

回転 2 円板間流れの遷移

同志社大学工学研究科 岡本智宏 (Tomohiro Okamoto)¹

同志社大学工学研究科 三浦知仁 (Tomohito Miura)¹

同志社大学工学部 水島二郎 (Jiro Mizushima)²

¹ Graduate School of Engineering, Doshisha University

² Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

1 はじめに

回転 2 重円筒間流れは, 1923 年にテイラー (Taylor) によってその安定性が解析され, 流れの安定性理論の単純で美しい枠型から実験とよく一致する結果が導かれることに驚かされた. その後もこの流れは気象学や工学などの分野で多くの研究者によって調べられてきた. この流れのパターンは, 内外 2 円筒の角速度の比に応じて, さまざまに変化する. 特に, 第一次不安定性によってテーラー渦が現れることはよく知られている. 古典的なテーラー問題は回転軸方向は無限に長い (終端効果が無視できるくらい長い) ことが仮定されており, その研究は多いが, 工学的な応用を考える場合は, 終端の効果も考慮に入れる必要がある.

有限長の 2 重円筒と両端の回転 2 円板に囲まれた流体運動 (以後, 回転 2 円板間流れと呼ぶ) は, 流体機械の内部で良く見受けられることから, 機械工学の分野での研究も盛んである. 回転 2 円板間流れは, その境界条件の相違によりいくつかの種類に分類できる. 特に, 外円筒が 2 円板と共に回転し, 内円筒が静止している場合と, 静止した外円筒の中で内円筒が 2 円板と共に回転する場合がある. 本研究では, 内円筒と 2 円板が同じ角速度で回転し, 外円筒が静止している場合を取り扱う.

このような系では, 低いレイノルズ数では軸対称流れが実現されるが, レイノルズ数が大きくなって流れ場の軸対称性が破れると, 回転軸に垂直な断面内で特徴的な多角形パターンが発生することが知られている. このとき出現する幾何学的に美しい多角形パターンが多くの研究者の興味をひきつけてきた. 実際, 円板の回転数が大きいときの流れ場の構造についての詳細な可視化実験が Abrahamson, Eaton and Koga[2] によって行われ, 流れ場が大きく 3 つの領域に分けられることが明らかになった. それらの 3 つの領域とは, 流体がほぼ剛体回転する内部領域と呼ばれる回転軸に近い領域と大規模な渦構造が存在する外部領域および静止外周壁に沿った境界層である. また, 彼らは内部領域と外部領域の境界が多角形パターンを形成すると説明した. その後, Schuler, Usry, Weber, Humphrey and Greif[3] が円板の回転数が小さい場合と中程度の場合および大きい場合の 3 つの条件についてレーザードップラー流速計を用いて周方向速度の時間変動を調べ, 流れの中に正弦波状の振動が生じていることを確認した. 同時に理論的な解析が行われ, 内部領域と外部領域の境界には速度せん断層 (本稿では以後, 内部境界層と呼ぶ) が存在することが明らかになった.

Humphrey, Schuler and Webster[4] は数値シミュレーションを行い, Schuler *et al.*[3] が実験により確認した周方向速度の周期振動は外円筒の周壁近傍領域の不安定性により生じた多数の渦に起因するものであり, このときに現れる流れはシフト反転対称性 (shift-and-reflect symmetry: 定義については後述) をもっていることを明らかにした. 一方, Abrahamson *et al.*[2] が見いだした多角形パターンは, 内部境界層の形が多角形をなしており, 内部境界層の不安定性によって生じるものと考えられる. このため, Humphrey *et al.*[4] が示した結果

は外円筒周壁近傍の渦発生を説明したものであり、多角形パターン発生の機構を説明するに至っていないと考えられている。

最近でも、数値計算によって流れの遷移や解の分岐を調べ、流れパターンの形成やその特徴を明らかにしようとした論文も数多く出版されている。たとえば、Herrero, Giralt and Humphrey⁵⁾は数値シミュレーションによって軸対称流れから非軸対称流れへの遷移について調べ、模式的な遷移図を示した。彼らの結果によれば回転2円板間流れの遷移は、内外円筒間距離(内外円筒の半径差)と2円板間隔との比で定義されるアスペクト比 Γ が大きい場合と小さい場合では異なる。アスペクト比が大きい場合 ($\Gamma > 0.28$) は、レイノルズ数が増加すると、2円板間中心面に対して対称(以後、反転対称と呼ぶ)な軸対称定常流がピッチフォーク分岐を生じて、反転対称性をもたない軸対称流へ遷移するが、この流れは不安定であり、即座にホップ分岐を起こして非反転対称で非軸対称な振動流へ遷移する。このとき現れる流れは、回転軸に垂直な断面内で明確な多角形パターンを示す。それに対して、アスペクト比が小さい場合 ($\Gamma < 0.28$) は、反転対称な軸対称定常流からシフト反転対称性をもつ非軸対称な周期流へと遷移する。彼らは、いずれの場合も軸対称性の破れはホップ分岐によって生じると述べているが、解の分岐構造の詳細は示されなかったので、その主張を確認することはできない。Randriamampianina, Schiestel and Wilson⁶⁾は、軸対称性を仮定した2次元および3次元数値シミュレーションを行い、Herrero *et al.*⁵⁾の結果と同様にアスペクト比の大小によって遷移過程に相違が生じることを確かめた。また、彼らは1つのパラメータの組み合わせに対して複数の安定解が存在することも示した。

このように、非軸対称流れには Humphrey *et al.*⁴⁾が最初に明らかにした外円筒周壁近傍領域の不安定性により生じるシフト反転対称型と、Herrero *et al.*⁵⁾や Randriamampianina *et al.*⁶⁾が示した回転軸に垂直な断面内で明確な多角形パターンを示す非反転対称型が存在する。この報告では、これらの非軸対称流れの発生起源を明らかにし、その解の分岐構造と流れ場の構造を数値シミュレーションと線形安定性解析により明らかにする。

2 問題の説明と基礎方程式

静止外円筒(半径: r_2)に囲まれた2円板(半径: $r_2 - \delta r$)と内円筒(半径: r_1)が角速度 Ω で回転する系を考える(図1)。回転軸を鉛直にとり、2円板外縁と外円筒の間隙 δr は非常に小さいものとして無視する。2円板間に満たされた流体が円板の回転によって駆動され、流れは非圧縮性を仮定する。円板の最大速度 $r_2\Omega$ と外円筒と内円筒の半径の差 $d \equiv r_2 - r_1$ をそれぞれ代表スケールにとり、流体運動を特徴づける無次元パラメータとしてレイノルズ数 $Re \equiv r_2\Omega d/\nu$ を定義する。円板間隔 s と円筒間の間隙 d の比 ℓ/d をアスペクト比 Γ と定義し、半径比 $\eta = r_1/r_2$ については一定の値 $\eta = 0.5$ に固定する。

円筒座標系 $r = (r, \theta, z)$ を導入し、無次元化された速度および圧力をそれぞれ $\mathbf{u} = (u, v, w)$ と p で表せば、流体の運動を支配する方程式である連続の式とナビエ・ストークス方程式は、

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial(\xi_\beta u)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial(\xi_\beta uu)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial(vu)}{\partial \theta} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} - \frac{v^2}{\xi_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{Re} (\tilde{\nabla}^2 u - \frac{2}{\xi_\beta^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial(\xi_\beta uv)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial(vv)}{\partial \theta} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} + \frac{uv}{\xi_\beta} = -\frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} (\tilde{\nabla}^2 v + \frac{2}{\xi_\beta^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial(\xi_\beta u w)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial(v w)}{\partial \theta} + \frac{\partial(w w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w, \quad (4)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi_\beta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi_\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \tilde{\nabla}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{\xi_\beta^2}$$

と書くことができる。ここで、 $\xi = (r - r_1)/d$, $\xi_\beta = \xi + r_1/d$ である。

境界条件は、回転している内円筒壁面 ($\xi = 0$) で $u = w = 0$, $v = \eta$, 静止外周壁上 ($\xi = 1$) では $u = w = 0$, $v = 0$ である。2枚の回転円板表面 ($z = 0, \Gamma$) では、 $u = w = 0$, $v = \eta + \xi(1 - \eta)$ となる。

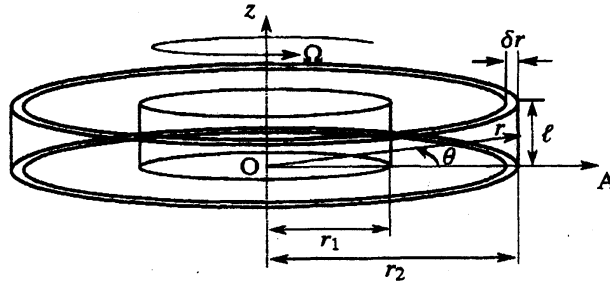


図 1: 問題の説明と座標系。2円板外縁と静止外周壁の間隙 δr は小さいとして無視する。

3 基本流計算および線形安定性解析

回転2円板間流れはアスペクト比の大きさにかかわらず、低レイノルズ数では定常でかつ2円板間中心面に関して反転対称な軸対称流となる。しかし、レイノルズ数が増加すると解の不安定性によって軸対称性が破れる。定常な軸対称流を基本流とし、攪乱に対する安定性を調べることににより軸対称性の破れについて考察する。

基本流 $(\bar{u}, \bar{p})$ においては、半径方向速度 $\bar{u}$ と周方向速度 $\bar{v}$ および圧力 $\bar{p}$ は2円板間中心面に対する対称、すなわち反転対称性を持ち、軸方向速度 $\bar{w}$ は反反転対称性をもつ。これらを数値計算で求めるときには、これらの対称条件を課し、支配方程式(1) - (4)を境界条件のもとで初期値問題として数値的に解く。

基本流 $(\bar{u}, \bar{p})$ に無限小攪乱 (u', p') が加わっていると考え、線形安定性解析を行う。空間周期性を考えると、攪乱は周方向についてフーリエ級数展開することができる。また、線形攪乱を仮定していることから個々のフーリエモードを独立に扱うことが可能となる。これらのことを考慮すれば、攪乱 (u', p') は

$$u' = \tilde{u}_k e^{ik\theta}, \quad p' = \tilde{p}_k e^{ik\theta} \quad (5)$$

のように表すことができる。ここで、 k は周方向波数である。各方向の速度成分 $u = \bar{u} + u'$ と圧力 $p = \bar{p} + p'$ を支配方程式(1) - (4)に代入し、基本流を支配する方程式を引き去り、線形化することで時間発展形の線形攪乱方程式が得られる。攪乱の境界条件は全ての固定境界上で $\tilde{u}_k = 0$ である。各フーリエモードについての発展方程式を初期値問題として数値的に解く。基本流のフーリエモード k の攪乱に対する安定性は、攪乱エネルギー E'_k の時間増幅率によって評価する。攪乱エネルギー E'_k は増幅率を λ_k として、攪乱の線形性を考慮すれば

$$E'_k = \frac{1}{2} |\tilde{u}_k|^2 = E'_{k0} \exp(\lambda_k t) \quad (6)$$

のように時間 t に対して指数関数的に増大 (減衰) すると仮定できる. $\lambda_k < 0$ であれば基本流は攪乱 $\tilde{u}_k$ に対して安定, $\lambda_k > 0$ であれば不安定である.

4 数値計算法

回転 2 円板間流れの遷移過程を調べるために, 3 次元数値シミュレーションを行った. また, 軸対称流から非軸対称流への遷移における不安定性の機構を解明するために線形安定性解析を行った.

3 次元数値シミュレーションでは, 支配方程式を SMAC (Simplified Marker and Cell) 法に基づき 2 段階に分け, クランク・ニコルソン法と 2 次精度のアダムス・バッシュフォース法を組み合わせた半陰解法を用いて時間発展計算を行った. 空間項は高エネルギー保存型差分法 [7] を用いて離散化した. 圧力に関するポアソン方程式は θ 方向についてフーリエ変換を行い, rz 平面で 5 グリッドサイクルのマルチグリッド法を用いて解いた. 各段階の反復計算には SOR (Successive Over Relaxation) 法を用いた. 数値シミュレーションにおいては, 計算領域を $N_r \times N_\theta \times N_z = 96 \times 96 \times 96$ のスタガード格子に分割し, 時間刻みは $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ とした. ただし, N_r, N_θ, N_z は各方向の格子点数である.

基本流の計算および線形安定性解析については, 時間積分をフラクショナルステップ法と 2 次精度のアダムス・バッシュフォース法の組み合わせで行った. 非線形項における空間微分を 3 次精度の上流差分法で近似し, 線形項における空間微分は 4 次精度中心差分法で近似した. 圧力についてのポアソン方程式は 2 次精度の中心差分で近似し, SOR 法を用いて解いた. 基本流の計算および線形安定性解析では, rz 平面内の 2 次元領域を $N_r \times N_z = 100 \times 100$ のスタガード格子で離散化し, 時間刻みは基本流の計算においては $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$, 線形安定性解析では $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ とした.

5 結果および考察

回転 2 円板間流れの遷移について詳しく調べるために, 代表的なアスペクト比 $\Gamma = 0.4$ についてレイノルズ数 $500 \leq Re \leq 2500$ の範囲で数値シミュレーションを行い, 軸対称流の線形安定性解析をレイノルズ数 $1000 \leq Re \leq 1500$ の範囲で行った.

5.1 数値シミュレーション

回転 2 円板間流れでは, レイノルズ数が低い場合, 流れ場は系の対称性から軸対称でかつ 2 円板間中心面に関して反転対称となる. しかし, レイノルズ数が高くなると流れ場の反転対称性あるいは軸対称性が破れる. $Re = 1500$ において, 静止状態を初期条件として数値シミュレーションを行ったところ, 図 2(a)-2(c) に示されるような非軸対称な流れが得られた. これらの図は高さ $z = \Gamma/4$ の水平断面内における各速度成分 (u, v, w) の等高線を示しており, 実線部分で各速度成分は正の値をもち, 破線部分で負の値をもち. このレイノルズ数では, 明らかに周方向波数 $k = 7$ をもつ流れが現れる. この波数 $k = 7$ をもつ流れの特徴は図 2(a)-2(c) からわかるように, 静止外円筒近傍で強い 3 次元性を示す一方で, 内円筒付近は半径方向および回転軸方向への流体運動はほとんどなく剛体回転している. 波数 $k = 7$ をもつ流れは外壁境界層の不安定性により生じた 7 対の渦を含む非軸対称流であり, いわゆる多角形パターンではない. 多角形パターンは内部境界層の不安定性により生じる流れと考えられている. 実際, 図 2(a)-2(c) では内部境界層は円形に見える.

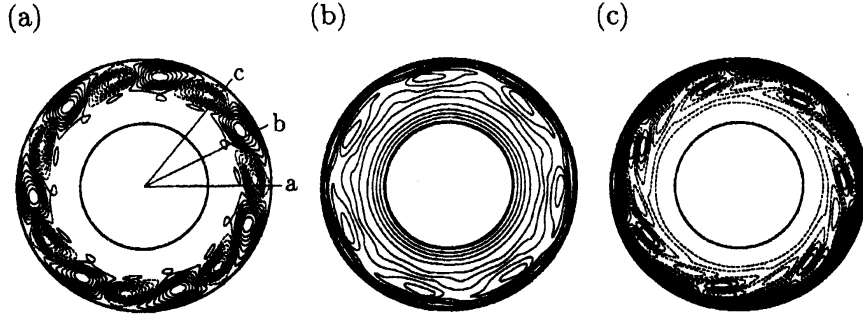


図 2: 水平断面 ($z = \Gamma/4$) 内の流れパターン. $\Gamma = 0.4$. $Re = 1500$. (a) 半径方向速度 u . (b) 周方向速度 v . (c) 軸方向速度 w . 物理量が正の値をもつ領域は実線, 負の値をもつ領域は破線で示す.

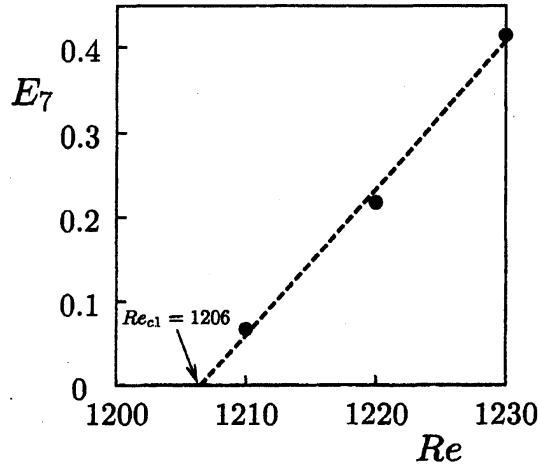


図 3: フーリエモード $k = 7$ の運動エネルギー E_7 . $\Gamma = 0.4$. $Re = 1500$.

各速度成分 (u, v, w) について周方向に対する離散フーリエ変換 ($u = \sum_{k=0}^K u_k e^{ik\theta}$) を行い,

$$E_k = \int \int |u_k|^2 r dr dz, \quad (7)$$

で定義される周方向波数 k をもつモードの運動エネルギー E_k を評価することによって, 非軸対称流れの発生起源を調べた. $Re = 1500$ において明らかに波数 $k = 7$ のモードをもっているので, モード $k = 7$ の成長に着目した. 図 3 はモード $k = 7$ の運動エネルギー E_7 とレイノルズ数の関係である. この図から臨界レイノルズ数 $Re_{cl} = 1206$ を超えるとモード $k = 7$ が成長し始めることがわかる. すなわち, レイノルズ数が 1206 を超えると, 流れ場の軸対称性が破れ, 水平断面内には波数 $k = 7$ の流れパターンが現れる.

次に $Re = 1500$ における, 子午断面内の流れ場に着目する. 図 4 は子午断面内におけるある瞬間の速度場である. 図 4(a) は図 2(a) 中の a 断面 ($\theta = 0$ とする), 図 4(b) と 4(c) はそれぞれ b 断面 ($\theta = \pi/7$) と c 断面 ($\theta = 2\pi/7$) の速度場を示している. 図 4(b) に示される $\theta = \pi/7$ 断面では $\theta = 0$ 断面 (図 4(a)) で観察された流れパターンを 2 円板間中心面に対して反転したパターンとなり, $\theta = 2\pi/7$ 断面では再び $\theta = 0$ 断面と同じパターンが現れる. したがって任意の子午断面で固定して見れば, 時間周期的に流れパターンの上下が入れ替わる現象が観察できる. このような空間対称性をもつ流れが起こることは, Humphrey et al.[4], Herrero et al.[5] や Randriamampianina et al.[6] が確認しており, シフト反転対称流れと呼

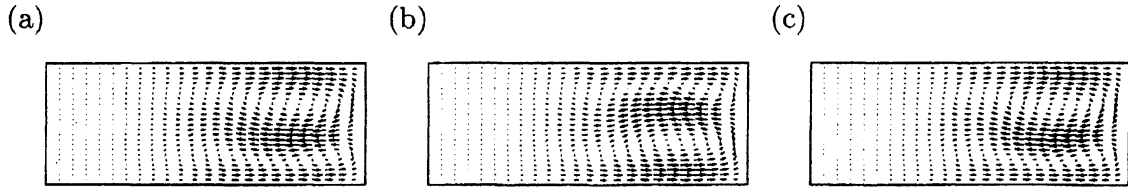


図 4: 子午断面内の速度場. $\Gamma = 0.4$. $Re = 1500$. (a)–(c) は図 2(a) に示される断面 [a–c] 内の速度場をそれぞれ示す. (a) $\theta = 0$. (b) $\pi/7$. (c) $2\pi/7$.

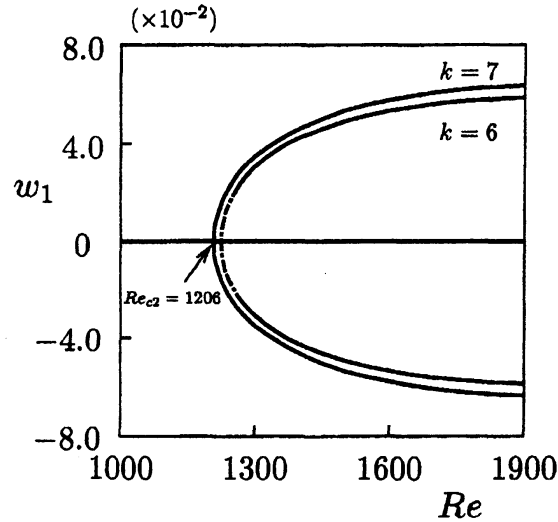


図 5: 分岐図. $\Gamma = 0.4$. w_1 は点 $P_1(0.8, 0, 0.5\Gamma)$ における軸方向速度. 図中の一点鎖線は本結果から予測される解を示している.

ばれている. この子午断面内で起こる周期的な流れの発生起源を調べるために, $\theta = 0$ 断面の 2 円板間中心上の一点 $P_1(0.8, 0, 0.5\Gamma)$ の軸方向速度 w_1 を流れ場の非対称性を表す代表量にとり, そのレイノルズ数依存性を調べた. 点 P_1 における軸方向速度 w_1 とレイノルズ数 Re の関係を示すと図 5 のようになる. 図中には w_1 の最大値と最小値をプロットしている. 図 5 からわかるように, レイノルズ数が低いときは $w_1 = 0$ であり反転対称な流れであるが, レイノルズ数がある臨界値を超えると超臨界ホップ分岐が起こり, 振動流が現れる. 図 5 から超臨界ホップ分岐が生じる臨界レイノルズ数は $Re_{c2} = 1206$ となることがわかった. この臨界値 Re_{c2} は前に述べた軸対称性が破れる臨界値 Re_{c1} と等しい. この結果は, 子午断面内の反転対称性と軸対称性が同時に破れることを示している. すなわち, 軸対称で反転対称な基本流は $Re = 1206$ でホップ分岐を生じ, そのとき軸対称性と反転対称性を同時に失ってシフト反転対称流へ遷移するのである.

ここまでは波数 $k = 7$ をもつ解についてのみ説明したが, $k = 7$ 以外波数をもつ解が存在することも確認した. 図 5 に示される $k = 7$ の解のブランチは $Re = 1500$ のときに数値シミュレーションで得られた解を初期条件にそれぞれのレイノルズ数で求めたものであるが, 一方で $Re = 1600$ において静止状態から直接数値計算を行った場合, $k = 6$ の解が得られた. 波数 $k = 6$ の解の時間的および空間的な特徴は $k = 7$ の場合と全く同じである. 図 5 には $k = 6$ の解のブランチも示したが, 臨界値近傍の解のふるまいについては現在調査中である. 本研究では, 波数 $k = 6$ と 7 の解の線形安定性を調べていないため解の接続の詳細は不明であるが, 今回の結果から一つのパラメータの組み合わせに対して複数の解が存在することがわかった. また, $k = 7$ の解が現れる臨界レイノルズ数 $Re_c = 1206$ 以下の領域で

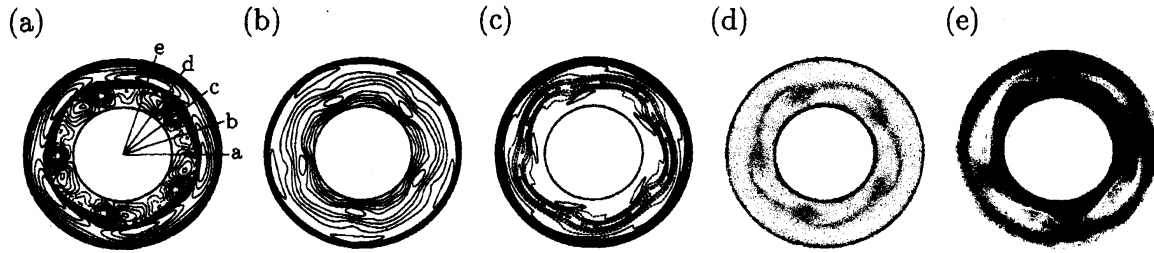


図 6: 水平断面内の流れパターン. $\Gamma = 0.4$. $Re = 2500$. $z = \Gamma/4$. (a) 半径方向速度 u . (b) 周方向速度 v . (c) 軸方向速度 w . (d) 濃度場 (数値シミュレーション). (e) 可視化写真 (実験). (a)-(c) において物理量が正の値をもつ領域は実線, 負の値をもつ領域は破線で示す.

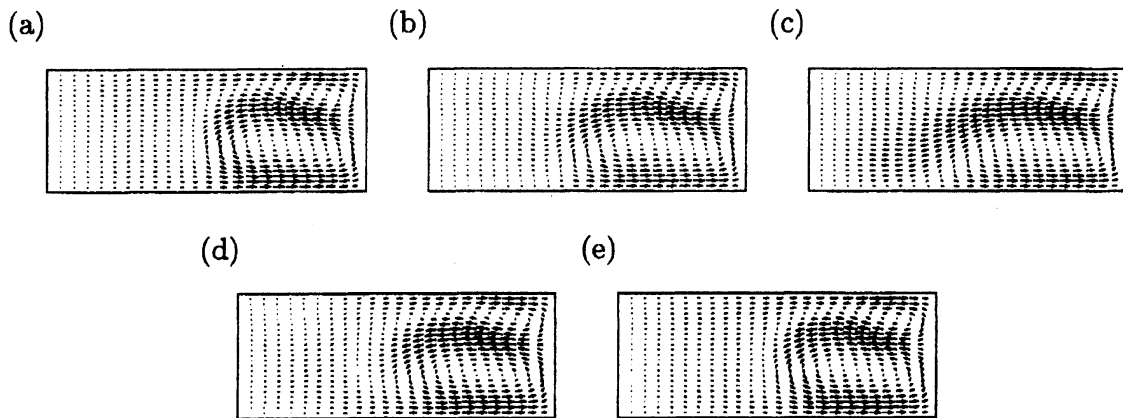


図 7: 子午断面内の速度場. $\Gamma = 0.4$. $Re = 2500$. (a)-(e) は図 6(a) に示される断面 [a-e] 内の速度場をそれぞれ示す. (a) $\theta = 0$. (b) $\pi/10$. (c) $\pi/5$. (d) $3\pi/10$. (e) $2\pi/5$.

は, 非軸対称解が得られなかったことから, 流れ場の軸対称性が破れる臨界レイノルズ数は $Re_c = 1206$ であり, 臨界波数は $k_c = 7$ と特定できる.

さらに高いレイノルズ数 $Re = 2500$ では, $Re = 1500$ の場合とは明らかに異なる特徴をもつ流れが現れる. 図 2(a)-2(c) に戻れば, $Re = 1500$ の流れは外円筒付近で強い 3 次元性を示すが, 内円筒付近ではほぼ剛体回転している. 一方で $Re = 2500$ の場合は, 図 6(a)-6(c) に示される各速度成分の等高線を見ると, 大部分の領域で流れは 3 次元的になっていることがわかる. また, 図 6(d) と 6(e) はそれぞれ, 支配方程式と濃度拡散方程式を連立させて解くことによって得られた濃度場と, 実験による可視化写真である. これらの図を見てわかるように, 水平断面内には明確な 5 角形パターンが現れる. また, 数値計算によって得られた結果は, 実際の流れパターンの特徴を非常によく捉えている. このときの子午断面内の速度場を図 7(a)-7(e) に示す. これらの図は順に $\theta = 0$ から $\pi/10$ ごとに区切られた断面を表し, それぞれ図 6(a) に示される断面 [a-e] に対応している. 図 7(a)-7(e) を見ればわかるように, レイノルズ数 $Re = 1500$ の場合 (図 4(a)-4(e)) と異なり, どの断面内においても下円板近くで流体運動が大きく, 流れ場は 2 円板間中心面に対して非反転対称となっている. このレイノルズ数 $Re = 2500$ で現れる非反転対称型の非軸対称解の発生起源と, 前述のシフト反転対称型の非軸対称解との関連を調べるために, 点 $P_1(0.8, 0, 0.5\Gamma)$ の軸方向速度 w_1 を代表量にとり解の分岐図を描くと図 8(a) のようになった. 図 8(a) を見れば, $Re_{cp} = 1500$ で基本流が不安定となり, 超臨界ピッチフォーク分岐が生じて非反転対称な軸対称定常解が現れ, さらに $Re_{ch} = 2240$ で超臨界ホップ分岐が生じることにより, 明確な 5 角形パターンを示す非反転対称型の非軸対振動流が現れる. この結果から, レイノルズ数 $Re = 2500$ で

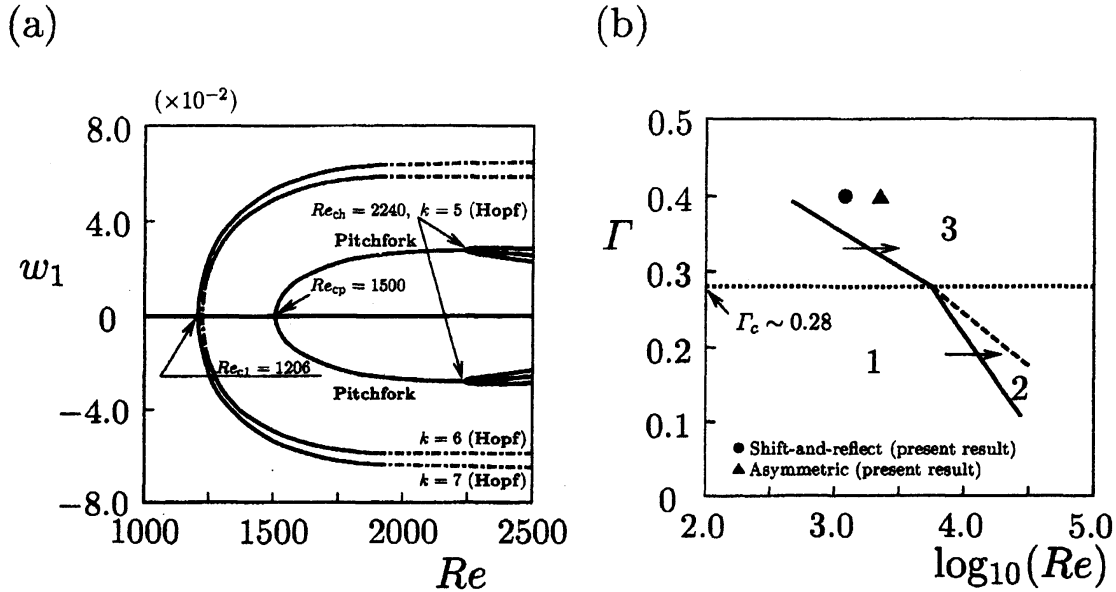


図 8: 分岐図および遷移図. (a) 分岐図. $\Gamma = 0.4$. w_1 は点 $P_1(0.8, 0, 0.5\Gamma)$ における軸方向速度. 図中の一点鎖線は本結果から予測される解を示している. (b) 遷移図. Herrero *et al.* [5] の結果を転載. Herrero *et al.* によれば, 領域 1 では 2 円板間中心面に関して反転対称な定常軸対称流, 領域 2 ではシフト反転対称性をもつ非軸対称流, 領域 3 では 2 円板間中心面に関して非反転対称な非軸対称振動流が起こる. ● は本研究より得られたシフト反転対称型の非軸対称流が現れる臨界値, ▲ は非反転対称型の非軸対称振動流が起こる臨界値を示す.

得られた解は, 非反転対称な軸対称定常解から分岐した解であり, シフト反転対称型の解とは起源が異なることがわかる. この図には, 比較のために図 5 で説明した臨界レイノルズ数 $Re_{c1} = 1206$ で超臨解ホップ分岐で生じるシフト反転型の解も描かれているので, その違いが明らかである.

図 8(b) に, Herrero *et al.* [5] が求めた遷移図を転載した. 彼等の結果によれば, 図中の臨界アスペクト比 $\Gamma_c \sim 0.28$ より小さいアスペクト比では, 反転対称な定常軸対称流からシフト反転対称型の流れに遷移することによって軸対称性が破れ (領域 1 から領域 2 への遷移), $\Gamma_c \sim 0.28$ より大きいアスペクト比では反転対称な定常軸対称流から非反転対称型の非軸対称振動流へ遷移する (領域 1 から領域 3 への遷移). 図 8(b) で, ● と ▲ はそれぞれ本研究で得られたシフト反転対称型の非軸対称解が現れる臨界レイノルズ数と非対称型の非軸対称振動解が現れる臨界レイノルズ数を表している. 本研究の結果は明らかに Herrero *et al.* のものとは異なり, $\Gamma > \Gamma_c$ の領域 ($\Gamma = 0.4$) でも第一次不安定性によってシフト反転対称型の非軸対称流が現れることを示している. また, 非反転対称型の非軸対称解が現れる臨界値も大幅に異なる. これらの結果の相違は現段階では詳しく議論はできないが, Herrero *et al.* は数少ないケースについてのみ計算を行ったため, 計算データの不足により $\Gamma > \Gamma_c$ では, シフト反転対称解の存在を見逃したものと推測する.

5.2 線形安定性解析

前節で数値シミュレーションの結果を紹介し, 反転対称で軸対称な基本流が第一次不安定性によってシフト反転対称型の空間対称性をもつ流れが生じることを説明した. この流れが発生する機構を明らかにするために, 2 円板間中心面に関して反転対称な軸対称定常流を基本流とし, 微小攪乱に対する線形安定性を調べた. 周方向波数 k をもつ攪乱の線形増幅率 λ_k とレイノルズ数 Re の関係を図 9 に示す. この図から基本流は $k = 7$ のモードに対して最

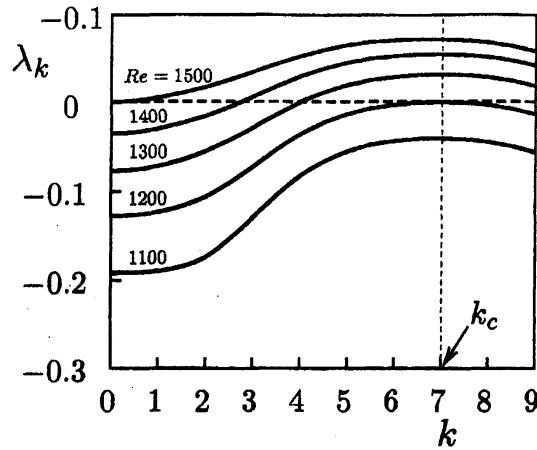


図 9: 線形増幅率 λ_k . $\Gamma = 0.4$.

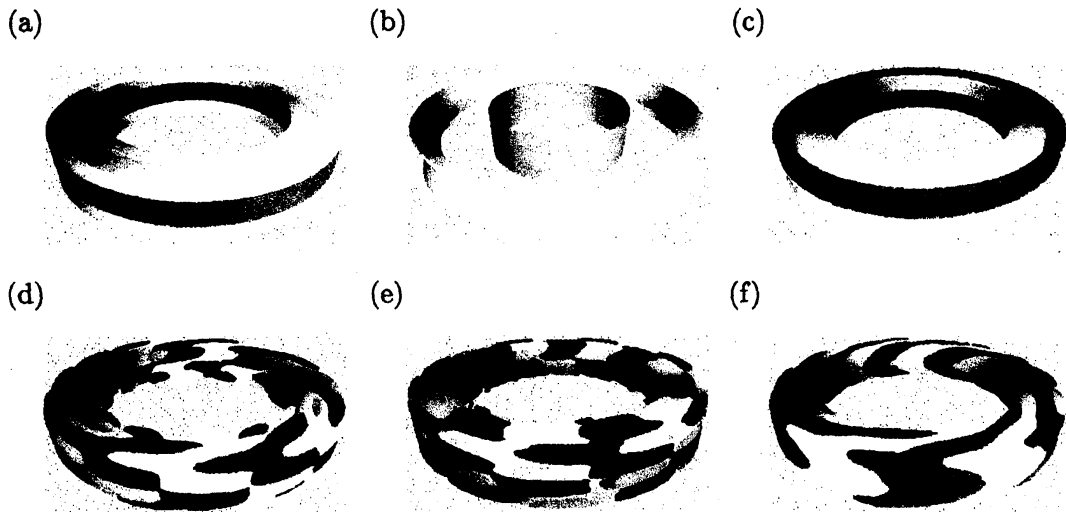


図 10: 基本流および攪乱の流れパターン. $\Gamma = 0.4$. $Re = 1200$. (a) 半径方向速度 (基本流 $u = |0.1 \max[u]|$). (b) 周方向速度 (基本流 $v = 0.5 \max[v]$). (c) 軸方向速度 (基本流 $w = |0.1 \max[w]|$). (d) 半径方向速度 (攪乱 $u' = |0.01|$). (e) 周方向速度 (攪乱 $v' = |0.01|$). (f) 軸方向速度 (攪乱 $w' = |0.01|$). 灰色部分は負の値, 白色部分は正の値を表す.

も不安定であり, 臨界レイノルズ数 Re_c はおよそ 1200 であることがわかる. この結果は数値シミュレーションの場合と非常に良く一致している.

シフト反転対称流が発生する機構について考えるため, レイノルズ数 $Re = 1200$ での基本流とモード $k = 7$ の攪乱の空間構造に着目する. 図 10(a)–10(c) は基本流の各速度成分の等値面, 図 10(d)–10(f) は攪乱の各方向成分の等値面である. 白色で示される部分では各物理量が正の値をもち, 灰色で示される部分では負の値をもつ. これらの図からわかるように, 基本流において, 半径方向および周方向速度分布は 2 円板間中心面に対して対称であり, 軸方向速度の分布は反対称性を示す. 逆に, 攪乱は基本流の空間対称性を破るような構造をもっている.

これらの結果をまとめると, レイノルズ数が増加し, 臨界レイノルズ数を超えると攪乱が成長して, 基本流が不安定化する. このとき成長する攪乱は非軸対称で, なおかつ基本流の 2 円板間中心面に対する対称性を破るような空間構造をもつ. このような特徴を有する攪乱が周方向にその形を保ったまま進行するため, 水平断面内には非軸対称流が現れ, 任意の子

午断面内では時間周期的に振動する流れパターンが発生する。このように、線形安定性解析の結果を用いて、シフト反転対称型の空間対称性をもつ非軸対称流れの発生機構が説明できる。

6 まとめ

本研究の結果から、回転2円板間流れにおいて、アスペクト比 $\Gamma = 0.4$ では第一次不安定性によってシフト反転対称型の空間対称性をもつ非軸対称流が現れ、この流れが発生する機構は線形安定性理論によって説明できる。高レイノルズ数領域においては、非反転対称型の非軸対称振動流が現れ、解の分岐を詳しく調べた結果、シフト反転対称型の非軸対称解と非反転対称型の非軸対称解の発生起源は異なることがわかった。

謝辞

可視化写真の撮影に協力していただいた、本学修士課程の杉原元気、2006年当時の学部学生である柳澤和也、阪中絵莉子の各氏に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Lennemann, E., "Aerodynamic aspects of disk files", *IBM J. Res. Develop.*, Vol. 18, (1974), pp. 480-488.
- [2] Abrahamson, S. D., Eaton, J. K. and Koga, D. J., "The flow between shrouded corotating disks", *Phys. Fluids A*, Vol. 1, (1989), pp. 241-251.
- [3] Schuler, C. A., Usry, W., Weber, B., Humphrey, J. A. C. and Greif, R., "On the flow in the unobstructed space between shrouded corotating disks", *Phys. Fluids A*, Vol. 2, (1990), pp. 1760-1770.
- [4] Humphrey, J. A. C., Schuler, C. A. and Webster, D. R., "Unsteady laminar flow between a pair of disks corotating in a fixed cylindrical enclosure", *Phys. Fluids*, Vol. 7, (1995), pp. 1225-1240.
- [5] Herrero, J., Giralt, F. and Humphrey, J. A. C., "Influence of the geometry on the structure of the flow between a pair of corotating disks", *Phys. Fluids*, Vol. 11, (1999), pp. 88-96.
- [6] Randriamampianina, A., Schiestel, R. and Wilson, M., "Spatio-temporal behaviour in an enclosed corotating disk pair", *J. Fluid Mech.*, Vol. 434, (2001), pp. 39-64.
- [7] Fukagata, K. and Kasagi, N., "Highly energy-conservative finite difference method for the cylindrical coordinate system", *J. Comput. Phys.*, Vol. 181, (2002), pp. 478-498.