

非コンパクト型対称空間上の Laplacian の 複素化 について

名大 理学部 浦川 肇

G を非コンパクト 連結半単純 Lie 群 ($\text{center} < \infty$), K を G の極大コンパクト群とす. 非コンパクト型の対称空間 G/K を考える. この時, Eguchi-Okamoto [1] により, G/K 上の急減少関数に対する Fourier 変換 について, その Plancherel の定理, 逆 Fourier 変換公式 及びその Fourier 像の特徴づけが得られた.

我々は, この結果を用いることにより, G/K 上の Laplacian D の複素化 D^s ($s \in \mathbb{C}$) を定義し, その kernel を調べることを試みる.

まず Eguchi-Okamoto の結果を述べよう:

$\mathcal{C}(G/K)$: G/K 上の急減少関数の作る空間 とする. $f \in \mathcal{C}(G/K)$ に対し, Fourier 変換 $\tilde{f}(\lambda, kM)$, $\lambda \in \sigma^*$, $k \in K$ を,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda, kM) &:= \int_{AN} f(kan) e^{(-i\lambda + \rho)(\log a)} da \, dn \\ &= \int_{G/K} f(g) e^{-(-i\lambda + \rho)(H(g^{-1}k))} dg_K \end{aligned}$$

と定義する。ここで、 σ^* , A , N は G の Iwasawa 分解
 $G = KAN$ とし、 σ は A の Lie 環、 σ^* は σ の dual
space である。 M は σ の K における centralizer である。

この時、

$$(i) \int_G |f(g)|^2 dg = \frac{1}{w} \int_{\sigma^* \times K/M} |\tilde{f}(\lambda, kM)|^2 |c(\lambda)|^{-2} dk_M d\lambda$$

$$(ii) f(g) = \frac{1}{w} \int_{\sigma^* \times K/M} \tilde{f}(\lambda, kM) e^{-(i\lambda + \rho)(H(g^{-1}k))} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda dk_M$$

が成り立つ。ここで、 $g \in G$ に對して、 $G = KAN$ に對して、 $g =$
 $K(g) \exp H(g) n(g)$ と分解し、 $c(\lambda)$ は Harish-Chandra による
 C -function である。 w は $W = M'/M$ の元の個数 (M' は σ の K の正規化群)
更に、 $\sigma^* \times K/M$ 上の急減少関数の作る空間を $\mathcal{C}(\sigma^* \times K/M)$
とし、 $\mathcal{C}(\sigma^* \times K/M)$ の元 ϕ で、任意の $g \in G$, $s \in W$, $\lambda \in \sigma^*$ に對し、

$$\int_{K/M} e^{-(is\lambda + \rho)(H(g^{-1}k))} \phi(s\lambda, kM) dk_M = \int_{K/M} e^{-(i\lambda + \rho)(H(g^{-1}k))} \phi(\lambda, kM) dk_M$$

を満すものの全体を $\mathcal{C}(\sigma^* \times K/M)_W$ とする。

この時、

(iii) $f \mapsto \tilde{f}$ は $\mathcal{C}(G/K)$ から $\mathcal{C}(\sigma^* \times K/M)_W$ の上への
isomorphism となる。

さて、我々は、 $D(G/K) : G/K$ 上の G -不変微分作用素とした時、 $D(G/K)$ の元 D で、次のような条件を満たすものを考える：

一般に、 $D \in D(G/K)$ に対して、

$$D_g \left(e^{-i\lambda + \rho(H(g^{-1}k))} \right) = \Gamma(D)(i\lambda) e^{-i\lambda + \rho(H(g^{-1}k))}$$

$$\lambda \in \sigma^*, \quad k \in K$$

ここで、 $\Gamma(D)(i\lambda)$ は、 W -不変な σ^* 上の複素係数の多項式の $i\lambda$ での値をとらせたものであるが、この $\Gamma(D)$ に次の仮定をおく。

仮定

$$(I) \quad \forall \lambda \in \sigma^* ; \quad \Gamma(D)(i\lambda) \in \mathbb{R}.$$

更に、 $\Gamma(D)$ を、 $2m$ 次の多項式とし、

$$\Gamma(D) = \sum_{k=0}^{2m} q_k \quad q_k : k\text{-次の多項式 (実係数)}$$

と書いた時、

$$(II) \quad \exists d > 0 ; \quad -a_{2m}(i\lambda) > d |\lambda|^{2m} \quad (\lambda \in \sigma^*)$$

$$(III) \quad \exists c > 0 ; \quad -\Gamma(D)(i\lambda) \geq c \quad (\quad)$$

を満たすものとする。例えば、Laplace-Beltrami 作用素 Δ の

$$\text{時は、} \quad \Gamma(\Delta)(i\lambda) = -(|\lambda|^2 + |\rho|^2), \quad \lambda \in \sigma^*$$

(ここで ρ は、正の restricted root の和の半分) となる。

あり、上の仮定 (I)~(III) を満たしている。

以下は、このような D についてのみ考えることにする。

補題 任意の $t > 0$ に対し.

$e^{tP(D)(i\lambda)}$ は W -不変な Ω^* 上の急減少関数である.

従って, Gangolli [2] のように

$$G_t^*(g) = \frac{1}{w} \int_{\Omega^*} e^{tP(D)(i\lambda)} \phi_\lambda(g) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

によって, 両側 K -不変な G 上の急減少関数を与えることができる.

そこで, $\phi_{-\lambda}(g) = \int_K e^{-i\lambda + P(H(gk))} dk$ である. この時,

命題 1

G_t^* は, 方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Du$ の基本解である:

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial t} G_t^* = D_g G_t^*$$

$$(ii) \quad G_t^* * G_s^* = G_{t+s}^*$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \int_G G_t^*(x^{-1}y) f(y) dy = f(x), \quad x \in G, f \in C_c^\infty(G/K)$$

$$(iv) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \int_G |f(x) - \int_G G_t^*(x^{-1}y) f(y) dy|^2 dx = 0, \quad f \in L^2(G/K)$$

が成り立つ。

そこで, 我々は, $\alpha \in \mathbb{Q}$ に対し,

$$K^\alpha(g) := \int_0^\infty t^{-\alpha-1} G_t^*(g) dt, \quad g \in G$$

を、右辺の積分が存在するならば、考えることにする。この時次のことが言える。

命題 2 $n := \dim G/K$ とある。この時、

$\operatorname{Re} \alpha < -\frac{n}{2m}$ ならば、 $K^\alpha(g)$ を定義する積分は絶対収束し、かつ $K^\alpha \in L^2(G/K) \cap C^\infty(G/K)$ が成立。

$$\begin{aligned} \text{これは、} |\phi_\lambda(g)| &\leq \int_K |e^{-(i\lambda + \rho)H(gk)}| dk = \int_K e^{-\rho(H(gk))} dk (=:\Xi(g)) \neq 0. \\ |G^\dagger(g)| &\leq \frac{1}{\omega} \Xi(g) \int_{\mathfrak{o}^*} e^{2t \Gamma(\mathfrak{D})(i\lambda)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \quad (*) \end{aligned}$$

Helgason [4] によれば、 $\exists m_0 > 0$ 整数、

$$|c(\lambda)|^{-2} \leq M (1 + |\lambda|^2)^{m_0} \quad (\lambda \in \mathfrak{o}^*) \text{ for some } M > 0$$

が言えているので、 $\operatorname{Re} \alpha < -\frac{m_0 + l}{2m}$ ($l = \dim \mathfrak{o}$) ならば、 $K^\alpha(g)$ の積分の絶対収束性可言。更に命題のように言うには、Gindikin [3] で得られた、 $c(\lambda)$ の精密な形を用いて計算を実行しなければならぬ。 $K^\alpha \in L^2(G/K)$ については、Plancherel の定理を、

$$\|G^\dagger\|_{L^2(G)}^2 = \frac{1}{\omega} \int_{\mathfrak{o}^*} e^{2t \Gamma(\mathfrak{D})(i\lambda)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

を用いて、上と同様に、 $\int_0^\infty t^{-\alpha-1} \|G^\dagger\|_{L^2(G)} dt < \infty$ 。このことと Schwarz の不等式、 $\int_G G^\dagger(g) \overline{G^S(g)} dg \leq \|G^\dagger\|_{L^2(G)} \|G^S\|_{L^2(G)}$ を用いることに、 $K^\alpha \in L^2(G/K)$ と言える。

この命題 2 を用いて、Riesz potential を、

定義 $\operatorname{Re} \alpha < -\frac{n}{2m}$ の時、

$$I^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_G K^\alpha(x^{-1}y) f(y) dy = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} (f * \check{K}^\alpha)(x), \quad \check{K}^\alpha(x) := K^\alpha(x^{-1})$$

と定義する。命題 2 より、 $f \in L^1(G)$ に対して $I^\alpha f$ は定義できる。
後で述べることを用いて、 I^α なる作用素は、 $L^2(G/K)$ 上の有界作用素となることがわかる。

命題 3 $\operatorname{Re} \alpha < -\frac{n}{2m}$ の時、 $f, \varphi \in \mathcal{C}(G/K)$ に対して、

$$(i) \int_G \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} k^\alpha(g) \overline{\varphi(g)} dg = \frac{1}{w} \int_{\sigma^* \times K/H} (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha \overline{\tilde{\varphi}(\lambda, kH)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda dk_H$$

$$(ii) \int_G I^\alpha f(g) \overline{\varphi(g)} dg = \frac{1}{w} \int_{\sigma^* \times K/H} (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha \tilde{f}(\lambda, kH) \overline{\tilde{\varphi}(\lambda, kH)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda dk_H$$

が成り立つ。

この結果と、Eguchi-Okamotoの結果を用いて、次のことが言える。

定理 1 $\operatorname{Re} \alpha < -\frac{n}{2m}$ の時、

$$f \in \mathcal{C}(G/K) \Rightarrow I^\alpha f \in \mathcal{C}(G/K) \quad \text{かつ}$$

$$(I^\alpha f)^\sim(\lambda, kH) = (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha \tilde{f}(\lambda, kH)$$

が成り立つ。

定理 2 $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re}(\alpha+\beta) < -\frac{n}{2m}$ の時、

$$I^\alpha(I^\beta f) = I^\beta(I^\alpha f) = I^{\alpha+\beta} f,$$

$$D(I^\alpha f) = I^\alpha(Df) \quad \text{for } f \in \mathcal{C}(G/K)$$

が成り立ち. 特に, $\operatorname{Re}(\alpha+1) < -\frac{n}{2m}$ ならば,

$$D(I^\alpha f) = I^\alpha(Df) = -I^{\alpha+1}f, \quad f \in \mathcal{C}(G/K)$$

となる.

そこで, 改めて, $(-D)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, 次のように定義する.

定義 $f \in \mathcal{C}(G/K)$ に対して,

$$(i) \quad (-D)^\alpha f := I^\alpha f \quad \left(\operatorname{Re} \alpha < -\frac{n}{2m} \right)$$

$$(ii) \quad (-D)^\alpha f := (-D)^k I^{\alpha-k} f \quad (\text{そうでない時})$$

ただし, $k > 0$ integer, $-\frac{n}{2m} - 1 < \operatorname{Re} \alpha - k < -\frac{n}{2m}$ とする.

この時, 定理 1.2 より, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して,

$$f \in \mathcal{C}(G/K) \Rightarrow (-D)^\alpha f \in \mathcal{C}(G/K) \quad \text{かつ}$$

$$((-D)^\alpha f)^\sim(\lambda, kM) = (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha \tilde{f}(\lambda, kM)$$

となり, 従って,

$$(-D)^\alpha (-D)^\beta = (-D)^{\alpha+\beta}, \quad (-D)^1 = -D, \quad (-D)^0 = I$$

が, $\mathcal{C}(G/K)$ 上で成り立ち. (ここで, I : identity operator)

任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(-D)^\alpha : \mathcal{C}(G/K) \rightarrow \mathcal{C}(G/K) \quad \text{isomorphism}$$

が成り立つことがわかる.

References

- [1] Eguchi-Okamoto; The Fourier transform of the Schwartz space of a symmetric space
- [2] Gangolli; Asymptotic behavior of spectra of compact quotients of certain symmetric space, Acta Math. 121 (1968) 151~192
- [3] Gindikin-Karpelevič; Plancherel measure of Riemannian symmetric space of non-positive curvature, Sov. Math 3 (1962) 962~965
- [4] Helgason; Fundamental solutions of invariant diff. op. on symmetric spaces, Amer. J. Math. 86 (1964) 565~601
- [5] ———; The surjectivity of invariant diff. op. on symmetric spaces I, Ann of Math. (1973) 451~479
- [6] 牟田洋一; 一般 Lorentz 群の調和解析,
数理研究録 82, 119~140
- [7] Seeley; Complex powers of an elliptic operator,
"Singular integral", Amer. Math. Soc. (1967)
- [8] E.M. Stein; Singular integrals and Differentiability properties of functions, Princeton, (1970)
- [9] Kotake-Narasimhan; Regularity theorems for fractional powers of a linear operator, Bull. S.M. France, 90 (1962) 449~471