

山辺作用素の解空間における 不変な内積について*

京都大学・数理解析研究所 小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

概要

共形幾何の手法を用いて, 擬リーマン多様体の共形変換群の表現を山辺作用素の解空間に構成し, その応用として $O(p, q)$ の極小ユニタリ表現の解析的性質を調べる.

0 序

この報告のテーマは, 共形幾何の手法を用いて

(擬) リーマン多様体の共形変換群の無限次元表現

を一般的に構成し, その特殊な場合として

$O(p, q)$ の極小ユニタリ表現の幾何的モデル

を与えることである. 具体例として扱う多様体は, せいぜい球面や $\mathbb{R}^n$, 或いは, 定曲率の擬リーマン多様体 (hyperboloid) とその直積だけであり, 初等的な題材に絞って,

ユニタリ表現論



古典的な大域解析



共形幾何

の相互関係に着目し, 新しい現象を見い出そうというのが主旨である.

*研究集会「非可換代数系の表現と調和解析」2002 年 7 月 23 日～7 月 26 日 (研究代表者: 太田琢也) における講演記録

さて、整数論で重要な Weil 表現 (oscillator 表現ともいう) は、半単純リー群 $Mp(n, \mathbb{R})$ の極小 (ユニタリ) 表現であり、古くから種々のモデルと共に多くの研究が行われている。一方、もっと一般の半単純 Lie 群の極小表現の研究が始まったのは比較的最近のことで 1990 年代に入ってからである。今のところ、極小表現の研究の手法は代数的なものが主流となっている (例えば [KØ1] の文献表を参照されたい) が、極小表現は幾何や解析においても新しい問題を提供しており、深く研究する価値があると思われる。この報告で扱う $O(p, q)$ の極小表現に限ってみても、古典的な大域解析でありながら従来は意外に見過ごされていたような観点が (共形変換群の表現論から自然な形で) 浮かび上がってくる。

ここに述べた結果の厳密な定式化や証明は論文 [KØ0, 1, 2, 3] および講義録 [K2] に著わした。そこで、この報告では、論文にはあまり書かなかった考え方や展望を中心に書き、[KØ0, 1, 2, 3, K2] の補完的な役割を果たしたい。

1 共形変換群の表現

次の設定

(M, g_M) : n 次元擬リーマン多様体

$G = \text{Conf}(M, g_M)$: M の共形変換全体のなす群

を考える。以下の問題では、 M は単にリーマン多様体でもよいが、計量の正定値性はずして不定値計量も許容する (すなわち、擬リーマン多様体を考える) ことにより、格段に幅広く、面白い話題につながる (例えば、 M がコンパクトであっても共形調和関数の空間は無限次元になりうる)。

この節では M 上の共形調和関数の空間に G の表現 ϖ を構成する。この表現は擬リーマン多様体を一つ与えるたびごとに一つ定義され、functorial な性質を満たす。この節の最後にその表現に関する基本問題を述べる。

記号を準備しよう。

K_M : (M, g_M) のスカラー曲率

Δ_M : (M, g_M) のラプラシアン

$\tilde{\Delta}_M := \Delta_M - \frac{n-2}{4(n-1)} K_M$: 山辺作用素

$\text{Ker } \tilde{\Delta}_M := \{f \in C^\infty(M) : \tilde{\Delta}_M f = 0\}$: 共形調和関数の空間

さて、群 G が (M, g_M) の共形変換群であることから、ある正值関数 $\Omega \in C^\infty(G \times M)$ が存在して次の条件を満たす: $h \in G$ の作用 L_h で計量 g_M を引き戻すと

$$(L_h^* g_M)_x = \Omega(h, x)^2 (g_M)_{L_h \cdot x}$$

共形因子 (conformal factor) Ω は cocycle 条件を満たすので、各 $\lambda \in \mathbb{C}$ を任意に選んだとき $C^\infty(M)$ 上に

$$(\varpi_\lambda(h^{-1})f)(x) = \Omega(h, x)^\lambda f(L_h \cdot x)$$

という式で ϖ_λ を定義すると,

$$\varpi_\lambda : G \rightarrow GL(C^\infty(M))$$

は群準同型写像となる. すなわち, 表現 $(\varpi_\lambda, C^\infty(M))$ が定義された. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 1. 共形調和関数の空間 $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M$ は共形変換群の表現 $(\varpi_{\frac{n-2}{2}}, C^\infty(M))$ の部分表現である.

定理 ?? の証明のスケッチ. ラプラシアン Δ_M , スカラー曲率 K_M が共形変換の下でどのように変換されるかという共形幾何の公式 ([Ø]) を表現論的に次のように再定式化することができる ([KØ1]):

山辺作用素

$$\tilde{\Delta}_M : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

は G の表現 $\varpi_{\frac{n-2}{2}}$ と $\varpi_{\frac{n+2}{2}}$ の intertwining operator である.

よって定理が示された. $\square$

さて, 共形調和関数を全部集めて扱おうというのは表現論的には自然な発想であるが, 従来の共形幾何ではあまり重視されていなかった観点であるように思われる. そこで, 共形調和関数の空間 $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M$ について, 次の基本的な問題を提起しよう.

擬リーマン多様体上の共形調和関数に関する基本問題 ([K2])

(M, g_M) を擬リーマン多様体, $\tilde{\Delta}_M$ を山辺作用素, $G = \text{Conf}(M, g_M)$ を共形変換群とする.

- A. (大域解の存在) いつ $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M \neq \{0\}$ となるか.
- B. (解空間の既約性) G の表現 $(\varpi, \text{Ker } \tilde{\Delta}_M)$ は既約か?
- C. (解空間上の内積の存在) G の表現 $(\varpi, \text{Ker } \tilde{\Delta}_M)$ はユニタリ化可能か?
- D. (分岐則) 共形変換群 G の表現 $(\varpi, \text{Ker } \tilde{\Delta}_M)$ を等長変換群 $H = \text{Isom}(M, g_M)$ に制限したときの既約分解の公式を与えよ.

大域解析の観点から: 問題 A は (表現論に無関係な) 純粋な大域解析の問題とみなすことができる.

また問題 B と C の答が共に Yes ならば, 共形調和関数の空間 $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M$ には “自然な内積” が存在することになる. すなわち, 多様体 M の共形変換が $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M$ 上にユニタリに作用するような内積が, Schur の補題より, スカラー倍を除いて唯一つあることになる. そのような内積は擬リーマン多様体 (M, g_M) に内在しているという見方ができるので,

それを具体的に書き下すことは自然な意味をもつと考えられる. この問題の解は, 平坦な場合 $M = \mathbb{R}^{p,q}$ でさえ, つい最近まで知られていなかった.

等長変換ではなく, 共形変換を強調する立場からは, 山辺作用素のかわりに Dirac 作用素など低階または高階の別の作用素を考え, 類似の問題を追求してみるのも興味深いだろう. 初等的なケースでも発展性のある問題が多そうに思われる.

表現論の観点から: 擬リーマン多様体の大域解析を共形変換群の無限次元表現論の立場から研究しようというのが問題 B や C である. 従来, 多くの研究が行われてきた「等長変換群の無限次元表現論」(たとえば, 半単純対称空間上の調和解析) が**一般的な表現**を取り扱うのに対し, ここで述べた「共形変換群の無限次元表現論」は**特殊な表現**(たとえば, 最近注目されている極小表現) を詳しく取り扱うのに適している. また, 共形変換群と等長変換群のペアの表現論(分岐則)の立場から調べようというのが問題 D である. 表現論的な考察から問題 B や C の解答が得られることもあり, 逆に(大域解析の)問題 A を解くときには(表現論の)問題 D の解が役立つこともある.

共形同値と表現の幾何的モデル:

たとえば, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と球面 $S^n \setminus \{1 \text{ 点}\}$ とは立体射影によって共形同値である. このように等長ではないが共形同値である擬リーマン多様体は数多くある. 前述の表現の構成(定理 1)の functoriality より問題 A ~ C は(共形同値な)どのモデルで考えても本質的には同じ解を与えるはずである. 幾何的モデルの違いは問題 D の分岐則を通じて表現論的に反映される.

2 古典的な擬リーマン多様体上の共形調和関数

まず, コンパクトな直積多様体

$$M := S^{p-1} \times S^{q-1}$$

を考える. M の直積成分 S^{p-1} 上は正, S^{q-1} 上は負の直積計量を入れ, M を擬リーマン多様体とみなすのである. このとき

$$\text{等長変換群 } H = O(p) \times O(q)$$

$$\text{共形変換群 } G = O(p, q)$$

$$\text{山辺作用素 } \tilde{\Delta}_M = \Delta_{S^{p-1}} - \Delta_{S^{q-1}} - \frac{1}{4}(p-q)(p+q-4)$$

となる. この場合の基本問題 A ~ D の答は次のようになる.

定理 2. (Kostant, Binegar-Zierau, Huang-Zhu, Kobayashi-Ørsted; [Ks, B-Z, Hu-Z, KØ1])

$p, q > 1$ とする.

1) (大域解の存在) $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M \neq 0 \Leftrightarrow p+q$ が偶数

以下, $p+q$ は偶数とする.

2) (既約性) G の表現 $(\varpi, \text{Ker } \tilde{\Delta}_M)$ が既約 $\Leftrightarrow p+q > 4$.

以下, $p+q$ は偶数で > 4 とする.

3) (ユニタリ化) $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M$ 上に内積 (2.1) を入れると $\varpi(h)$ ($h \in G$) はこの内積を保つ.

$$(f_1, f_2) := (D_p f_1, D_p f_2)_{L^2(M)} \quad (f_1, f_2 \in \text{Ker } \tilde{\Delta}_M). \quad (2.1)$$

ここで, D_p は下の式で定義される M 上の擬微分作用素である:

$$D_p := \left(\frac{1}{4} - \Delta_{Sp-1} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.2)$$

定理の説明.

- i) (分岐則) 上記の設定では等長変換群は G の極大コンパクト群になる. 従って, 基本問題 D (分岐則を決定する問題) の解はいわゆる K -type 公式に他ならない. 一般には, 等長変換群はコンパクトにはならないが, 分岐則が離散的になることがしばしばある ([K1,3]). 等長変換群がコンパクトでない場合にも, 分岐則やノルムの公式 (Parseval-Plancherel 型定理) が知られている ([KØ2]).
- ii) (擬微分作用素 D_p) 定義(??) では見かけ上 p と q の役割が対等でない. しかし, 実際は, (??) で定義した擬微分作用素 $D_p = (\frac{1}{4} - \Delta_{Sp-1})^{\frac{1}{4}}$ は $\text{Ker } \tilde{\Delta}_M$ 上で $(\frac{1}{4} - \Delta_{Sq-1})^{\frac{1}{4}}$ と一致するので p と q は対等な役割をはたしている.
- iii) (極小表現) (2), (3) より $p, q \geq 2, p+q > 4$ のとき pre-Hilbert 空間 $(\text{Ker } \tilde{\Delta}_M, (,))$ を完備化した空間に G の既約ユニタリ表現を定義できる. この表現を $\varpi^{p,q}$ と書く. $\varpi^{p,q}$ は $p+q \geq 8$ のとき $O(p, q)$ の極小 (ユニタリ) 表現になる. 特に $\varpi^{p,q}$ の Gelfand-Kirillov 次元は $p+q-3$ であり, これは $O(p, q)$ の無限次元ユニタリ表現の Gelfand-Kirillov 次元としては最小値であり, これが「極小表現」という名の由来でもある. さて,

Weil 表現: C 型の群であるメタプレクティック群 $Mp(n, \mathbb{R})$ の極小表現

$\varpi^{p,q}$: D 型の群である不定値直交群 $O(p, q)$ の極小表現

という対比において, Weil 表現の方は, 古くから多方面において研究が行われている. 比較的最近発見された $\varpi^{p,q}$ についても “特別に良い” 性質が豊富にあることが期待される. そこで $\varpi^{p,q}$ のさまざまな構成を新しく行い, その幾何的側面, 解析的側面を調べたいというのがこの研究の 1 つの動機である.

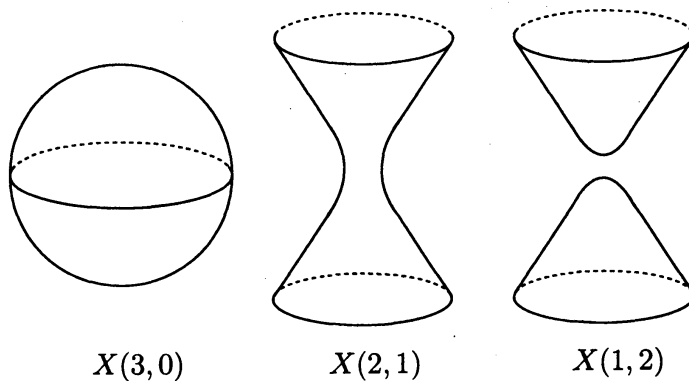
- iv) 定理 2 は [KØ1] に従って共形幾何の立場で定式化して述べた. 本質的に同値な結果は種々の方法で証明することができる. Kostant, Binetgar-Zierau, Howe-Tan は, 退化系列の部分表現という立場から代数的に定式化・証明した. また, Huang-Zhu は $Sp(p+q, \mathbb{R})$ における dual pair $SL(2, \mathbb{R}) \leftrightarrow O(p, q)$ に関する Howe 対応の立場から $\varpi^{p,q}$ の代数的性質を調べた. 一方, [KØ1, KØ2] の証明法は共形幾何および解析的手法に基づく. この証明法では, 極小表現 $\varpi^{p,q}$ の表現論的性質だけでなく, 共形同値な種々の幾何的モデルの長所を生かせる利点がある.

3 極小表現の定曲率空間モデル

$\mathbb{R}^{p+q}$ の超曲面として, hyperboloid

$$X(p, q) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} : |x|^2 - |y|^2 = 1\}$$

を考えよう. $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_p^2 - dy_1^2 - \cdots - dy_q^2$ を制限することによって, $X(p, q)$ は符号 $(p-1, q)$ をもつ $(p+q-1)$ 次元の擬リーマン多様体となる. その断面曲率は一定になるので, $X(p, q)$ は空間形 (space form) とよばれる. 2 次元の場合 $(p+q=3)$ を図示すると次のようになる.



Hyperboloid $X(p, q)$ に対しては,

無限小等長変換のなすリー環 $\simeq \mathfrak{o}(p, q)$

無限小共形変換のなすリー環 $\simeq \mathfrak{o}(p, q+1)$

$$\text{山辺作用素} = \Delta_{X(p,q)} - \frac{1}{4}(p+q-1)(p+q-3)$$

となる. ただし, $O(p, q+1)$ の元の $X(p, q)$ への“作用”は pole をもつことがあり, リー群 $O(p, q+1)$ は厳密な意味では共形変換群ではない (有理型共形変換群とでも言うべき対象である). このため, 定理 1 がそのままの形では適用できず, 共形調和関数の空間 $\text{Ker } \tilde{\Delta}_{X(p,q)} (\subset C^\infty(X(p, q)))$ は $O(p, q+1)$ の元によって保たれるとは限らない. そこで,

$$W^{p,q} := (\text{Ker } \tilde{\Delta}_{X(p,q)})_{K\text{-finite}} \quad (K = O(p) \times O(q))$$

とおき, この微妙な構造 (そもそも定理 1 の拡張がどの程度成り立つかわからない) を次の表現論的な定理の形で書きとめよう.

定理 3. (定曲率空間上での極小表現の構成)

m を奇数とする. このとき $\mathfrak{o}(m+1, \mathbb{C})$ -加群としての長完全系列

$$0 \longrightarrow W^{1,m-1} \xrightarrow{\varphi_1} W^{2,m-2} \xrightarrow{\varphi_2} \dots \longrightarrow W^{m-1,1} \longrightarrow 0$$

が存在し, $p+q=m$ となる全ての (p, q) に対し,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi_p &\simeq (\varpi^{p,q+1})_{K\text{-finite}} \\ \text{Coker } \varphi_{p-1} &\simeq (\varpi^{p+1,q})_{K\text{-finite}} \end{aligned}$$

が成り立つ.

この定理には 3 つのポイントがある:

- 共形調和関数の空間 $\text{Ker } \tilde{\Delta}_{X(p,q)}$ 自身には等長変換群 $O(p, q)$ しか作用しない.
- その約半分には共形変換群 $O(p, q+1)$ の隠れた対称性がある.
- 残りの約半分には別の群 $O(p+1, q)$ の隠れた対称性がある.

ここで,

$$O(p, q+1) \cap O(p+1, q) = O(p, q)$$

が成り立つことに注意しよう. 等長変換群よりも大きな隠れた対称性こそが極小ユニタリ表現 (の稠密な部分空間) の構成を与えているのである.

特に, (p, q) を動かしたとき異なる群の極小表現が数珠繋ぎに一つの完全系列に現れるという 定理 3 の主張は不思議な現象であるが, その理由は (筆者にとっては満足できる形では) まだ解明できていない (やむをえないので, [KØ2] では代数的な証明を与えた).

さて, 群 $O(p, q+1)$ の (有理型) 共形変換群として定曲率空間 $X(p, q)$ への作用を書き下すためには $X(p, q) \times S^0$ (S^0 は 0 次元球面 = $\{2 \text{ 点} \}$) を考える方が扱いやすい. もっと一般に直積多様体

$$Y(p, q, k) := X(p, q) \times S^{k-1}$$

を考えよう. $Y(p, q, k)$ に符号 $(p-1, q+k-1)$ の擬リーマン計量を (直積として) 入れると, そこには $O(p, q+k)$ が有理型共形変換群として作用する. $Y(p, q, k)$ 上の共形調和関数の空間 $\text{Ker } \tilde{\Delta}_{Y(p, q, k)}$ を考えると, $p+q+k$ が偶数のとき, やはりその (約半分の) 部分空間に $O(p, q+k)$ の極小表現を構成できる. 定理 3 の後半で述べた極小表現の構成は, $k=1$ の場合に対応しているので, その一般化になっている. さらに基本問題 D で述べたように

共形変換群 $\downarrow$ 等長変換群

の分岐則を考えると, この場合,

$$O(p, q+k) \downarrow O(p, q) \times O(k)$$

という半単純対称対に関する離散的な分岐則 ([K1,3]) が得られる. 代数的な意味の分岐則のみならず, ノルムの記述を表す Parseval-Planchrel の公式も知られている ([KØ2]). そこで得られる結果は $O(p, q)$ の (極小 elliptic orbit に付随した) Zuckerman-Vogan 導来関手加群のユニタリ化に関して知られている一般論 (Vogan [V]) よりも強い (パラメータの範囲が広い) ことに注意しておく.

4 極小表現の平坦モデル

同じアイディア (定理 1 を少し拡張したもの) を用いて, $O(p, q)$ の極小表現を $\mathbb{R}^{p-1, q-1}$ 上で実現することもできる. これを平坦モデル (flat model) と呼ぼう. 平坦モデルに関連して, 共形変換で不変な内積の具体的な表示を以下の 3 通りの方法で与えることができる [KØ3, K2].

(1) まず Green 関数を求め, それを用いて解の積分表示と解空間の内積を与える方法.

(2) $\mathbb{R}^{p-1, q-1}$ の非特性的超平面 α を一つ選び, 大域解の “Cauchy data” を α 上積分することによって内積を定義する方法.

(3) 解を Fourier 変換し, 錐多様体 $C = \{(\xi, \eta) : |\xi|^2 - |\eta|^2 = 0\}$ 上の L^2 -内積として定義する方法.

共形変換がユニタリ作用素として作用するような内積は (表現の既約性から) 本質的に上で述べた内積 (見かけは異なるが全て同じ) のスカラー倍に限られる. 各々の表示にはそれぞれ別の利点がある. (1), (2), (3) の内積をもう少し丁寧に説明しておこう.

(1) の表示では Green 関数は regularize した超関数

$$e^{i\frac{\pi}{2}(q-1)}(x_1^2 + \cdots + x_{p-1}^2 - y_1^2 - \cdots - y_{q-1}^2 + \sqrt{-1} \, 0)^{\frac{4-p-q}{2}}$$

の虚数部分という具体的な形で得られる (Hörmander [Hö], [KØ3, Proposition 4.2]).

(2) の内積は正則関数の境界値として関数を表すという佐藤超関数のアイデア (たとえば [K-K-K]) を用いて定義される. その定義は非特性的超平面 α の選び方によらない. このことは表現がユニタリ性の一側面として反映されている. (2) の内積表示の平行移動の下での不変性 (共形変換の下での不変性の極めて特別な場合) でさえ, 意味のある結果である. 例えば, $q = 2$ の場合 (ミンコフスキ空間における波動方程式の解) のエネルギー保存則は時間方向の平行移動の下での内積の不変性と密接に関連している.

(3) $G = O(p, q)$ において, 最小次元 (> 0) の余随伴軌道 $\mathcal{O}_{\min}$ は $2(p + q - 3)$ 次元の冪零軌道である. 一方, 錐多様体 C はシンプレクティック多様体 $\mathcal{O}_{\min}$ の Lagrangean 多様体とみなせる. 従って, 極小ユニタリ表現が $L^2(C)$ に実現できるという定理 (内積の表示 (3)) は

$$\text{極小表現} = \mathcal{O}_{\min} \text{ の “幾何的量子化”}$$

と解釈できる. これは Kirillov-Kostant 流の orbit method に符合した構成といえる.

$G = O(p, q)$ の場合には, 極小表現は

$$\begin{aligned} & \text{(本質的に) 最高ウェイト表現} \Leftrightarrow p = 2 \text{ or } q = 2 \\ & \text{spherical (} K\text{-fixed ベクトルをもつ)} \Leftrightarrow p = q \end{aligned}$$

となるので, ほとんどの p, q に対しては最高ウェイト表現でも spherical でもないことに注意しよう. なお [D-S] では $p \neq q$ (spherical でない場合) の時は, $L^2(C)$ に $G = O(p, q)$ の極小表現を構成することはできないと主張しているが, 上述のように実は構成できるのである ([KØ3, Theorem 4.9]).

極小表現 $\omega^{p,q}$ の $L^2(C)$ 上の実現は, Weil 表現の Schrödinger モデルに相当する. この $L^2(C)$ 上の実現においては, 最小 K -type を K -Bessel 関数を用いて具体的に表示することができる ([KØ3, Theorem 5.8]). その証明方法は

$$\text{Jacobi 関数} \xrightarrow{\text{フーリエ変換}} \text{Appel の超幾何関数} \xrightarrow{\text{reduction}} \text{K-Bessel 関数}$$

という図式によって説明される. そこに現れた特殊関数に関する公式は, [KØ3, §5] を参照されたい.

参考文献

- [B-Z] B. Binetgar and R. Zierau, Unitarization of a singular representation of $SO(p, q)$, *Comm. Math. Phys.*, **138** (1991), 245-258.
- [D-S] A. Dvorsky and S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations II, *Invent. Math.*, **138** (1999), 203-224.

- [Hö] L. Hörmander, Asgeirsson's mean value theorem and related identities, *J. Func. Anal.*, **184** (2001), 337–402.
- [Ho-T] R. Howe and E. Tan, Homogeneous functions on light cones, The infinitesimal structure of some degenerate principal series representations, *Bull. A. M. S.*, **28** (1993), 1–74.
- [Hu-Z] J-S. Huang and C-B. Zhu, On certain small representations of indefinite orthogonal groups, *Representation Theory*, **1**, 190–206.
- [K-K-K] M. Kashiwara, T. Kawai and T. Kimura, Foundations of Algebraic Analysis, *Princeton Math. Ser.*, **37** (1986).
- [K1] T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications. Part I. *Invent. Math.*, **117** (1994), 181–205, Part II. *Ann. Math.*, **147** (1998), 709–729; Part III. *Invent. Math.*, **131** (1998), 229–256.
- [K2] T. Kobayashi, Conformal geometry and analysis on minimal representations, Lecture Notes of the Winter School 2002 on geometry and physics, Czech Republic, (preprint, RIMS-1365), to appear in a special volume of *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
- [K3] T. Kobayashi, Branching problems of unitary representations, *Proc. of ICM, Beijing 2002*, vol. 2, (2002), 615–627.
- [KØ0] T. Kobayashi and B. Ørsted, Conformal geometry and branching laws for unitary representations attached to minimal nilpotent orbits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **326** (1998), 925–930.
- [KØ1] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on minimal representations of $O(p, q)$, I. Realization and Conformal Geometry, (preprint, math.RT/0111083), to appear in *Adv. Math.*
- [KØ2] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on minimal representations of $O(p, q)$, II. Branching Laws, (preprint, math.RT/0111085), to appear in *Adv. Math.*
- [KØ3] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on minimal representations of $O(p, q)$, III. Ultra-hyperbolic equations on $\mathbb{R}^{p-1, q-1}$, (preprint, math.RT/0111086), to appear in *Adv. Math.*
- [Ks] B. Kostant, The vanishing scalar curvature and the minimal unitary representation of $SO(4, 4)$, *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping*

Algebras, and Invariant Theory (Connes et al, eds.), *Progress in Math.*, vol. 92, Birkhäuser, 1990, pp. 85–124.

- [Ø] B. Ørsted, A note on the conformal quasi-invariance of the Laplacian on a pseudo-Riemannian manifold, *Lett. Math. Phys.*, **1** (1977), 183.
- [V] D. A. Vogan, Jr., Unitarizability of certain series of representations, *Ann. Math.*, (1984), 141–187.