

One-sided sofic system の同型問題について.

九大理 藤原 雅子

(Masako Fujiwara)

Sofic system は labeled graph から定まる。
 この時, その labeled graph を sofic system の cover と
 呼ぶ。 W. Krieger は与えられた sofic system に対し, その
 canonical な cover を構成した。 この cover は Krieger の
 cover を intrinsic に定義し, 2 つの one-sided sofic
 system が topologically conjugate となるための必要十分の
 条件を与える。

§ 1. One-sided sofic system と labeled graphs.

S を有限集合とする。 S の片側無限直積集合 $S^{\mathbb{N}} = \prod_{i=1}^{\infty} S$
 の元 $x = (x_1, x_2, \dots)$ を path と呼ぶ。 $S^{\mathbb{N}}$ には S 上の
 離散位相の無限直積位相を与える。 shift transformation
 $\sigma: S^{\mathbb{N}} \rightarrow S^{\mathbb{N}}, \quad \sigma(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ を考える。
 $S^{\mathbb{N}}$ の closed な shift invariant ($\sigma\Omega = \Omega$) な部分

集合 Ω を one-sided subshift とする。この時 $S \in \Omega$ の state space と呼ぶ。

2つの one-sided subshift Ω と Ω' の間に各々の shift と可換な homeomorphism が存在する時、この2つは topologically conjugate であると言い、 $\Omega \cong \Omega'$ と書く。

(one-sided sofic system)

S の有限列を word と呼び、 Ω の各 path の中に現れる word の全体を $L(\Omega)$ で表す。今 one-sided subshift Ω と Ω の元 $x = (x_1, x_2, \dots)$ に対して、

$$L(\Omega)x = \{ \alpha \in L(\Omega) ; \alpha x \in \Omega \}$$

と置く。ここに αx とは、 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ のとき $\alpha x = (a_1, a_2, \dots, a_k, x_1, x_2, \dots)$ を表す。更に $x, x' \in \Omega$ について、 $L(\Omega)x = L(\Omega)x'$ のとき $x \sim x'$ と書く。" $\sim$ " は同値関係である。 x を含むこの同値類を $[x]$ と書く。商空間 $\Omega/\sim = \{ [x] ; x \in \Omega \}$ が有限である時、 Ω を one-sided sofic system とする。(B. Weiss [5])

(labeled graph)

W, V, S を有限集合、 $i: W \rightarrow V$, $t: W \rightarrow V$, $\lambda: W \rightarrow S$ を各々 onto map とする。この時、 $G = (W, V, i, t, S, \lambda)$ を labeled graph とする。 W, V, S を各々 arc-set, vertex-set, label-set と呼ぶ。又 arc $w \in W$ に

対し. $i(w)$ は arc w 始点, $t(w)$ は終点. $\lambda(w)$ は arc w に付けられた label を表わしている.

labeled graph $G = (W, V, i, t, S, \lambda)$ に対して,

$$\Omega(G) = \{ (\lambda(w_i))_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}} ; w_i \in W, t(w_i) = i(w_{i+1}) \forall i \in \mathbb{N} \}$$

とすると, $\Omega(G)$ は $S^{\mathbb{N}}$ の closed かつ σ -invariant な部分集合である. 更に, $\Omega(G)$ は sofic system であることも容易に解る. なる $\Omega(G)$ を labeled graph G によって定まる one-sided sofic system と呼ぶ.

各 vertex $v \in V$ に対して,

$$L_v(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ (\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_k)) \in S^k ; w_i \in W, t(w_i) = i(w_{i+1}), 1 \leq i \leq k-1, t(w_k) = v \}$$

と置く.

Definition 1-1 (left Krieger graph)

labeled graph $G = (W, V, i, t, S, \lambda)$ が次の条件

i) ~ iii) を満たす時, left Krieger graph と呼ぶ.

i) (left-resolving) $w, w' \in W$ に対し, $t(w) = t(w')$

かつ, $\lambda(w) = \lambda(w')$ ならば $w = w'$.

ii) (left-reduced) $v, v' \in V$ に対し, $v \neq v'$

ならば $L_v(G) \neq L_{v'}(G)$.

- iii) (left-sufficient) 各 path $\lambda \in \Omega(G)$ に対し,
 $L(\Omega(G))\lambda = L_v(G)$ なる vertex v が存在し, 逆に
 各 $v \in V$ に対し, $L_v(G) = L(\Omega(G))\lambda$ なる $\lambda \in \Omega(G)$
 が存在する.

W. Krieger [3] は 与えられた sofic system に対し,

ある canonical な graph を構成した. M. Nasu [4] は この
 Krieger の graph を finite automaton の言葉で特徴付けた.
 ここでは, Krieger の 作った graph から意味のある Krieger
 graph があること, 更にその一意性をこの定義を用いて証明
 する.

Theorem 1-2. 任意の one-sided sofic system Ω に対し
 $\Omega(G) = \Omega$ なる left Krieger graph が一意的に存在する.

one-sided sofic system Ω に対し, $\Omega(G) = \Omega$
 なる left Krieger graph G は Ω の Krieger cover と呼ぶ.

§2. Structure matrix system と main theorem.

φ は有限集合 S から有限集合 S' への onto map.
 とする. one-sided subshift $\Omega \subset S^{\mathbb{N}}$ に対し,

$$\Omega^{\varphi} = \{ (\alpha_i, \varphi(\alpha_{i+1}))_{i \in \mathbb{N}} \in (S \times S')^{\mathbb{N}} ; (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega \}$$

と置く。この Ω^{φ} も α subshift となる。 α one-sided subshift

Ω と Ω' に対して、写像 φ が存在して $\Omega' = \Omega^{\varphi}$ となる時

$\Omega \uparrow \Omega'$ と書く。この時明らかに $\Phi(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} = (\alpha_i, \varphi(\alpha_{i+1}))_{i \in \mathbb{N}}$

により Ω と Ω' は topologically conjugate である。

$G = (W, V, i, t, S, \lambda)$ は labeled graph, $\varphi: S \rightarrow$

S' は onto map とする。 $w_1, w_2 \in W$ に対して、 $i(w_1) = i(w_2)$

かつ $\varphi(\lambda(w_1)) = \varphi(\lambda(w_2))$ の時、 $w_1 \sim w_2$ と書く。

" $\sim$ " は equivalence relation となる。 w を含む equivalence

class を $[w]$ で表す。この時、labeled graph $G^{\varphi} =$

$(W^{\varphi}, V^{\varphi}, i^{\varphi}, t^{\varphi}, S^{\varphi}, \lambda^{\varphi})$ は次のように構成される。

$$W^{\varphi} = \{ (w_1, [w_2]) ; w_1, w_2 \in W, t(w_1) = i(w_2) \},$$

$$V^{\varphi} = \{ [w] ; w \in W \},$$

$$i^{\varphi}(w_1, [w_2]) = [w_1],$$

$$t^{\varphi}(w_1, [w_2]) = [w_2],$$

$$\lambda^{\varphi}(w_1, [w_2]) = (\lambda(w_1), \varphi(\lambda(w_2)))$$

$$\text{for } (w_1, [w_2]) \in W^{\varphi},$$

$$S^{\varphi} = \lambda^{\varphi}(W^{\varphi}) \subset S \times S'.$$

labeled graph G と G' に対して、 $G' = G^{\varphi}$ となる map

φ が存在するとき、 $G \uparrow G'$ と書く。

Lemma 2-1 (M. Nasu [4])

$G = (W, V, i, t, S, \lambda)$ is labeled graph,
 $\varphi: S \rightarrow S'$ is onto map とある。 G が left Krieger
 graph であるならば, G^φ も left Krieger graph である。

Corollary 2-2

Ω と Ω' は sofic system, $G_\Omega, G_{\Omega'}$ は left
 Krieger graph とある。 この時, $\Omega \uparrow \Omega'$ ならば, $G_\Omega \uparrow$
 $G_{\Omega'}$ が成り立つ。

(structure matrix system)

S は有限集合 とある。 $n \times m$ 0-1 行列から成る
 有限集合 M 上 $\wedge S$ の onto map が存在するとする。 M は
structure matrix system と呼ぶ。 このとき, $M =$
 $(M(a); a \in S)$ と書く。 $M = (M(a); a \in S)$, $M' =$
 $(M'(a'); a' \in S')$ は $n \times m$, $m \times l$ matrix
 system とある。 各 $a \in S$, $a' \in S'$ に対し,

$$MM'(a, a')(i, j) = \begin{cases} 1 & M(a)M'(a')(i, j) > 0 \\ & a \in S, \\ 0 & M(a)M'(a')(i, j) = 0 \\ & a \in S, \end{cases}$$

とし,

$MM' = (MM'(a, a'); a \in S, a' \in S', MM'(a, a') \neq 0$
と置くと, MM' は $n \times l$ matrix system となる.

$G = (W, V, i, t, S, \lambda)$ は labeled graph と
ある. label $a \in S$ に対し, $|V| \times |V|$ 0-1 matrix
 $M_G(a)$ を次で定義する.

$$M_G(a)(v, v') = \begin{cases} 1 & i(w) = v, t(w) = v', \lambda(w) = a \text{ なる } w \in W \text{ が存在すると,} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とすると, $|V| \times |V|$ matrix system $M_G = (M_G(a); a \in S)$
は G の structure matrix system と呼ぶ.

逆に任意の正方 matrix system $M = (M(a); a \in S)$
に対し, これは structure matrix system とある
labeled graph が一つ定まる. これを G_M と書く.

2. $n \times n$ matrix system $M = (M(a); a \in S)$
と $M' = (M'(a'); a' \in S')$ に対し, bijection $\varphi: S \rightarrow S'$
と $n \times n$ permutation matrix P が存在して,
 $M'(\varphi(a)) = {}^t P M(a) P \quad (\forall a \in S)$ が成り立つと,
 $M \sim M'$ と書く.

明らかに labeled graph G, G' が labelling の差を
除いて一致するとは, $M_G \sim M_{G'}$ であるとは同等である.

left Krieger graph a structure matrix system
 is Krieger matrix system と呼ぶ。

G is labeled graph, $M_G = (M_G(a); a \in S)$ is
 a structure matrix system とあると。

$$\Omega(G) = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}}; M_G(a_1) \cdot M_G(a_2) \cdot \dots \cdot M_G(a_n) \neq 0 \\ \forall n \geq 1 \}$$

を得る。

各列に唯一 1 を持つ。 trivial 行を持つとは、
 $0-1$ 行列は amalgamation matrix と呼ぶ。

Definition 2-3 (amalgamation)

matrix system M と M' に対し、次 i) ~ iii) を
 満たす matrix system $N = (N(n); n \in S)$ と $A =$
 $(A(a); a \in S')$ が存在すると、 M と M' は amalgamation
と 呼ぶ。

i) $\sum_{a \in S'} A(a)$: amalgamation matrix,

ii) 各 $n \in S$ に対し、 $A(a) \cdot N(n) \neq 0$ なる $a \in S'$ が
 唯一存在する。

iii) $M \sim AN$ から $M' \sim NA$.

このとき $M \uparrow M'$ と書く。

Proposition 2-4

$G \uparrow G'$ ならば $M_G \uparrow M_{G'}$.

Proposition 2-5

$M \uparrow M'$ ならば, $\Omega(G_M) \cong \Omega(G_{M'})$.

以上より次の定理が導かれる。

Theorem 2-6

2つの片側 sofic system Ω と Ω' が互いに topologically conjugate であるための必要十分条件は
Krieger matrix system の有限列: $M_1 = M_G, M_2, \dots, M_n = M_{G'}$ が存在して, $M_i \uparrow M_{i+1}$ 又は $M_{i+1} \uparrow M_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) が成り立つことである。

特に sofic system が transitive である場合には
Theorem 2-6 の statement は left Krieger graph
の代りに left Fischer graph を考えれば成立する。

(References)

- [1] R. Fischer. Graphs and symbolic dynamics, Collog. Math. Soc. Janos Bolyai 16, Topics in Information Theory, Keszthely, Hungary, (1975) 229-244.
- [2] T. Hamachi and M. Nasu. Topological conjugacy for 1-block maps of subshifts and sofic preprint.
- [3] W. Krieger. On sofic systems I, Israel J. of Math. 48 (1984) 305-330.
- [4] M. Nasu. Topological conjugacy for sofic systems, preprint.
- [5] B. Weiss. Subshift of finite type and sofic systems, Monat. Math. 77 (1973) 462-474.
- [6] R.F. Williams. Classification of subshift of finite type, Ann. of Math. 98 (1973) 120-153; Errata: Ann. of Math. 99 (1974) 380-381.