

楕円保型形式に対する反円分岩澤主予想 (Anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms)

By

小林 真一 (Shinichi KOBAYASHI)*, 太田 和惟 (Kazuto OTA)**

Abstract

This is a report on our work on the anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms. In this paper, we explain the main result on a half part of the conjecture.

§ 1. 反円分岩澤主予想

本稿では、楕円保型形式の反円分岩澤主予想を考察した [14] の成果を報告する。円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大の場合には一般のモチーフに対して円分岩澤主予想が定式化されているが、一般の $\mathbb{Z}_p$ -拡大の場合、未だに精密な p -進 L -関数を用いた定式化は完全にはなされていない。最近 Castella [4, 5] が、 p を good ordinary prime にもつような楕円曲線・楕円保型形式に対して反円分岩澤主予想を定式化し、その一部を証明した。円分岩澤主予想の場合、考える保型形式が p で ordinary かどうかで状況が大きく異なるが、反円分岩澤理論では、保型形式が p で non-ordinary であっても適当な反円分 Hecke 指標でひねることにより、付随するガロワ表現が Panchishkin 条件を満たし、ordinary の場合と同様に通常の形での岩澤主予想の定式化が期待される (cf. [8]). 実際、ordinary の場合に主予想の定式化に用いられた p -進 L -関数 (構成は [1, 2] による) は、non-ordinary の場合にも岩澤代数の元となり、[4] と同じ形で主予想を定式化するのは妥当に思われる。[14] では、その一部を証明することでこの定式化の正しさの根拠を与えている。以下では、まず予想の主張を述べ、次節で主結果 (定理 2.1) を述べる。最後に、証明で重要な役割を果たす、今回新たに考案し

Received April 2, 2018. Revised December 10, 2018.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 11R23, 11G40, 11F11.

This research was supported in part by JSPS KAKENHI (16K13742, 17H02836, 17K14173).

*Faculty of Mathematics, Kyushu University, 744, Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan.
e-mail: kobayashi@math.kyushu-u.ac.jp

**Department of Mathematics, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa, 223-8522, Japan.

e-mail: kazutoota@math.keio.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

た integral な Perrin-Riou twist を解説する. なお, 反円分岩澤理論をめぐる歴史や背景等については [13] を参照されたい.

f を重さ $2r \geq 2$ の $\Gamma_0(N)$ の normalized eigen newform とし, その q -展開を $\sum_{n \geq 1} a_n q^n$ と書く. K を虚二次体とし, その判別式 $-D_K$ が, (i) D_K は 3 より大きい奇数, または (ii) $8 \mid D_K$ を満たすと仮定する. K で完全分解する素数 $p \nmid 2N$ をとり, 体の埋め込み $\iota_\infty: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \iota_p: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する. $\mathfrak{p}$ を ι_p から誘導される p の上の K の素点とする. K_∞/K を反円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大とし, $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$ とする. $\mathcal{O}_f$ を $\mathbb{Q}_p$ と f のフーリエ係数 a_n たちを全て含む最小の体の整数環とし, $V_f \cong \mathcal{O}_f[1/p]^{\oplus 2}$ を Shimura と Deligne によって構成された f に付随するガロワ表現とし, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -作用で安定な V_f の $\mathcal{O}_f$ -格子 T_f を一つ固定する. $V = V_f(r), T = T_f(r)$ と書く (ここで, (r) は r 回の Tate ひねりを表し, V と $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p(1))$ はガロワ表現として同型になる). 次の Heegner 条件を仮定する:

(1.1) N を割る素数は全て K で完全分解する.

K の反円分 Hecke 指標¹ $\chi: \mathbb{A}_K^\times/K^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ で, その p -進 avatar² $\hat{\chi}$ が Γ を経由する χ 全体の集合を Σ と書く. この Σ を考える理由は, L -関数の特殊値にある: $\chi \in \Sigma$ に対し, $L(f, \chi^{-1}, s)$ は s と $2r - s$ を結びつける関数等式を満たし, $L(f, \chi^{-1}, r)$ が Deligne の意味で critical となる.³ $\Sigma^\pm \subseteq \Sigma$ を次で定義する:

$$\Sigma^+ = \{\text{infinity type が } (j, -j) \text{ の } \chi \in \Sigma \mid j \geq r\},$$

$$\Sigma^- = \{\text{infinity type が } (j, -j) \text{ の } \chi \in \Sigma \mid |j| < r\}.$$

仮定 (1.1) のもとで, 上の符号 $\pm$ は関数等式 ($s \leftrightarrow 2r - s$) の符号に対応する.

本稿で考える p -進 L -関数は, $\psi \in \Sigma^+$ に対し, Bertolini-Darmon-Prasanna [1] と Brakočević [2] によって独立に構成された p -進 L -関数 $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}, \psi}^{\text{BDP-B}}(f) \in \mathcal{O}_f^{\text{ur}}[[\Gamma]]$ である (ここで, $\mathcal{O}_f^{\text{ur}}$ は $\mathcal{O}_f[1/p]$ の最大不分岐拡大の整数環の p -進完備化を表す). 補間性質を述べると, $\chi\psi \in \Sigma^+$ となるような任意の $\chi \in \Sigma$ に対し, $\chi(\mathcal{L}_{\mathfrak{p}, \psi}^{\text{BDP-B}}(f))$ の平方が明示的な因子を除いて, $L(f, \chi^{-1}\psi^{-1}, r)$ の代数部分に一致する (cf. [1, 2, 6]). また, 適当な仮定のもとで $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}, \psi}^{\text{BDP-B}}(f)$ がゼロ元でないことが Hsieh [10] によって示されている.

予想 1.1 (反円分岩澤主予想). $\psi \in \Sigma^+$ とする. このとき, 次の二つが成り立つ.

(1) $\text{Sel}(K_\infty, V/T(\psi^{-1}))^\vee$ は $\mathcal{O}_f[[\Gamma]]$ -torsion. ここで, $\vee$ は Pontryagin 双対を表し, (ψ^{-1}) は $\hat{\psi}^{-1}$ によるひねりを表す.

(2) $\mathcal{O}_f^{\text{ur}}[[\Gamma]]$ の単項イデアルの等式

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{p}, \psi}^{\text{BDP-B}}(f)^2 \mathcal{O}_f^{\text{ur}}[[\Gamma]] = \text{char}_{\mathcal{O}_f[[\Gamma]]}(\text{Sel}(K_\infty, V/T(\psi^{-1}))^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_f[[\Gamma]]} \mathcal{O}_f^{\text{ur}}[[\Gamma]]$$

が成り立つ. ここで, $\text{char}_{\mathcal{O}_f[[\Gamma]]}$ は特性イデアルを表す.

¹ $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ への制限が自明になる Hecke 指標を反円分 Hecke 指標とよぶ.

² χ に付随する, $\mathbb{C}_p^\times$ に値をもつ $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ の連続指標のこと.

³ このことから, $L(f, \chi^{-1}, r)$ を適当な周期 (CM 周期, 円周率) のべきで割ると, 代数的数になる.

注意 1.2.

1. すでに述べたようにこの予想ははじめ, f が p で ordinary (つまり, $a_p \in \mathcal{O}_f^\times$) である場合に [4, 5] において定式化され, その一部が証明された. 円分岩澤理論では, f が non-ordinary のとき p -進 L -関数は岩澤代数の元にならず (係数に有界でない分母が必要), p -進 L -関数を用いた主予想の定式化が ordinary の場合と全く同じではなかった. しかし, 任意の $\psi \in \Sigma^+$ に対してガロワ表現 $V(\psi^{-1})$ は, f が ordinary でなくとも Panchishkin 条件を満たす ($V(\psi^{-1})|_{G_{K_p}}$ の Hodge-Tate 重さは全て負になり, $V(\psi^{-1})|_{G_{K_{\bar{p}}}}$ の Hodge-Tate 重さは全て 0 以上になることがチェックできる. ただし, $\mathbb{Q}_p(1)$ の Hodge-Tate 重さを -1 とみなしている). これに対応するように, たとえ f が non-ordinary であっても p -進 L -関数 $\mathcal{L}_{p,\psi}^{\text{BDP-B}}(f)$ は岩澤代数の元である. そのため, ordinary かどうかに関わらず主予想を上形で定式化するのは妥当に思われる. 下に述べる定理 2.1 は, この考察が正しいという根拠を与える.
2. 正確には p -進 L -関数 $\mathcal{L}_{p,\psi}^{\text{BDP-B}}(f)$ は, ここでは詳しく述べていない choice に依存する. しかし, 平方 $\mathcal{L}_{p,\psi}^{\text{BDP-B}}(f)^2$ はその choice に依存せず, すでに述べたように L -関数の特殊値を補間する. また, 予想 1.1 (2) の両辺が共に格子 T の choice に依存しないこともチェックできる.

§ 2. 主結果

定理 2.1 (主結果). 記号は予想 1.1 と同じものとし, 次の二つの条件を仮定する.

- (a) $p \nmid 6h_K$. ここで, h_K は K の類数を表す.
- (b) $\{g \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det(g) \in (\mathbb{Z}_p^\times)^{2r-1}\} \subseteq \text{Im}(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(T_f) \cong \text{GL}_2(\mathcal{O}_f))$.

このとき, 予想 1.1 (1) は正しく, さらに次が成り立つ.

$$(2.1) \quad \mathcal{L}_{p,\psi}^{\text{BDP-B}}(f)^2 \in \text{char}_{\mathcal{O}_f[[\Gamma]]}(\text{Sel}(K_\infty, V/T(\psi^{-1}))^\vee) \otimes \mathcal{O}_f^{\text{ur}}[[\Gamma]] \otimes \mathbb{Q}_p.$$

注意 2.2.

1. f が CM を持たないとき, 有限個の素数 p を除き, (b) を満たす T_f をとれる (cf. [19]).
2. この定理以前に, 予想 1.1 を支持する結果として, 「 $L(f, \psi^{-1}, r) \neq 0$ ならばセルマー群 $\text{Sel}(K, V/T(\psi^{-1}))$ は自明」という Coates-Wiles 型の定理が, Castella-Hsieh [6] (ordinary) と Kobayashi [12] (non-ordinary) により証明されている.
3. f が楕円曲線に対応する場合には, Castella [5] (ordinary), Castella-Wan [7] ($a_p = 0$) によって, 定理 2.1 と同じ方向の包含関係が示されている. また, この場合には適当な条件のもとで逆の包含関係も示されている (cf. [3, 5, 7]).

本稿では, p -進 L -関数とセルマー群とを比較する形の岩澤主予想を扱っているが, [5] より以前の 1987 年に, Perrin-Riou [17] によって既に, p -進 L -関数の代わりに Heegner 点の norm compatible system を用いた岩澤主予想 (Perrin-Riou 予想とよぶことにする) が, p で good ordinary reduction をもつ楕円曲線の場合に定式化されていた (cf. [13, §3]). Perrin-Riou 予想の利点は, オイラー系を直接用いていることから, コリヴァギン系⁴の理論を応用できることである. 実際に, Howard [9] は Heegner 点から構成されるコリヴァギン系を用いることで, Perrin-Riou 予想の “半分の包含関係” を証明した (ordinary な保型形式の場合の定式化・証明は [16] による).

[5] では, Perrin-Riou 予想と予想 1.1 の同値性を示すことで, [9] の結果から, 定理 2.1 と同じ方向の包含関係を示しているが, 同じ手法を non-ordinary な保型形式に対しては適用することはできない. というのは, non-ordinary の場合には Heegner 点・サイクルを norm compatible system に変形できず, そもそも Perrin-Riou 予想の定式化すら同じようにできないからである. [7] では, supersingular reduction をもつ楕円曲線を扱ってはいるが, [11] の $\pm$ -理論の反円分版という $a_p = 0$ となる場合特有の理論を使うことで, norm compatible system を構成し Perrin-Riou 予想の類似に帰着している. [14] においても, Perrin-Riou 予想の類似は定式化できないが, コリヴァギン系を応用する. 次節で述べるように, non-ordinary の場合には norm compatible system がないことがコリヴァギン系を構成することすら難しくする. そこで重要なのが, integral な Perrin-Riou twist である.

§ 3. Integral な Perrin-Riou twist

コリヴァギン系を岩澤主予想に応用するためには, 代数的とは限らない一般の各連続指標 $\chi: \Gamma \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ に対して, ひねられた表現 $T(\chi)$ 上のコリヴァギン系で, p -進 L -関数との関係が深いものを構成する必要がある. まず, ordinary の場合の構成を簡単に復習する.

- (i) $\phi \in \Sigma^-$ に対し, [1] で構成された一般 Heegner サイクル (GHC) からなるオイラー系 $\{z_c^\phi\}_c \in \prod_{(c,N)=1} H^1(K[c], T(\phi))$ が存在し ($K[c]$ は導手 c の ring class field を表す), $\{z_{p^n}^\phi\}_n$ と $\mathcal{L}_{p,\psi}^{\text{BDP-B}}(f)$ とを明示的に結びつける明示的相互法則が [6] によって示されている. ϕ が自明のとき, $z_c = z_c^\phi$ と書く. (これは, 本質的に Heegner サイクル).
- (ii) $(c, pN) = 1$ となる $c \geq 1$ に対し, $\{z_{cp^{n+1}}\}_n$ を少し修正することで, norm compatible system $\mathbf{z}_c \in \varprojlim_n H^1(K[cp^{n+1}], T)$ を構成する. 任意の連続指標 $\chi: \Gamma \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ に対し,

$$\varprojlim H^1(K[cp^{n+1}], T) \cong H^1(K[cp], T \otimes \mathcal{O}_f[[\Gamma]]) \rightarrow H^1(K[cp], T(\chi))$$

における $\mathbf{z}_c$ の像を z_{cp}^χ と書く. ここで, 最初の同型は $\Gamma = \text{Gal}(\cup_n K[cp^{n+1}]/K[cp])$ と Shapiro の補題から誘導され, 二つ目は χ での特殊化から誘導される写像である.

- (iii) $\{z_{cp}^\chi\}_c$ の corestriction map $H^1(K[cp], T(\chi)) \rightarrow H^1(K[c], T(\chi))$ における像にコリヴァギン微分を施すことで, $T(\chi)$ 上にコリヴァギン系を構成する.

⁴コリヴァギン系とは, オイラー系にコリヴァギン微分作用素を施し少し修正することでできる系 (の公理化) で, セルマー群の構造を精密に記述することができる.

(i) の明示的相互法則は [12] によって non-ordinary でも示された. 問題となるのは, non-ordinary の場合には (ii) のように GHC を norm compatible system に変形できないということである. Perrin-Riou [18] は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の絶対ガロワ群の p -進表現に対して, 完全な norm compatible でないがそれに近い性質を持つ system (cf. 定理 3.1 (a) (b)) にも適用できる twist の理論を確立した. 問題は, 局所体しか扱っていないということと, 分母の評価が難しいということである. [12] では, χ が代数的な指標である場合に, 代数体・局所体に限らずより一般の p -進ガロワ表現に対して, 分母が出ない (integral な) twist を発見した. しかし, 上述のように岩澤主予想への応用のためには, 代数的とは限らない一般の連続指標 χ での integral な (分母がコントロールできる) twist を考える必要がある. それを可能にするのが下に述べる定理である.

定理 3.1. p を素数, L_∞/L を代数体, あるいは l -進体 ($l = p$ でもよい) の $\mathbb{Z}_p$ -拡大とし, L_n を n -th layer, $\Gamma := \text{Gal}(L_\infty/L)$ とする. $h \geq 1$ とし, $|p^h/\alpha|_p < 1$ となる $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ をとる. V を $\text{Gal}(\overline{L}/L)$ が連続に作用する有限次元 $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ -ベクトル空間とし, $\text{Gal}(\overline{L}/L)$ の作用で安定な格子 T を一つ固定する. また, $H^0(L_\infty, V) = \{0\}$ を仮定する. $\rho: \Gamma \cong 1 + 2p\mathbb{Z}_p$ を固定し, 各 $0 \leq j \leq h-1$ に対し $\{c_n^{(j)}\}_n \in \prod_{n \geq 0} H^1(L_n, T(\rho^j))$ が与えられ, 次の二つの条件を満たすとする.

- (a) 任意の $n \geq 0$ に対し $\text{cor}_{n+1/n}(c_{n+1}^{(j)}) = \alpha c_n^{(j)}$ ($\text{cor}_{n+1/n}$ は corestriction map を表す).
- (b) 任意の $0 \leq i \leq h-1$ と $n \geq 1$ に対し,

$$\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \text{res}_\infty^{(j)}(c_n^{(j)}) \equiv 0 \pmod{p^{in} H^1(L_\infty, T)}.$$

ただし, $\text{res}_\infty^{(j)}: H^1(L_n, T(\rho^j)) \rightarrow H^1(L_\infty, T)$ は restriction map から誘導される写像を表す. ここで, ρ が $\text{Gal}(\overline{L}/L_\infty)$ 上自明であることにより $H^1(L_\infty, T(\rho^j))$ と $H^1(L_\infty, T)$ を同一視していることに注意する.

このとき, 任意の連続指標 $\chi: \Gamma \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ に対し, e_χ を $\mathbb{Z}_p(\chi)$ の基底, $\ell(\chi) = \frac{\log(\chi(\gamma))}{\log(\rho(\gamma))}$,

$$d_m^\chi = \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \text{res}_\infty^{(j)}(c_m^{(j)}) \otimes \binom{\ell(\chi)}{i} e_\chi \in H^1(L_\infty, V(\chi))$$

とおくと, 各 $n \geq 0$ に対し $\{\alpha^{-m} N_{n+m/n} d_{n+m}^\chi\}_{m \geq 0} \subseteq H^1(L_\infty, V(\chi))$ は収束する. ここで, γ は Γ の位相的生成元で, $N_{n+m/n} := \sum_{k=0}^{p^m-1} \gamma^{kp^n} \in \mathbb{Z}[\Gamma]$. さらに, この極限を $c_n^\chi \in H^1(L_\infty, V(\chi))$ と書くと, 次が成り立つ.

- (1) $c_n^\chi \in H^0(\Gamma^{p^n}, H^1(L_\infty, V(\chi))) = H^1(L_n, V(\chi))$,
- (2) $\text{cor}_{n+1/n}(c_{n+1}^\chi) = \alpha c_n^\chi$,
- (3) $\alpha, h, \chi(\gamma) \bmod 1 + 2p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ のみに依存する $A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し, 任意の $n \geq 0$ に対し, $p^A c_n^\chi \in \text{Im}(H^1(L_n, T(\chi)) \rightarrow H^1(L_n, V(\chi)))$. 特に, $\{c_n^\chi\}_n$ の分母は有界である.

注意 3.2.

1. この定理を GHC にどのように適用するかを説明する. p を割る K の有限素点 v に対し, $\psi_v : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K[1]) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ を整数環 $\mathcal{O}_K$ で CM をもつ (ヒルベルト類体 $K[1]$ 上の) 楕円曲線の v -進 Tate 加群に付随する指標とすると, $\psi_p \psi_{\bar{p}}^{-1}$ は infinity type が $(-1, 1)$ となる $\rho \in \Sigma^-$ を誘導する. $(c, pN) = 1$ となる $c \geq 1$ をとる. $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ を $X^2 - a_p X + p^{2r-1}$ の根で $|p^{2r-1}/\alpha|_p < 1$ となるものとする. $0 \leq j \leq 2r-2$ に対し,

$$c_n^{(j)} = \alpha z_{cp^{n+1}}^{\rho^{1-r+j}} - p^{2r-2} \text{res}_{n+1,n}(z_{cp^n}^{\rho^{1-r+j}}) \in H^1(K[cp^{n+1}], T(\rho^{1-r})(\rho^j)) \otimes_{\mathcal{O}_f} \mathcal{O}_f[\alpha]$$

とおく ($\rho^{1-r+j} \in \Sigma^-$ に注意する). ここで, $\text{res}_{n+1,n}$ は restriction map を表す. このとき, GHC のノルム関係式から, $\{c_n^{(j)}\}$ が定理 3.1 の条件 (a) を満たすことがわかり, さらに, [12] によって条件 (b) も成り立つ. この $\{c_n^{(j)}\}_n$ に定理 3.1 を,

$$h = 2r - 1, \quad L = K[cp], \quad L_\infty = \cup_n K[cp^{n+1}]$$

として適用することで, 任意の χ に対し $z_{cp^n}^\chi := c_n^{\rho^{r-1}\chi} \in H^1(K[cp^n], V(\chi)) \otimes_{\mathcal{O}_f} \mathcal{O}_f[\alpha]$ を得る.

2. Loeffler-Zerbes [15] も同様に一般の指標での twist を構成し, 分母の有界性も証明しているが, 定理 3.1 のように twist を明示的な元の極限として構成してはいない. このような表示は, $\{z_c^\chi\}$ の $l \neq p$ での局所化写像における像を調べる際に重要となる. というのも, $H^1(K[c] \otimes \mathbb{Q}_l, T(\chi))$ のようなコホモロジー群は一般には torsion をもつため, (コリヴァギン系の構成に必要な) このようなコホモロジー内の等式を示す際には, 分母の出方に細心の注意を払う必要があり, そこで定理 3.1 のような明示的な表示が重要となる (詳しくは [14] を参照されたい).

謝辞

本稿は, 著者の一人 (太田) が研究集会「代数的整数論とその周辺 2017」で行った講演が元になっています. 講演の機会と本稿を執筆する機会をくださった, 角皆宏氏, 山崎隆雄氏, 水澤靖氏に感謝いたします. また, 有益なコメントをくださった査読者に感謝いたします.

参考文献

- [1] Bertolini, M., Darmon, H. and Prasanna, K., Generalized Heegner cycles and p -adic Rankin L -series, With an appendix by Brian Conrad, *Duke Math. J.* **162** (2013), no. 6, 1033–1148.
- [2] Brakočević, M., Anticyclotomic p -adic L -function of central critical Rankin-Selberg L -value, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2011), no. 21, 4967–5018.
- [3] Burungale, A., Castella, F. and Kim, C.-H., A proof of Perrin-Riou’s Heegner point main conjecture, preprint.

- [4] Castella, F., On the p -adic variation of Heegner points, Thesis (Ph.D.)–McGill University, 2013.
- [5] Castella, F., p -adic heights of Heegner points and Beilinson-Flach classes, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **96** (2017), no. 1, 156–180.
- [6] Castella, F. and Hsieh, M.-L., Heegner cycles and p -adic L -functions, *Math. Ann.* **370** (2018), no. 1-2, 567–628.
- [7] Castella, F. and Wan, X., Perrin-Riou’s main conjecture for elliptic curves at supersingular primes, preprint.
- [8] Greenberg, R., Iwasawa theory and p -adic deformations of motives, *Motives (Seattle, WA, 1991)*, 193–223, Proc. Sympos. Pure Math., **55**, part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [9] Howard, B., The Heegner point Kolyvagin system, *Compos. Math.* **140** (2004), no. 6, 1439–1472.
- [10] Hsieh, M.-L., Special values of anticyclotomic Rankin-Selberg L -functions, *Doc. Math.* **19** (2014), 709–767.
- [11] Kobayashi, S., Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes, *Invent. Math.* **152** (2003), no. 1, 1–36.
- [12] Kobayashi, S., A p -adic interpolation of generalized Heegner cycles and Perrin-Riou twist, preprint.
- [13] 小林真一, 反円分拡大の岩澤理論と一般 Heegner サイクル, *Algebraic number theory and related topics 2016*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B77 (2020), 55–74.
- [14] Kobayashi, S. and Ota, K., Anticyclotomic main conjecture for modular forms and integral Perrin-Riou twists, *Development of Iwasawa Theory — the Centennial of K. Iwasawa’s Birth*, Adv. Stud. Pure Math. **86**, to appear.
- [15] Loeffler, D. and Zerbes, S. L., Rankin-Eisenstein classes in Coleman families, *Res. Math. Sci.* **3** (2016), Paper No. 29, 53.
- [16] Longo, M. and Vigni, S., Kolyvagin systems and Iwasawa theory of Heegner cycles, *Kyoto J. Math.* **59** (2019), no. 3, 717–746.
- [17] Perrin-Riou, B., Fonctions L p -adiques, théorie d’Iwasawa et points de Heegner, *Bull. Soc. Math. France* **115** (1987), no. 4, 399–456.
- [18] Perrin-Riou, B., Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local, With an appendix by Jean-Marc Fontaine, *Invent. Math.* **115** (1994), no. 1, 81–161.
- [19] Ribet, K. A., On l -adic representations attached to modular forms. II, *Glasgow Math. J.* **27** (1985), 185–194.