1$,
 3) $\kappa(D_0, M) = 0$, 4) $\kappa(D - D_0, M) = \kappa(D, M)$, 5) $\kappa(D, M)$ は D の成分の
 数最小.
 Remark. $N(D) = \emptyset$ のとき, $\kappa(D, M) = -\infty$ とおき,

一般に M の D 次元を定義しておく. この定義は後に甚な便利
 となる.

定理 4. $\kappa(D, M) = k > 0$ のとき, 次の性質をもつ compact
 複素多様体の fiber 空間 $\psi: M^* \rightarrow W$ が双有理型同値と
 除いて唯一つ存在する:

- i) M^* は M と双有理型同値,
- ii) W は, 射影的代数多様体の構造を許す,
- iii) ψ の一般の fiber $M_w^* = \psi^{-1}(w)$ は連結. M^* と M の
 双有理型対応によつて M 上の D の像を D^* , それを M_w^* 上への制
 限を D_w^* とおく. すると, $\kappa(D_w^*, M_w^*) = 0$.

定理 5. compact 複素多様体の fiber 空間 $f: \tilde{M} \rightarrow M$
 を与える. すると,

- i) M 上の因子 D に対しては, $\kappa(D, M) = \kappa(f^*D, \tilde{M})$,
(general)
- ii) $\tilde{M}$ 上の因子 $\tilde{D}$ に対しては, $f^{-1}(w)$ を f の fiber の一般成分を
 $\tilde{M}_w$ と表わすとき, $\kappa(\tilde{D}, \tilde{M}) \leq \kappa(\tilde{D}_w, \tilde{M}_w) + \dim M$.

以上の定理は, 基本的には G.A. G.A. により代数多様体に

ひきもととして証明される。そのまゝ全く代数幾何的なものである。

さて、 $D = M$ の標準因子 (canonical divisor) のとき、 $\kappa(D, M) \leq \kappa(M)$ と表わし M の標準次元 (canonical dimension of M ; 或は、 M のコダイマ次元又はクニヒコ次元などと呼ばれるものだろうが。) とよぶことにしよう。この場合により定理を書くと次のようになる。

$\kappa = 0$. $\kappa(M)$ は M の双有理型不変量で、 $\kappa(M) = -\infty, 0, 1, \dots, n$ なる $n+2$ 個の値をとる。

$\kappa = 1$. $\tilde{M} \rightarrow M$ は M の有限不分岐被覆とする。すると、 $\kappa(\tilde{M}) = \kappa(M)$ 。

$\kappa = 2$. $\varphi: \tilde{M} \rightarrow M$ は compact 複素多様体の fiber 空間。 $\tilde{M}_\omega$ は φ の一般の fiber $\varphi^{-1}(\omega)$ の連結成分とする。

そのとき、 $\kappa(\tilde{M}) \leq \kappa(\tilde{M}_\omega) + \dim M$ 。

$\kappa = 3$. $\kappa = \kappa(M) > 0$ とする。すると次の性質をもつ fiber 空間 $\varphi: M^* \rightarrow W$ は双有理型同値を除いて一意に存在する：

- i) M^* は M と双有理同値
- ii) W は射影的代数多様体の構造を持ち、 κ 次元。
- iii) φ の一般の fiber $\varphi^{-1}(\omega) = M_\omega^*$ は連結
- iv) $\kappa(M_\omega^*) = 0$ 。

Remark. $\kappa(M) = 0$ なる M と分類するのは甚だ興味がある。

る極めて難しい問題にある。

§ 3. M^n の代数的次元.

M^n の有理型函数全体は $\mathbb{C}$ 上の代数函数体 $\mathbb{C}(M)$ とつくる. γ
 ここで代数的次元 $a(M) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(M)$ を定義する. すると,

$a = 0$. $a(M)$ は M の双有理型不変量で, $a(M) = 0, 1, \dots, n$
 なる $n+1$ 個の値をとる.

$a-1$. $M_1 \in M^n$ の subvariety (irreducible reduced analytic sub-
 set of M) とする. すると $a(M_1) \geq a(M) - (n - \dim M_1)$. (上野^{*})

$a-2$. $\tilde{M} \rightarrow M$ を compact 複素多様体の fiber 空間と
 する. すると, $a(M) \leq a(\tilde{M}) \leq a(M) + \dim \tilde{M} - \dim M$. (上野^{*})

$a-3$. $a = a(M) > 0$ とする. γ のとき次の性質をも
 つ fiber 空間 $f: M^* \rightarrow W$ が双有理型同値を除いて唯一
 存在する:

- i) M^* は M と双有理型同値,
- ii) W は a -次元で射影的代数多様体の構造を許す,
- iii) f により惹き起こされた $\mathbb{C}(W) \rightarrow \mathbb{C}(M^*) = \mathbb{C}(M)$ は同型
 対応を与える.

(一意性は上記の i~iii で出してしまうが),

iv) f の一般の fiber $f^{-1}(w) = M_w^*$ は連結 (河井),

v) M 上の因子 D に対し 常に $\kappa(D_w^*, M_w^*) \leq 0$, と

$\kappa(M_w^*) \leq 0$ (広中).

* 上野健爾 (東京大学).

ことにしよう. $g = g(M) = \frac{1}{2}b_1(M) = h^{0,1}(M) = h^{1,0}(M)$

を用いて M の分類をやる.

$g=0$. $g(M)$ は M の双有理型不変量で, $g(M)=0, 2, \dots, n$ なる n 個の値をとる.

$g=1$. $\tilde{M}$ を M の有限 (今は) 複素多様体とす. $g=2$ により $g(\tilde{M})=0$ になる, 又 $g(\tilde{M}) \geq g(M)$.

$g=2$. 次の性質をもつ fiber 空間 $\pi: M \rightarrow T^g$ が存在する. (証明は [8] II と同じ).

i) T^g は g 次元の complex torus, 又正の因子をもたない.

ii) π の一般の fiber $\pi^{-1}(t) = M_t$ は連結, 従って compact 複素多様体.

π は M の Albanese 写像 (あるべきように定義される):

$$H^0(M, \Omega^1) \ni \omega_1, \dots, \omega_g, \quad H_1(M, \mathbb{Z}) \ni \gamma_1, \dots, \gamma_{2g}.$$

$\mathbb{C}^g$ を $(\int_{\gamma_1} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_1} \omega_g), \dots, (\int_{\gamma_{2g}} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_{2g}} \omega_g)$ が基底となる lattice Γ によって T^g とおくと, $0 \in M$ を定めて

$$M \ni p \mapsto \left(\int_0^p \omega_1, \dots, \int_0^p \omega_g \right) \in T^g,$$

により Albanese 写像 π が定義される.

κ, g, g と g に関する証明は簡単に示す (結論は簡単に示す) なる.

定理 (可算). $g(M)=n-1$ のとき $\kappa(M_t) \leq 0$. 即ち M_t は楕円曲線か射影直線.

我々は $g(M) = n-2$ の時の部分の解答として、

定理 $\star$ $g(M) = n-2$ のとき、 $\kappa(M_t) \neq 1$.

また、楽天的になてると、

予想: 一般に $\kappa(M_t) \leq 0$.

同じことの根拠は殆ど何もない。 κ のときには $\kappa(1) = 0$

のときは $\kappa(1) \leq 0$. ところが g のときは $\kappa(1) \neq 1$ であり、身合相違という所だが、予想から之れはまさに大定理であらう。それについてこの理論はこう考えてみると仲々優秀なことが御理解いただけよう。

§5 定理 $\star$ の証明.

M_t を一般型の楕円曲面 (即ち $\kappa(M_t) = 1$) と仮定して矛盾を導く。曲面の変形理論によれば、 κ は変形不変。よって、ある $t_0 \in T$ で M_{t_0} の標準次元が 1 であり、それでは $\mathbb{P}^1$ の函数行列の位の下らない点では常に M_t の標準次元は 1 になっている。

第 1 段階. $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\alpha K_M)$, ($\alpha \geq 86$) とおいて, Grothendieck 理論に従って, 有理型写像 $\pi: M \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{P}_*(\mathcal{L})) / T$ を構成する. $N \subset M$ の π による像とする. $T' = \{t' \in T; \pi^* \mathcal{L}_{t'}(2) = n-2, \pi^* \mathcal{O} = t'\}$ とおく. $T - T'$ は T の解析的集合である. T には余次元 1 の部分解析的の族が存在しないから, $T - T'$ の余次元 ≥ 2 . なることがわかる. $M' = \pi^{-1}(T')$ とおく. すると

と $\pi' = \pi|_{M'} : M' \rightarrow T'$ は, 滑らか (smooth) である. γ して, $t' \in T'$ に対しても $M_{t'}$ は一般型の楕円曲面となる. また, 一般型の楕円曲面の変形理論 ([6] II §3) によると, $\pi' = \pi|_{M'} : M' \rightarrow N' = N|_{T'}$ は, 各点 $t' \in M'$ に対して, $M_{t'}$ の elliptic fiber space の fibering を与えるものである.

才2段階. $a(N) \geq 1$ を示す為に河井の理論を用いる.

定理 (河井). fiber space : $\pi : N \rightarrow T$ を, $\dim N = \dim T + 1$, T は $a(T) = 0$ なる complex torus とする. π の general fiber C_t が既約のとき, γ の genus $\pi = \pi(C_t) \geq 2$ ならば $a(N) \geq 1$. $\pi = 1$ でも π が section をもつとき ($\pi = 0$ ならば3個以上の section をもつとき) $a(N) \geq 1$.

これによれば; M_t の底曲線の種数 π は, 1 または 0 となることがわかる. 次には section の存在をいはいはよい.

才3段階. 次の Lemma を証明する.

Lemma. 一般型の楕円曲面 S は, $\pi(S) = 1$ ならば γ と γ 1 つ, $\pi(S) = 0$ ならば γ と γ 3 つの singular fiber を持つ.

(証明) $\psi : S \rightarrow \Delta$ を S の elliptic fiber space とする. $\pi = \pi(\Delta) = (\pi(S) \circ \text{def.})$, ψ の multiple fiber の重複度は $m_1, \dots, m_s$ とすると, $\kappa(S) = 1$ によつて,

$$2\pi - 2 + 1 - g + p_g + \sum_{v=1}^s \left(1 - \frac{1}{m_v}\right) > 0. \quad (1)$$

$\pi = 1$ 2 singular fiber があるとす。すると $s=0$,
 又, singular fiber の型 I_0^* , II , ... とも singular fiber
 の数 $v(I_0^*)$, $v(II)$, ... 2 元 j と l 2 functional invariant
 の order を表すとき,

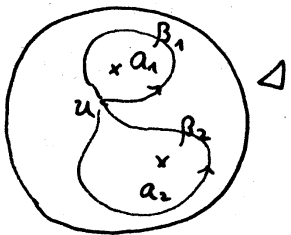
$$12(1-g+p_g) = j + \sum_{b \geq 1} 6v(I_b^*) + 2v(II) + 10v(II^*) + 8v(III) \\ + 9v(III^*) + 4v(IV) + 8v(IV^*) \quad (2)$$

が成立するのである。た。 (2) によれば, $1-g+p_g = 0$. 2 は
 は (1) の不等式と矛盾する。之を,

$\pi = 0$ 2, singular fiber が高々 2 本として, 矛盾を導く。
 Case I) $s=0$. このとき (1) によれば, $1-g+p_g > 2$.
 よって (2) に checking すると,

$$j + \sum 6v(I_b^*) + \dots \geq 36. \quad (3)$$

$j=0$ 2 $j=0$ の時を考へる。明かに singular fiber が
 2 本 (かそれ以上) (3) は成立しない。 $j > 0$ の時を考へよう。



又 singular fiber は 2 本: $\psi^*(a_1)$, $\psi^*(a_2)$

があるとしよう。左の図の道 β_1 , β_2 を

とり, $E_u = \psi^{-1}(u)$ の 1-cycle を動かす。

$H_1(E_u, \mathbb{Z})$ の変換 B_1 , B_2 をとる。

すると $B_1, B_2 = 1$. $j > 0$ によつて, I_0 又は I_0^* の

singular fiber が存在する。た。 B_1 は $SL_2(\mathbb{Z})$

の $\pm \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と共役 としてよい。 2 $b_1 > 0$. 2

ると B_2 も無限位数になる。ゆえに B_2 も $\pm \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_2^*(b_2 > 0)$ と $SL_2(\mathbb{Z})$ 内で共役。 $B_1 B_2 = 1$ なのだから、 $B_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、お $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ が $AB_2^* = B_1^{-1} A$ をみたすことになる。
 $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ として、 $AB_2^* = B_1 A$ と具体的に書き表わす。
 ゆえに $b_1, b_2 > 0$ に矛盾することが出てくる。又 singular fibre が 1 本なり、直ちに矛盾。 Case II. $\lambda > 0$. この時も同様にして矛盾を導くことができる。

才 4 段階. 有理型写像 $h: M \rightarrow N$ の不確定点を左の定理を用いて除去する。即ち双有理型正則写像 $M_1 \rightarrow M$ があ、 h と合成すると、 $h_1: M_1 \rightarrow N$ は正則写像。 $\tau = \tau$,
 $A_1 = \{ h_1 \}$ の函数行列が maximal rank をもたない点とあくと、 A_1 は M_1 の解析的集合。 Remmert の定理によると、 $B = h_1(A_1)$ も解析的集合。さて、 $t' \in T'$ に対しても、 $B|_{t'} \subset N|_{t'}$ なる $elliptic$ fibre space $M_{t'} \rightarrow N|_{t'}$ の fibre が singular であり通る。ゆえに、 fiber space $N \rightarrow T$ は次の性質をもつ。 i) $\pi(N_t) \geq 2$ 或 ii) $\pi(N_t) = 1$, $N \supset B$ があり、 $B|_t \neq \emptyset$ for all $t \in T$. 或 iii) $\pi(N_t) = 0$, $N \supset B$ があり、 $B|_t$ は $t \in T'$ について有限集合でその数 ≥ 3 , 残りの点では $B|_t$ は 1 次元の解析的集合。(ここには B は余次元 1 の解析的集合)。 i) は、才 2 段階にわたる河井の定理によると $a(N) \geq 1$, 又、 ii) の時も

も [1] の手法により結局 section の存在がわかって $a(N) \geq 1$ となる予備に到る. もっとも次の場合の議論と大体同じである. さて iii) の時を考へる. B の既約成分 T 上の π 束 B_1 もとり $B_1 \subset N \rightarrow T$ を考へる. $B_1 - B' \rightarrow T'$ は不分岐だから, $\pi_1(T') \xrightarrow{\sim} \pi_1(T)$ (こ

れは, $T - T'$ の実余次元 ≥ 4 による) に注意すると, T の不分岐被覆 T^* が存在し, open immersion $B_1 - B' \rightarrow T^*$ が

なつて,
$$\begin{array}{ccc} B_1 - B' & \rightarrow & T^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \rightarrow & T \end{array}$$
 が可換図形となる. 重: $M \rightarrow T$

の存在を拡大する: $M^* = M \times_T T^* \rightarrow T^*$. $a(M^*) = a(M) = 0$

だから, 同様に M_t^* の底曲線の族の compact 化 N^* をつくると, その singular fiber の底まわりの解析的集合 B^* は,

$\# B_t^* \geq 3$, おつ $B_1^* = B_1$ であつて. これは, T^* 上の

section となる. B^* にはまた既約成分があるから, 一つを

B_2^* として同様の考察を繰り返す: $N^{***'} \rightarrow T^{***'}$ 上に

3 本の section をもつ $\mathbb{P}^1$ -bundle がある. よつて $N^{***'} = \mathbb{P}^1 \times T^{***'}$.

かくて, $C(N^{***'}) = C(\mathbb{P}^1) \times C(T^{***'}) = C(t)$. 又 $N^{***'} \rightarrow$

N' は finite だから, $C(N^{***'})/C(N')$ は代数的拡大.

$C(N') = C(N)$ は, $N - N'$ の全次元 ≥ 2 より明らか. 以上

により $a(N) = 1$ が示されて予備に到る.

§6. 楕円曲面の基本群と多様数.

S を楕円曲面, π の 1 つの elliptic fibre space $\pi: S \rightarrow \Delta$ で示す. S の基本群を G で示す. G の群論的構造を考察するために $C = G$ の中心, $H = G/C$, $K = [G, G]$ (G の commutator 群), $A = G/K$ の記法を用いる. 又通常のように $\{m_1, \dots, m_s\}$ をもって $\pi: S \rightarrow \Delta$ の重複 fibre の重複度を示すことにしよう. 又 $\pi = \pi(x)$ である.

G の構造はまず 4 類にわかたれて, 各題では与えられた下のように定められる. 但し π は極小モデル^{*}である.

東) G : 可換群.

G	b_1	π	s	p_g	S の構造
0	0	0	≤ 1	0	有理的 或は一般型
0	0	0	≤ 2	1	$K3$ 或は一般型
$\mathbb{Z}_2$	0	0	2	0	Enriques 或は一般型
$\mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{d'}, 0$		0	≤ 2		一般型
$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$	1	0	≤ 3	0	Hopf 曲面
$\mathbb{Z}^2$	2	0	≤ 3	0	線織面
$\mathbb{Z}^4$	4	1	0	1	複素四環体

($\mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{d'}$ は $d' = 1$ なら $d \geq 3$, 又 $d' \geq 2$ なら $d \geq 2$, とともに有限の数とする; $d'' \geq 1$)

^{*} モデルを変えても基本群, P_m とともにかわらない.

西) G は可換でない, H は有限群.

G	H	C	$\{m_1, \dots, m_d\}$	S の構造
有限	D_{2m}	$\mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_2$	$\{2, 2, 2m\}$	一般型 (このとき $G \cong D_{4m}$)
		$\mathbb{Z}_{d'}$	$\{2, 2, m\}$	
		$\mathbb{Z}_2$	$\begin{cases} \{2, 2, 2m\} \\ \{2, 2, m\} \end{cases}$	

A_4	$\mathbb{Z}_{d''}$	$\{2, 3, 3\}$
S_4	$\mathbb{Z}_{d''}$	$\{2, 3, 4\}$
A_5	$\mathbb{Z}_{d''}$	$\{2, 3, 5\}$
D_{2m}	$\mathbb{Z}$	$\{2, 2, 2m\}$
	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\begin{cases} \{2, 2, 2m\} \\ \{2, 2, m\} \end{cases}$
A_4	$\mathbb{Z}$	$\{2, 3, 3\}$
S_4	$\mathbb{Z}$	$\{2, 3, 4\}$
A_5	$\mathbb{Z}$	$\{2, 3, 5\}$

Hopf 曲面.

(ここに於て 群の記号, D_{2m} は位数 $2m$ の二面体群,

A_4 は正四面体群, S_4 は正六面体群, A_5 は正十二面体群と

れで示す, 又, $d = 2, 3, 4, \dots$, $d' = 1, 3, 4, \dots$, $d'' = 1, 2, 3, \dots$

と示す.)

南) G は可換でも有限でもなく, K は可換.

H	A	K	$\{m_1, \dots, m_d\}$	S の構造
$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$	0	$\delta = 0$	(1) の型, $\theta_1 = 3$,
	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_d$	$\delta = 0$	一般型, $\pi = 1$,
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^2$	$\{2, 2, 2, 2\}$	(2) の型	$\left. \begin{array}{l} \text{(2) の型} \\ \text{(3) の型} \\ \text{(4) の型} \\ \text{(6) の型} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{又は一般型} \\ \text{かつ } \pi = 0 \end{array}$
$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}^2$	$\{3, 3, 3\}$	(3) の型	
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}^2$	$\{2, 4, 4\}$	(4) の型	
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}^2$	$\{2, 3, 6\}$	(6) の型	

(ここに (i) の型とは $iK \sim 0$, かつ $jK \not\sim 0$ ($j \leq i-1$) なる曲面を示す).

北). 以上以外.

G は, $N = \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_d$ ($d \geq 1$), $F =$ 取りうる
ない fuchs 群 とするとき N の F による拡大と唯一通り
に表される. 又 抽象群の構造から F の 極大有限群の位数 $m_1, \dots$
 m_d が定まる* として $\pi = F/(F, F)$ の位数, $\{m_1, \dots, m_d\} =$
 $\{m_1, \dots, m_d\}$ になる.

以上の表をたぬすことがあつたことにより 次の結論とす.

甲) S の 底曲线の種数は, S が hyperelliptic (南類に入る)

*) Reidemeister の定理.

にない限り, homotopy 不変である.

乙) (i) の型 は homotopy 不変である. もう少し詳しくい
うと, S は (i) の型 とする. S_1 は 曲面 で, S と 同じ homotopy
型 を もつ とする. そのとき S_1 も (i) の型 になる.

丙). $S \in G \neq \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_{d'}$ ($1 \leq d, d'$), $\neq D_{4k}$ なる 楕円
曲面 とする. すると $P_m(S)$ ($m \geq 1$) は, 楕円曲面 の 範囲
内 で homotopy 不変 である.

丁) $C_1^2(S) = C_2(S)$, $b_1(S) > 1$ なる 楕円曲面 S の $P_m(S)$
は homotopy 不変 である. とくに小平の分類 VI_0 の 曲面 の
 P_m はすべて homotopy 不変 である.

戊) G : 有限, $\neq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2'}$, D_{4k} なる $P_m(S)$ は homotopy
不変量.

Remark. 甲) は 変形不変 という 形 で示さ
れている. このように 基本群 の 研究 によれば, [] とは 独立
だから, 甲) を まさき 用いる と [] の 証明 が 少く 事 になる.
乙) も [] に 変形不変 という 形 で示さ されて いる. (か
しこ の 議 は 高次元 に 拡張 できる もの である).

G の 構造 表 の 証明 の 概要.

1) まず, $\Psi: S \rightarrow \Delta$ の 重複 fiber $\Psi_1^*(a_1) = m_1 \Psi_1^{-1}(a_1), \dots$,
 $\Psi^*(a_s) = m_s \Psi^{-1}(a_s)$ を 考え て, それ を 除 去 し た い. 即ち, Δ に,
 $a_1, \dots, a_s$ に 対 し, $m_1, \dots, m_s$ 位 の 分岐 指数 を もつ 普通 被覆 変

様体 $\tilde{\Delta}$ を構成したいのだから主な場合がある。またこの時
から片は付てしまふ。

II) $\pi = 0, d \leq 2$ とする。 $P_m = -2m + m(1 - q + p_2)$
 $+ [m(1 - 1/m_1)] + [m(1 - 1/m_2)]$, したがって, $1 - q + p_2 = 0$
 なら $\kappa = -\infty$ となり ruled の Hopf. 又 $\kappa = 0, 1$ と
 場合別とよむ。

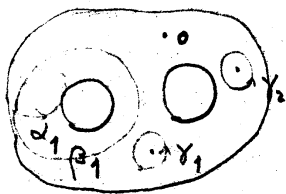
III) 同様にする。 $\tilde{S} = S \times_{\tilde{\Delta}} \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}$ は $\tilde{\Delta}$ 上の
 elliptic fibre space. $\tilde{S}/\tilde{\Delta}$ の基本群を $\pi_1^*(\tilde{S}/\tilde{\Delta})$ と示
 すと,

$$\{1\} \rightarrow \pi_1(\tilde{S}) \rightarrow \pi_1(S) \rightarrow \pi_1^*(\tilde{S}/\tilde{\Delta}) \rightarrow \{1\}, \text{ (exact)}$$

が得られる。またもとより $\pi_1(S)$ の generator を調べる。

IV) $S \rightarrow \Delta$ に I_6 以外の型の singular fibre がある。と
 する。するとこれは単連結。よってこのとき $\pi_1(\tilde{S}) = \{1\}$ 。
 したがって $\pi_1(S) \cong \pi_1^*(\tilde{S}/\tilde{\Delta})$ 。 I_6 の型しかないとする。

V) まず, $\pi_1(\Delta - \{a_1, \dots, a_d\})$ の generator を通常のように
 $\alpha_1, \dots, \beta_d, \gamma_1, \dots, \gamma_d : \alpha_i, \beta_i, \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}, \dots, \gamma_d = 1$ (とよむ)。



$0 \in \Delta - \{a_1, \dots, a_d\}$ を定めておく。 $\tilde{\Psi}^*(0)$
 $= E$ としよう。また α, β, γ の S 上への
 lift を A, B, Γ と示す。すると,
 covering homotopy theorem によつて relation
 $A, B, A^{-1}B^{-1}, \dots, \Gamma_d = \varepsilon^c \delta^d$, ε, δ は $\pi_1(E)$

の generator, $c, d \in \mathbb{Z}$ である. 又 A, δ, A^{-1} は $\Delta - \{a, -\}$

上では trivial. よって, $\{\varepsilon, \delta\}$ は

$\{A, \dots, T, \varepsilon, \delta\}$ の中で $\pi_1(S)$ を生成する.

このようにして $S' = \mathbb{P}^{-1}(\Delta - \{a, -\})$

の基本群が求まる. すると

$\pi_1(S)$ の generator は $\{A, B, T, \varepsilon, \delta\}$

で relation は 1) $\{\varepsilon, \delta\}$

は可換群 (i.e., $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon$, かつ $R(\varepsilon, \delta)$

$= 1$ という relation もあり) 2) $\{\varepsilon, \delta\}$

は $\pi_1(S)$ の部分群, 3) $A, B, A^{-1}B^{-1}, \dots, T \in \{\varepsilon, \delta\}$. 今この

証明しよう. E 内に $-$ は 1 である. $\pi_1(S', 1)$ として考える.

$\pi_1(S', 1) \ni L$ として $\mathbb{P}(L)$ とおくと, $\mathbb{P}(L) = \alpha, \gamma$

と表わされる. したがって $L = A, \dots, T \cdot \varepsilon^c \delta^d$ と表わされる. 従

に relation を求める. $R(A, B, T, \varepsilon, \delta) = 1$ と (1)

より $R = R_1(A, B, T) \cdot R_2(\varepsilon, \delta)$ と分離できる. 更に

$R_1(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ である, $R_1(A, B, T)$ も簡約化してゆけば,

$R_1(A, B, T) = R_3(\varepsilon, \delta)$ と表わされる. $R = R_3(\varepsilon, \delta) \cdot R_2(\varepsilon, \delta)$

$= 1$. したがって 1) となる. 2) については, V. Kampen の定理

を用いて, $\pi_1(S)$ の generator と relation を求めるのは

である. $A, B, T, \varepsilon, \delta \in \pi_1(S)$ とおくと (3) は

より生成され, relation は 1) 2) 3) となる. 4) $T_i^{m_i} \in$

$\{\varepsilon, \delta\}$, 5) $\varepsilon \Gamma_i = \Gamma_i \varepsilon$, $\delta \Gamma_i = \Gamma_i \delta$ $i=1, 2, \dots, s$. 更に注意. VII) I_0 ; $\delta > 0$ の singular fibre E^π を持つとき, $\varepsilon = \delta$ である. 7) は, $\pi_1(E^*) \cong \mathbb{Z}$ である. VIII). $\pi = 0$ とする. relation 5) によれば, $\{\varepsilon, \delta\} \subset \text{Cent } \pi_1(S)$. 又 IX) $\pi_1(\tilde{S}) = \{\varepsilon, \delta\}$ とみなせる. 2) 7), $\pi_1(\tilde{S}) = \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, 0$ である. 2) III) のところまで考えれば, ことにより III) $\pi = 0$ とする. $\pi_1^*(\tilde{S}/\Delta)$ の群構造を調べると, $\pi_1^*(\tilde{S}/\Delta) \cong D_{4k}$ 以外は $\text{Cent}^* = 0$. それだから, $\text{Cent} = 0$ のときは, $\pi_1(\tilde{S}) = \text{Cent } \pi_1(S)$. $\pi_1^*(\tilde{S}/\Delta) \cong D_{4k}$ のときは $\text{Cent } \pi_1^*(\tilde{S}/\Delta) = \mathbb{Z}_2$ であるよとみると, 両方表わされる. 他の場合も少しまいぬにみていけばよいのである.

所で逆に $P_m(S)$ を与えるとき $\pi_1(S)$ はどのようなものか. 或は, S の構造がどのようなものか, ということもよい. イタリヤの代数曲面論は, P_m の special value によって特異な曲面の特徴づけという成果をもたらした. $k = -\infty, 0$ なる完全に分かるし, 実質上直線である (non alg. なる無論小平). $k=2$ なるやはり小平の公式から P_m を与えることは C^2, C_2 を与えることと同値になる. それ故残ったのは $k=1$ の場合である. 2) とき

$$P_m(S) = m(2\pi - 2 + 1 - g + p_g) + \sum [m(1 - 1/n_j)] + 1 - \pi,$$

* Cent は群の中心を表す.

であるが、また、canonical degree:

$$\lambda(S) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(S)/m = 2\pi - 2 + 1 - g + p_g + \sum_{j=1}^s (1 - 1/m_j)$$

から、 $P_1 = p_g$,

$$1 - \pi = \lim (P_m(S) - \lambda m).$$

として p_g , π から、 g (として) $g = \pi$ or $\pi + 1$ はやはり
与えられているとしてよいだろう。すると、

$$f(m) = \sum_j [m(1 - \frac{1}{m_j})],$$

から $m_1, \dots, m_s$ が定まりました。ということになる。これは容易にわかる:

$f(2) = s$ として数かきます。 $s_2 = \#\{i; m_i = 2\}$,
 $s'_1 = \#\{j; m_j \geq 3\}$ とおくと $f(3) = s_1 + 2s'_1$, $s_1 + s'_1 = s$
により s_1 が定まりました。同様にして $m_1, m_2, \dots, m_s$ の決定が
可能である。

かくして、 P_m は $\{m_1, \dots, m_s\}$, π , によって $\pi_1(S)$ の構造
と結びつくのである。 P_m は双有理不変量としてまず導入さ
れたから全く代数的幾何的、複素解析的性質にある。これは、こ
のように $\pi_1(S)$ と密接に $\{P_m(S)\}_{m=1,2,\dots} \equiv \pi_1(S)$ と
いう形で結びついているのは思いもかけぬ連関であり驚異的
である。これは Euler の公式 $e^{\pi i} = -1$, $e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta$
の如き超越論的性質にはあてはまらない。そして更に P_m は追
求すべきである。目的は遠くかすかにある。これは高次元
複素多様体の完全なる分類理論である。

文 献 表

- [1] F. Enriques, Superficie Algebriche, Bologna, (1948).
- [2] A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique,
Publ. Math. de I. H. E. S. NO. 4, 8, 11, 17, 20, 28,
28, 32,
- [3] ———, "Technique de construction en géométrie
analytique," Séminaire H. Cartan, 13^e année: 1960/61.
- [4] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic
variety of characteristic zero, I, II, Ann. Math.
79 (1964), 109 - 326.
- [5] ———, "Review of S. Kawai's paper," Math. Review,
466, vol. 32, No. 11 (1966), 87 - 88.
- [6] S. Iitaka, "Deformations of compact complex surfaces I,
II and III," in Global Analysis: papers in honor of K.
Kodaira, (1969) 267 - 272, J. Math. Soc. Japan, 22
(1970), 247 - 261 and ibid. (forthcoming).
- [7] ———, "On D-dimensions of algebraic varieties,"
Proc. Japan Acad., 46 (1970) and to appear in J. Math.
Soc. Japan.
- [8] S. Kawai, "On compact complex analytic surfaces II," J. Math.
Soc. 21, (1969), 604 - 626.
- [9] K. Kodaira, "On compact complex analytic surfaces I, II
and III," Ann. of Math. 71, (1960), 111 - 152, ibid.
77, (1963) 563 - 626, ibid. 78, (1963) 1 - 40.
- [10] ———, "On the structure of compact complex analytic
surfaces I, II, III and IV." Amer. J. Math., 86, (1964) 751
- 798, ibid. 88, (1966) 682 - 721, ibid. 90, (1968) 55 - 83

ibid. 90, (1968) 1048 - 1066.

- [11] K. Kodaira, "Pluri-canonical systems of algebraic surfaces of general type," J. Math. Soc. Japan, 20 (1968) 170 - 192.
- [12] O. Zariski, Algebraic Surfaces, Ergebnisse der Mathematik, vol. 5. Springer 1935.
- [13] ———, "The theorem of Riemann Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface," Ann. Math. 76, (1962) 560 - 615.