

Turning point をもつ線型常微分 方程式について

東工大・理 中野 実

§1. 序.

1° λ が複素数で原点の近傍: $|\lambda| \leq \epsilon$ を動き, ϵ を小さく正のパラメータとして

$$\epsilon^2 y'' + (\lambda^m - \lambda^n \epsilon) y = 0$$

または

$$(1) \quad \epsilon Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^m + \epsilon \lambda^n & 0 \end{bmatrix} Y$$

なる形の方程式について考える. ここに, m と n の間には後述の characteristic polygm が2つの線分から成るという条件

$$(2) \quad m > 2n + 2, \quad n \geq 0$$

が満たれているとする.

2° 一般に

$$(3) \quad \epsilon Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(x, \epsilon) & 0 \end{bmatrix} Y, \quad a(x, \epsilon) \sim \lambda^y + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=n+1r}^{\infty} a_{rk} \lambda^k \epsilon^r \quad (\epsilon \downarrow 0)$$

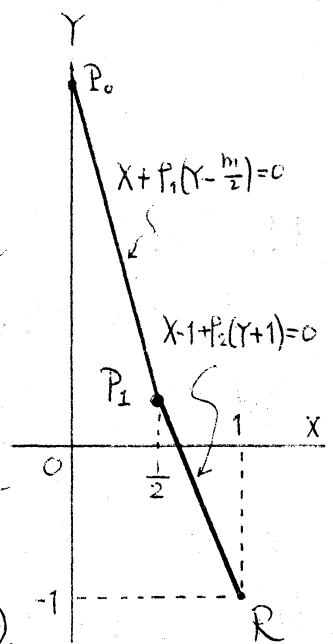
と書いたとき,

$R=(\sigma, -1)$, $P_0=(0, \nu/2)$, $P_r=(\nu/2, m_r/2)$ ($r=1, 2, \dots$)
なる点を直交座標をもつ (X, Y) 平面上にとり、それらを結
ぶ線分の中で最も下側にあるものは下に凸な多角形を作る。
こうしてできた多角形を (3) の characteristic polygon と呼ぶ。

(Iwano-Sibuya [3]). 従って, (1) の
characteristic polygon は右図のようになる。

R と P_0 以外の P_r はすべてこの polygon と
 X 軸の上方にあるから, characteristic polygon
が2つの線分から成るという特徴は $q(x, \varepsilon)$
の初めの2つの項で表現できる。これを
表わすのが不等式 (2) である。

characteristic
polygon が1本の線分の場合と, $n=0, m=3$
の場合は既に出来ている (Nakano-Nishimoto [4]).



3° (1) の係数は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x^m & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x^n & 0 \end{bmatrix}$ とかける。この初め
の項は $x=0$ のとき固有値が同じで, $x \neq 0$ のときには異なる。
このような点を (1) の turning point と呼ぶ。

(1) の解を $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき $|x| \leq c_0$ なる範囲で求めること
が問題であるが, 実際には, 適当な角領域 sector で解の $\varepsilon \rightarrow 0$
のときの漸近性を調べる。 $x=0$ の近くと, $x=0$ から離
れた所では方程式の形が変わってしまうために, 従来の方法
(Hukuhara [2], Turrittin [6]) では求まらない。そこで,

原点の近傍 $|x| \leq c_0$ におけるいくつかの subdomain に分け、各々の domain で (1) を適当な形に変形し解を求め、線型であることを利用した特別な方法、即ち matching method によって与えられた解の間の関係 (matching matrix) を求めよう。

§2. 形式的 reduction.

方程式 (1) を次のように 4 通りに変形する：

$$1^\circ \quad M_1 \varepsilon^{p_1} \leq |x| \leq c_0, \quad p_1 = 1/(m-n) \quad \text{では} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{m/n} \end{bmatrix} Z \quad \text{とおき}$$

$$(4) \quad (x^{-(m-n)} \varepsilon) x^{\frac{m}{2}-n} \frac{dZ}{dx} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + (x^{-(m-n)} \varepsilon) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{m}{2} x^{(m-2n-2)/2} \end{bmatrix} \right\} Z;$$

$$2^\circ \quad c_1 \varepsilon^{p_1} \leq |x| \leq M_1 \varepsilon^{p_1} \quad \text{では} \quad x = \varepsilon^{p_1} t, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{m/2(m-n)} \end{bmatrix} W \quad \text{とおき}$$

$$(5) \quad \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} \frac{dW}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t^n - t^m & 0 \end{bmatrix} W;$$

$$3^\circ \quad M_2 \varepsilon^{p_2} \leq |x| \leq c_1 \varepsilon^{p_1}, \quad p_2 = 1/(n+2) \quad \text{では} \quad x = \varepsilon^{p_2} s, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} x^{1/2} \end{bmatrix} V \quad \text{とおき}$$

$$(6) \quad \left(s^{\frac{(n+2)(m-n)}{m-2n-2}} \varepsilon \right)^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} s \frac{dV}{ds} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-s^{m-n} & 0 \end{bmatrix} + \left(s^{\frac{(n+2)(m-n)}{m-2n-2}} \varepsilon \right)^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2} \end{bmatrix} \right\} V;$$

$$4^\circ \quad |x| \leq M_2 \varepsilon^{p_2} \quad \text{では} \quad x = \varepsilon^{p_2} r, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\frac{n+1}{m+2}} \end{bmatrix} U \quad \text{とおき},$$

$$(7) \quad \frac{dU}{dr} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r^n & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{n+2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -r^m & 0 \end{bmatrix} \right\} U.$$

$\varepsilon = 3$ で、matching するときは、例えば 1° と 2° について

考えると、両者の domain は boundary を共有するだけである。
 2°が1°と点でもおりに overlap してゐると集合が違ふ。
 3°で、2°の domain $C_1 \leq |t| \leq M_1$ へ $0 < |t| < \infty$ なる
 (或る sector) すべて t のために (5) の解を求めなければならない
 ことになる。同様に 2°と 3°は 2°が $0 < |t| < \infty$ となつてゐるの
 で既に overlap してゐるから matching できる。3°と 4°は match-
 ing するために、4°で $0 \leq |r| \leq M_2$ となつてゐるのへ $0 \leq |r| < \infty$
 なる (或る sector の) すべて r のために (7) の解を求めなければならない。
 4°の $r=0$ は turning point $x=0$ に対応してゐるから $x=0$
 での値は 4°から知ることが出来る。

以下では 1°~4°の各々の形式解と 1°と 2°, 2°と 3°, 3°と 4°の
 connection する matching matrices の求め方などについて述べよう。

§3. 形式解.

1° (4)と(6)は2つの形をしてゐる:

$$M \varepsilon^p \leq |x| \leq C$$

なる領域で

$$(8) \quad \lambda x^p \frac{dY}{dx} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f(x) & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g(x) & h(x) \end{bmatrix} \right\} Y = (A_0 + \lambda A_1) Y.$$

$$(4) \text{で} \text{は, } \lambda = x^{-(m-n)} \varepsilon, \quad p = \frac{m}{2} - n, \quad f(x) \equiv -1, \quad g(x) \equiv 1, \quad h(x) = \frac{m-2n-2}{2} x^2$$

$$p = p_1 = \frac{1}{m-n}; \quad (6) \text{ では } \lambda = \left(x^{\frac{(n+2)(m-n)}{m-2n-2}} \varepsilon \right)^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}}, \quad p=1, \\ f(x) = 1-x^{m-n}, \quad g(x) \equiv 0, \quad h(x) \equiv -\frac{n}{2}, \quad p = p_2 - p_1 = \frac{m-2n-2}{(n+2)(m-n)} (>0) \\ \text{となる.}$$

簡単のために

$$(7) \quad 0 < \arg x < \frac{2\pi}{m-n}$$

なる範囲で考えよう.

適当な変換によって (7) にあて (8) の係数を対角化できる. ます $Y = QZ$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{f} & \sqrt{f} \end{bmatrix}$ なる変換を行なうと

$$\lambda x^p \frac{dZ}{dx} = (B_0 + \lambda B_1)Z, \quad B_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{f} & 0 \\ 0 & -\sqrt{f} \end{bmatrix}, \quad B_1 = Q^{-1} A_1 Q - \lambda^p Q^{-1} Q'$$

となる. 更に

$$Z = PV, \quad P = I + \sum_{r=1}^{\infty} P_r(x) \lambda^r, \quad P_r = \begin{bmatrix} 0 & P_r^{11} \\ P_r^{21} & 0 \end{bmatrix}$$

なる形の変換で

$$\lambda x^p \frac{dV}{dx} = C V, \quad C = P^{-1} B P - \lambda x^p P^{-1} P' = \sum_{r=0}^{\infty} C_r(x) \lambda^r$$

と変形する. この際, P を適当に選ぶことにより C を対角化できる;

$$C_0 = B_0, \quad C_1 = \begin{bmatrix} B_1^{11} & 0 \\ 0 & B_1^{22} \end{bmatrix}, \quad \dots; \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -B_1^{21}/2\sqrt{f} \\ B_1^{12}/2\sqrt{f} & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

このようにして, (4) の解は

$$Z(x, \varepsilon) \sim x_0^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{bmatrix} \exp \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\alpha_1 = \int_{x_0}^x \left[\frac{i}{2} x^{\frac{m}{2}} - \frac{i}{2} x^{-\frac{m}{2}+n} \right] dx,$$

(6) の解は

$$V(s, \varepsilon) \sim c_1 s^{-\frac{n}{4}} \begin{bmatrix} (1-s^{m-n})^{-\frac{1}{4}} & -(1-s^{m-n})^{-\frac{1}{4}} \\ (1-s^{m-n})^{\frac{1}{4}} & (1-s^{m-n})^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp \left\{ \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$c_1 = (s_0^n - s_0^m)^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha_3 = \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{m-n}} \int_{s_0}^s \sigma^{\frac{n}{2}} (1-\sigma^{m-n})^{\frac{1}{2}} d\sigma.$$

となる.

2° (5) について全く同様で, $0 < \arg t < \frac{2\pi}{m-n}$ で考え
ると $t^n - t^m = 0$ となる t (secondary turning point) が存
在しちひかる

$$W(t, \varepsilon) \sim c_0 \begin{bmatrix} (t^n - t^m)^{-\frac{1}{4}} & -(t^n - t^m)^{-\frac{1}{4}} \\ (t^n - t^m)^{\frac{1}{4}} & (t^n - t^m)^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp \left\{ \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$c_0 = (t_0^n - t_0^m)^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha_2 = \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{m-n}} \int_{t_0}^t (t^n - t^m)^{\frac{1}{2}} dt.$$

(7) については, これは regular perturbation の形をしてい
るから, leading term のみの方程式の解によって dominate
せしめるであらう. そこで

$$u'' - \gamma^n u = 0$$

なる方程式を考える. この解は変形された Bessel 関数に
よって表現できて, 一次独立の解として

$$\begin{cases} A_n(r) = p r^{\frac{1}{2}} \{I_{-p}(\zeta) - I_p(\zeta)\} \sim \sqrt{\frac{p}{\pi}} \sin p\pi \gamma^{-\frac{n}{4}} e^{-\zeta}, & r \rightarrow \infty, |\arg r| < 3p\pi, \\ B_n(r) = (pr)^{\frac{1}{2}} \{I_{-p}(\zeta) + I_p(\zeta)\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma^{\frac{n}{4}} e^{\zeta}, & r \rightarrow \infty, |\arg r| < p\pi \end{cases}$$

の2つをとることが出来る. 但し, $p = p_2 = \frac{1}{n+2}$, $\zeta = 2pr^{\frac{1}{2}}\gamma$
で, 特に $n=1$ のときは, 良く知られた Airy の場合になる.

従つて (7) の解は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$U(r, \varepsilon) \sim r_0^{\frac{n}{4}} \begin{bmatrix} a r^{-\frac{n}{4}} & c r^{-\frac{n}{4}} \\ b r^{\frac{n}{4}} & d r^{\frac{n}{4}} \end{bmatrix} \exp \left\{ \int_{r_0}^r r^{\frac{n}{2}} dr \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

である。但し, $r_0^{\frac{n}{4}} a = r_0^{\frac{n}{4}} b = 1/\pi$, $\frac{1}{2} r_0^{\frac{n}{4}} c = -r_0^{\frac{n}{4}} d = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sin p\pi$.

3° 以上をもとの変数 x にもとづいて leading term のみを表わす。

$$M_1 \varepsilon^{p_1} \leq |x| \leq C_0, \quad 0 < \arg x < \frac{2\pi}{m-n} \quad \mathcal{Z}^n$$

$$(10) \quad Y(x, \varepsilon) \sim x_0^{\frac{m}{4}} \begin{bmatrix} \bar{x}^{-\frac{m}{4}} & -x^{-\frac{m}{4}} \\ i x^{\frac{m}{4}} & i x^{\frac{m}{4}} \end{bmatrix} \exp \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0);$$

$$0 < |t| < \infty, \quad 0 < \arg t < \frac{2\pi}{m-n} \quad (x = \varepsilon^{p_1} t) \quad \mathcal{Z}^n$$

$$(11) \quad Y(x, \varepsilon) \sim C_0 \varepsilon^{\frac{m}{4(m-n)}} \begin{bmatrix} \bar{x}^{-\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} & -\bar{x}^{-\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} \\ x^{\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} & x^{\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp \left\{ x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0);$$

$$M_2 \varepsilon^{p_2} \leq |x| \leq C_1 \varepsilon^{p_1}, \quad 0 < \arg x < \frac{2\pi}{m-n} \quad \mathcal{Z}^n$$

$$(12) \quad Y(x, \varepsilon) \sim C_1 \varepsilon^{\frac{1}{4(m-n)}} \begin{bmatrix} \bar{x}^{-\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} & -\bar{x}^{-\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} \\ x^{\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} & x^{\frac{n}{4}} (\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0);$$

$$0 \leq |r| < \infty, \quad 0 < \arg r < \frac{\pi}{m-n} \left(< \frac{\pi}{11+2} \right) \quad (x = \varepsilon^{p_2} r) \quad \mathcal{Z}^n$$

$$(13) \quad Y(x, \varepsilon) \sim x_1^{\frac{n}{4}} \begin{bmatrix} a \bar{x}^{-\frac{n}{4}} & c \bar{x}^{-\frac{n}{4}} \\ b x^{\frac{n}{4}} & d x^{\frac{n}{4}} \end{bmatrix} \exp \left\{ x_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty),$$

$$r_0 = x_1 \varepsilon^{-\frac{1}{m-2}}$$

である。

それゆゑの積分路は収束するよりにとる。 則ちば(10)において
 $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{m+2} i x^{\frac{m+2}{2}}\right) \geq 0$ or ≤ 0 なるよりには定む。こ
 ろからすることにより、形式解が真の解の漸近展開になつてゐる
 ことも証明できる。

§4. 形式解の漸近性.

前節の積分路のとり方についてさらに詳しく述べよう。

1° (5)の形をした正の小さなパラメーター ε を含む微分
 方程式

$$(14) \quad x y'' - f(t) y = 0$$

について考える。

$f(t)$ の零点を(14)の turning point といい、零点の重複度を
 turning point の order といい。直交座標 $(\operatorname{Re} t, \operatorname{Im} t)$ をもつ
 t -平面において1つの turning point をかす出る曲線

$$(15) \quad \operatorname{Re} \xi(t_0, t) = 0,$$

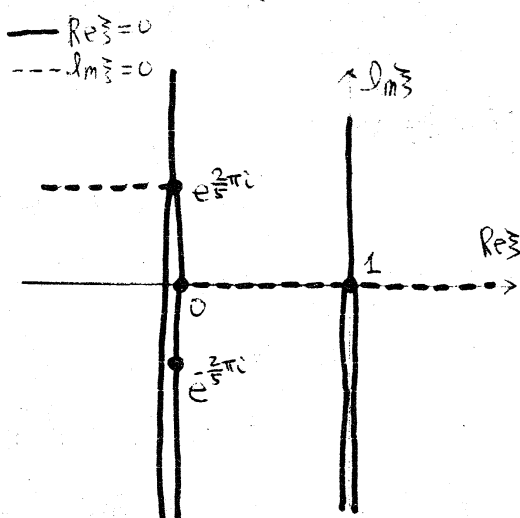
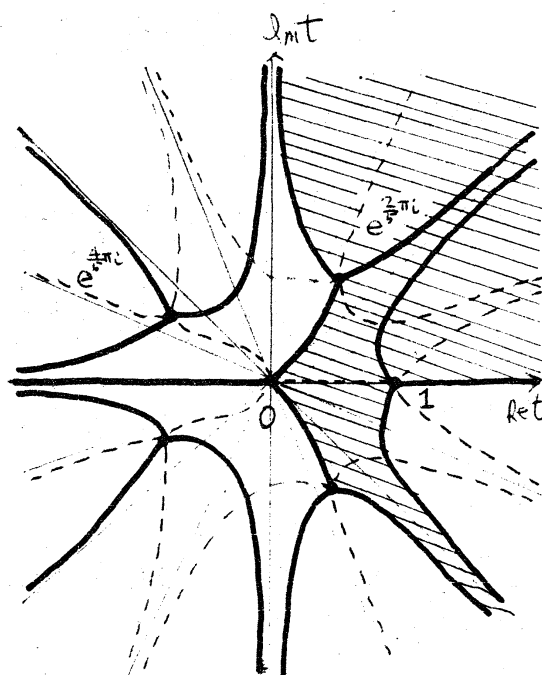
$$(16) \quad \xi(t_0, t) = \int_{t_0}^t f(t)^{1/2} dt$$

を(14)の Stokes curves といい。order m の turning point
 かすは $m+2$ 本の Stokes curves が $2\pi/(m+2)$ の角度で出る。

(16) によつて定義される t -平面から ξ -平面への写像によつて
 t -平面における Stokes curves によつて囲まれた無限領域が
 ξ -平面全体に一対一に写されるとき、この無限領域を(14)の

canonical region と呼ぶ. $f^{1/2}$ の branch のとり方 により canonical region の z -平面における像は二通りあるので branch のとり方を予め決めておけばよい. (16) の右辺は一般には積分不可能なので, canonical region を描くとは正確には不可能と思われるが, 例として $f(t) = t - t^6$ ($n=1, m=6$ の場合) に一つの canonical region を描くと右図の形になる.

また z -平面においてはその下の図の形になる. 従って下図をみると $\text{Re } z \geq 0$ なる道 (曲線) を選ぶことは容易である. この道の (16) による逆像が z -平面における $\text{Re } S + \frac{1}{2} \geq 0$ なる積分路である. $\text{Re } z \leq 0$ の場合も全く同様である. 一般の $f(t)$ についても同様に考えることは類推できる.



2° 次に形変解が canonical region における真の解の漸近展開になっていることを示そう.

canonical region $\mathcal{D}$ の boundary の δ -近傍をとり除いた領域を $\mathcal{D}_\delta$.

とするとき, D_δ のすべての t に対して $\lambda \rightarrow 0$ のとき (5) は次の漸近展開をもつ:

$$\begin{cases} w(t, \lambda) = f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \{1 + o(\lambda)\}, \\ w'(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \{1 + o(\lambda)\}. \end{cases}$$

これを表すためには, まず (5) を

$$W = f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} R S \Phi, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{f} & \sqrt{f} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \lambda$$

で変換すると

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left\{ \frac{\sqrt{f}}{\lambda} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha - \beta & \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \lambda \right\} \Phi,$$

$$\alpha = \frac{1}{32} p'^2 p^{-\frac{5}{2}}, \quad \beta = \frac{1}{8} (p' p^{-\frac{3}{2}})' = \frac{1}{8} p'' p^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{16} p'^2 p^{-\frac{5}{2}}$$

となる. これは $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$ とおくと次の積分不等式と同等である.

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \lambda \int_a^t \{ \alpha(z) \varphi_1(z) - \beta(z) \varphi_2(z) \} \exp \left\{ \frac{2}{\lambda} \int_s^t f^{\frac{1}{2}} dt \right\} dz, \\ \varphi_2(t) = 1 + \int_a^t \{ \beta(z) \varphi_1(z) - \alpha(z) \varphi_2(z) \} dz. \end{cases}$$

積分路 γ は

$$\operatorname{Re} \int_\gamma f^{\frac{1}{2}} dt \leq 0$$

なる γ にとりたう. $\Sigma = \{ z \in \text{canonical region } D \mid$
 $z \text{ はこれに可能である. } \pm \text{ の積分方程式を}$

$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi, \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とおく. Φ は逐次近似法で解く.

$$\Phi^{(0)} = \Phi_0, \quad \Phi^{(n)} = \lambda^n \Phi_0 = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{cases} \varphi_1^{(0)} = 0 \\ \varphi_2^{(0)} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_1^{(n+1)} = \lambda \int_0^1 (\alpha \varphi_1^{(n)} - \beta \varphi_2^{(n)}) \exp\left\{\frac{2}{\lambda} \int_0^t F(\alpha t)\right\} d\alpha \\ \varphi_2^{(n+1)} = \lambda \int_0^1 (\beta \varphi_1^{(n)} - \alpha \varphi_2^{(n)}) d\alpha \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

そこで

$$\psi(t) = \int_0^1 (|\alpha| + |\beta|) |d\alpha|$$

は $|\alpha|, |\beta| = O(t^{-\frac{n}{2}-2})$ ($t \rightarrow \infty$) であるから L_0 で有界である。

従って

$$\psi_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi(t)|$$

が定まる。このとき、次の不等式が成り立つことがわかる。

$$|\varphi_j^{(n)}| \leq |2\psi_0 \lambda|^n \quad (n=0, 1, 2, \dots; j=1, 2).$$

$n=0$ のときは明らかである。一般の場合には n に対して成り立つとすると

$$\begin{aligned} |\varphi_1^{(n+1)}| &\leq \lambda \int_0^1 |\alpha \varphi_1^{(n)} - \beta \varphi_2^{(n)}| |d\alpha| \leq \lambda \int_0^1 (|\alpha| + |\beta|) (|\varphi_1^{(n)}| + |\varphi_2^{(n)}|) |d\alpha| \\ &\leq |2\psi_0 \lambda|^{n+1} \end{aligned}$$

となり証明ができた。 $\varphi_2^{(n)}$ についても全く同様である。

このことから、 $\lambda \in \mathbb{R}$ 充分小とすると ($\lambda \leq \lambda_0$) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |2\psi_0 \lambda|^n \quad \text{は収束}$$

して

$$|\varphi_j| \leq 2 \quad (j=1, 2)$$

が成立する。更に

$$|\varphi_1|, |\varphi_2 - 1| \leq 4\psi\lambda$$

が成り立つことも積分方程式からわかる。

上の3つの不等式から目的の漸近性が言える。なぜならば

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} R S \Phi \\ &= f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \begin{bmatrix} (1+\beta\lambda)\varphi_1 + (-1+\beta\lambda)\varphi_2 \\ f^{\frac{1}{2}} \{(1-\beta\lambda)\varphi_1 + (1+\beta\lambda)\varphi_2\} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$W = W_1, W'_1 = \frac{1}{\lambda} W_2$$

から,

$$\begin{aligned} W = W_1 &= f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \{\varphi_1 - \varphi_2 + \beta\lambda(\varphi_1 + \varphi_2)\} \\ &= f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \{-1 + \varphi_1 - (\varphi_2 - 1) + \beta\lambda(\varphi_1 + \varphi_2)\}. \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} |W + f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| &\leq |f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \{|\varphi_1| + |\varphi_2 - 1| + |\beta|\lambda(|\varphi_1| + |\varphi_2|)\} \\ &\leq |f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \cdot 4(2\psi + |\beta|)\lambda \end{aligned}$$

を得る。また

$$\begin{aligned} W_2 &= f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \{\varphi_1 + \varphi_2 + \beta\lambda(\varphi_2 - \varphi_1)\} \\ &= f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \{1 + \varphi_1 + (\varphi_2 - 1) + \beta\lambda(\varphi_2 - \varphi_1)\} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} |W_2 - f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| &\leq |f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \{|\varphi_1| + |\varphi_2 - 1| + |\beta|\lambda(|\varphi_1| + |\varphi_2|)\} \\ &\leq |f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \cdot 4(2\psi + |\beta|)\lambda \end{aligned}$$

となる。

上の証明において, $4(2\psi + |\beta|)\lambda$ は $\lambda \geq \lambda_0$ と $t \in \mathbb{D}_0$ に対し $t \rightarrow \infty$ とするとき 0 に近づくから,

$\operatorname{Re} \alpha_2 \rightarrow +\infty$ となるおりに α で $t \rightarrow \infty$ とすると, すなわちの $\lambda (\leq \lambda_0)$ に対して

$$\begin{cases} w \sim -f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \\ w' \sim \frac{1}{\lambda} f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \end{cases}$$

となることもわかる. もう一つの exponential type も同様である.

§5. Matching matrices.

次に, 今まで求めた二つの解の間の関係, i.e., matching matrix を求めよう.

1° まず (10) と (11) を matching しよう.

$$E_i = \exp\{\alpha_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}, \quad F_i = \begin{bmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

とすると, (10), (11) の解は各々 $F_1 E_1, F_2 E_2$ の形で表している.

従って両者の間には α に関係ない行列 M_{12} により

$$F_1 E_1 = F_2 E_2 \cdot M_{12}$$

なる関係で結ばれるはずである. この M_{12} を (10) と (11) を connection (or matching) の matching matrix と呼ぶ.

α と t は

$$(17) \quad \alpha_\eta = \eta \varepsilon^{\frac{p_1}{2}}, \quad t_\eta = \eta \varepsilon^{-\frac{p_1}{2}}$$

ととる. ことに, η は新しい parameter で $|\eta| = 1$ なる複素数で, $\arg \eta$ は解の積分路に関係するおりにとる. このおりに α_η と t_η を選ぶと, 十分小さな ε に対して α_η は

$M_1 \varepsilon^{\frac{1}{4}} \leq |\chi| \leq c_0 \eta$, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $t_n \rightarrow \infty$ とする.

2° 上式を

$$(18) \quad F_2^{-1} F_1 = E_2 M_{12} E_1^{-1}$$

と書き直し, 両辺を成分で表わして, (17) の関係式を代入する.

$$(18) \quad \frac{1}{\det F_2} \begin{bmatrix} a_1 d_2 - c_1 b_2 & b_1 d_2 - d_1 b_2 \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 & d_1 a_2 - b_1 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} e^{\alpha_2 - \alpha_1} & m_{12} e^{\alpha_2 + \alpha_1} \\ m_{21} e^{-\alpha_2 - \alpha_1} & m_{22} e^{-\alpha_2 + \alpha_1} \end{bmatrix}.$$

この左辺は,

$$\begin{aligned} a_1 d_2 - c_1 b_2 &= 2 \chi_0^{\frac{m}{2}} \chi^{\frac{n-m}{4}} (\varepsilon - \chi^{m-n})^{\frac{1}{4}} \\ &= 2 e^{\frac{\pi}{4} i} \eta^{\frac{n-m}{4}} \varepsilon^{-\frac{1}{8}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{8}} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \eta^{m-n})^{\frac{1}{4}} \\ &\sim 2 e^{\frac{\pi}{2} i} \chi_0^{\frac{m}{2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ b_1 d_2 - d_1 b_2 \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} d_1 a_2 - b_1 c_2 &= 2i \chi_0^{\frac{m}{4}} \chi^{\frac{m-n}{4}} (\varepsilon - \chi^{m-n})^{\frac{1}{4}} \\ &\sim 2 e^{\frac{\pi}{2} i} \chi_0^{\frac{m}{2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

$$\det F_2 = 2 \chi_0^{\frac{m}{2}} e^{\frac{\pi}{2} i}$$

であるから

$$F_2^{-1} F_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{as } \varepsilon \rightarrow 0)$$

となる.

ここで右辺に t は $t_0 = O(\varepsilon^{\frac{1}{2(m-n)}})$ と $t_3 = \varepsilon$ により,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + O(t^{2n - \frac{3}{2}m+1}) \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} + O(t^{2n - \frac{3}{2}m+1}) \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{2(m-n)}}$$

とわかる,

$$\pm(\alpha_1 + \alpha_2) = \pm 2\alpha_1 + O(\varepsilon^{\frac{m+2}{4(m-n)}}),$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \end{array} \right\} = O(\varepsilon^{\frac{m+2}{4(m-n)}})$$

である. さて, 積分路は $\operatorname{Re} \alpha_1 \geq 0$ or ≤ 0 なるように二通りとっており, matching matrix M_{12} は $\varepsilon \rightarrow 0$ に関係なく $\varepsilon \rightarrow 0$ の積分路の向きに (二通り) とければ,

$$\pm \operatorname{Re}(\alpha_1 + \alpha_2) \rightarrow +\infty$$

とわかる,

$$|e^{\pm(\alpha_1 + \alpha_2)}| \rightarrow +\infty.$$

また $\alpha_1 - \alpha_2 \rightarrow 0$ (as $\varepsilon \rightarrow 0$) である

$$e^{\pm(\alpha_1 - \alpha_2)} \sim 1$$

となる.

以上のことから, 右辺は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき

$$E_2 M_{12} E_1^{-1} \sim \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} e^{2\alpha_1} \\ m_{21} e^{-2\alpha_1} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad e^{t 2\alpha_1} \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0)$$

となる.

従って

$$M_{12} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\varepsilon \rightarrow 0)$$

である.

3° (12)と(13)の matching もほぼ同様に行われる. 即ち,

$$\begin{aligned}
s_\eta &= \eta \varepsilon^{\frac{p_2 - p_1}{2}} \quad (\rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0), \\
r_\eta &= \eta \varepsilon^{\frac{p_1 - p_2}{2}} \quad (\rightarrow \infty \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0), \\
x_\eta &= \varepsilon^{p_1} s_\eta = \varepsilon^{p_2} r_\eta = \eta \varepsilon^{\frac{p_1 + p_2}{2}}
\end{aligned}$$

ととることにあり, (18) に相等する式の計算すればよい。
勿論, 二つの η は前の η とは異なるが, 同じ性質をもつもの
である。

$$M_{34} \sim \frac{M^{\frac{m-n}{2}} e^{\frac{\pi}{2}i}}{ad-bc} \begin{bmatrix} b+d & 0 \\ 0 & a-c \end{bmatrix} \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{n+2}} \quad (\text{as } \varepsilon \rightarrow 0),$$

ただし, $x_1 = O(\varepsilon^{\frac{1}{n+2}}) = M \varepsilon^{\frac{1}{n+2}}$, $r_0 = M$ にとる。

4° (11) と (12) についても

$$x_\eta = \eta \varepsilon^{\frac{p_1 + p_2}{2}}, \quad t_\eta = s_\eta = \eta \varepsilon^{\frac{p_2 - p_1}{2}}$$

ととる matching する。 $x_0 = \varepsilon^{\frac{1}{2(m-n)}}$, $x_1 = M \varepsilon^{\frac{1}{n+2}}$ とし
たかす = 4.3 に各々対応する点は $t_0 = \varepsilon^{-\frac{1}{2(m-n)}}$, $s_0 = \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{(n+2)(m-n)}}$
である。 したがって

$$M_{23} \sim M^{-\frac{m}{4}} \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{bmatrix} \varepsilon^{\frac{m(-2m+3n+2)}{8(m-n)(n+2)}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

である。 $\alpha = \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} \int_{s_0}^{t_0} (\tau^n - \tau^m)^{1/2} d\tau$ 。

以上から (1) の解の漸近的性質が $0 < \arg x < \frac{\pi}{m-n}$ なる角
領域でいえたことになる。

参 考 文 献

- [1] Evgrafov, E.M., and M.V. Fedoryuk, Asymptotic behavior as $\lambda \rightarrow \infty$ of the solution of the equation $w''(z) - p(z, \lambda)w(z) = 0$ in the complex z -plane. Russian Math. Surveys. 21(1966), 1-48.
- [2] Hukuhara, M., Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre. Mem. Fac. Eng. Kyushu Imp. Univ. 8(1937), 249-280.
- [3] Iwano, M., and Y. Sibuya, Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter, Kōdai Math. Sem. Rep. 15(1963), 1-28.
- [4] Nakano, M. and T. Nishimoto, On a secondary turning point problem. Ibid. 22(1970), 355-384.
- [5] Swanson, S.A. and V.B. Headley, An extension of Airy's equation. SIAM J. Appl. Math. 15(1967), 1400-1412.
- [6] Tarrittin, H.L., Asymptotic expansions of solutions of system of ordinary differential equations, Contributions to the theory of non-linear oscillations II, Ann. of Math. Studies No. 29, 81-116.
- [7] Wasow, W., A turning point problem for a system of two linear differential equations J. Math. and Phys. 38(1959), 257-278.