

Caianiello 方程式について

京大 数学 畑 政義

Caianiello の方程式は、形式神経細胞の数学的モデルとして知られている。以下、次のような方程式を考察する。

$$x_{n+1} = 1 \left[A - \alpha \sum_{r=0}^n \frac{x_{n-r}}{b^r} - \theta \right]$$

ここで、 $1[x]$ は Heaviside 関数であり、 x_n は時間 n における細胞の状態を表わし、値 0 または 1 をとる。0 は静止状態を、1 は興奮状態をそれぞれ表わしている。また、 A は入力刺激の大きさを表わし、ここでは定数であるとする。また θ はスレッショルド値であり、 α は正の、また b は 1 より大きな定数である。

南雲、佐藤 [1] 両氏は、適当な変数変換によって、この方程式が、ある不連続な区分的線型な関数のダイナミックスの問題に変換できることを示し、また周期的アトラクターの出現する場合について研究を行なった。ここでは、彼らの結果を補足するとともに、Cantor アトラクターに関する新しい

結果を報告する。なお、定理の証明は省略する。

変数変換 $y_n = 1 + \frac{A-\theta}{\alpha b} - \sum_{r=0}^n \frac{x_{n-r}}{b^r}$ によって

$y_{n+1} = f(y_n, \beta, c)$ を得る。

ただし、

$$f(x) \equiv f(x, \beta, c) = \begin{cases} \beta(x-c)+1 & (x < c) \\ \beta(x-c) & (x \geq c) \end{cases}$$

$\beta = \frac{1}{b}$, $c = 1 - \frac{A-\theta}{\alpha} (1 - \frac{1}{b})$, $x_{n+1} = \mathbb{I}[y_n - c]$ とおく。

以下、 $(\beta, c) \in (0, 1) \times (0, 1)$ に対して、 $f(x, \beta, c)$ を考察していく。

§ 1 周期的アトラクターと Cantor アトラクター

$I = [0, 1]$ とし、次のように場合分けして考える。

A: $0 \leq i \leq N-1$ に対して $c \in \text{Int } f^i(I)$ 、かつ
 $c \notin \text{Int } f^N(I)$ となるような自然数 N が存在する場合

B: 任意の自然数 n に対して、 $c \in \text{Int } f^n(I)$ となる場合

このとき、次の定理が成り立つ。

定理 1.1 A の場合、任意の $x \in I$ に対して、 x から出発した軌道は、漸近的に $N+1$ 周期である。ここで N は、場合 A において定義されたものである。

定理 1.2 B の場合, $f(x)$ は周期軌道も漸近的周期軌道も持たない。さらに, $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A} f^n(I)$ とおくと, Λ は, f -不変な Cantor 集合であり, 測度 0 である。また, 任意の $x \in \Lambda$ に対し, Λ は x の ω 極限集合でもある。

§ 2 平均発火率

次の極限值が存在するとき, この値を平均発火率と呼ぶ。これは, 細胞が発火する確率とも考えうるが, 後にわかるように S^1 上の homeomorphism に対して定義される回転数にきわめて類似した性質を持っている。

$$\rho(x, \beta, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}[f^{j-1}(x, \beta, c) - c]$$

このとき次の定理が成り立つ。

定理 2.1 任意の $(x, \beta, c) \in [0, 1] \times (0, 1) \times (0, 1)$ に対して, 平均発火率が存在し, $\rho(x, \beta, c) = \rho(0, \beta, c)$ が成り立つ。

定理 2.2 B の場合であることと, その平均発火率が, 無理数であることは同値である。

定理 2.3 $\beta \in (0, 1)$ を固定したとき, $\rho(0, \beta, c)$ は c の関数として, 連続で, 単調減少である。

§ 3 パラメータとの関係

パラメータ平面 $(\beta, c) \in (0, 1) \times (0, 1)$ 上で, A および B の場合

がどのように分布しているのかを考察する。

定理 3.1 $\beta \in (0, 1)$ を固定する。任意の既約分数 $\frac{q}{p} \in (0, 1)$ に対し、一意的に c 軸上に閉区間 $\Delta(\frac{q}{p})$ が定まり、そこでは、 A の場合が周期 p で成立し、平均発火率は $\frac{q}{p}$ に等しい。 $\frac{q}{p} < \frac{s}{r}$ であれば $\Delta(\frac{q}{p}) > \Delta(\frac{s}{r})$ であり、さらに $\Delta(\frac{q}{p}) = [a, b]$ とおくと、

$$a = 1 - \frac{\beta^{p-1}(1-\beta)}{1-\beta^p} - \frac{1}{1-\beta^p} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)^2 \sum_{j=1}^p \left[\frac{q}{p} j \right] \beta^j$$

$$b = a + \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)^2 \frac{\beta^p}{1-\beta^p} \quad \text{が成立する。}$$

定理 3.2 $\Sigma = (0, 1) - \bigcup \Delta(\frac{q}{p})$ とおくと、 Σ は Cantor 集合であり、測度 0 である。任意の $c \in \Sigma$ に対して、 B の場合が成り立ち、そのときの平均発火率 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ との間には次の関係式が成り立つ。

$$c = 1 - \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} [\alpha n] \beta^n$$

§ 4 Conjugacy 問題

定理 4.1 もし $p(0, \beta, c) = p(0, \beta, \lambda) \in \mathbb{Q}$ であれば、

$f(x, \beta, c)$ は $f(x, \beta, \lambda)$ に topologically conjugate である。

定理 4.2 もし $p(0, \beta, c) \in \mathbb{Q}$ であれば、 $f(x, \beta, c)$ は

$R_\alpha: x \rightarrow x + \alpha$ に topologically semi-conjugate である。

ここで、 R_α は S^1 上の rigid な回転であり、 α は $f(x, \beta, c)$

の平均発火率である。

参考文献

- [1] J. Nagumo and S. Sato : On a response characteristic of a mathematical neuron model. Kybernetik 10, 155-164 (1972)