

Fusion 代数と 3 次元多様体の位相不変量

河野俊丈 (東大数理)

1. はじめに

このノートの目的は, Witten によって提唱された, 3 次元多様体の位相不変量に関して, その組合せ論的側面を解説することである. 周知のように, Witten の定義は Chern-Simons gauge 理論に基づく intrinsic なものであるが, この幾何学的な定義については現在でも十分にくみつくされているとはいえない. Witten の発見の後になされたいくつかの定義は, 概して代数的なものである. ([RT], [KM], [Ko] など). Witten のアイデアが素直に実現されるような幾何学的基礎はまだ構築されてはいないが, これらの定義がなされる過程においていくつかの点があきらかにされてきた. すなわち, 共形場理論における非可換 tensor category の構造, 組ひも群およびリーマン面の写像類群の conformal block の空間への作用, fusion algebra と量子群の 1 のベキ根における表現, Verlinde identity との関係などである. また, モジュラー群のアフィンリー環の指標への作用が, 位相不変性の証明の重要なキーであることも認識されてきた. ここでは, $sl(n, \mathbb{C})$ に付随した不変量を扱う. $n = 2$ の場合は, [KM] などに詳しく述べられているが, 一般の n については, 計算のアルゴリズムにふれた文献は少なく, また応用面の研究も十分とはいえない. ここでは, 特に $n = 3$ の場合に重点をおいて, 技術的な側面もふくめて不変量を計算するメカニズムを解説する.

2. Fusion 代数と Verlinde 等式

ルート系の記号など

A 型リー環 $sl(n, \mathbb{C})$ について, ルート系などに関連した基本的な記号

を整理しておこう。ここで用いるのは、ごく標準的な内容だけであるが、詳細は、[FH],[H]などの教科書を参照されたい。 $sl(n, \mathbb{C})$ は、 n 次複素正方行列でトレースが0になるもの全体のなすリー環である。 $sl(n, \mathbb{C})$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ を対角行列全体として固定する。一般に n 次の対角行列に対して、その i 番目の成分を対応させる写像を ϵ_i であらわす。

$sl(n, \mathbb{C})$ のルート全体の集合は

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_j ; 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

で与えられる。

$$\Delta_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j ; 1 \leq i < j \leq n\}$$

の元は、正のルートとよばれる。

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

は、ベクトル空間 $\mathfrak{h}^*$ の基底となる。これらは、ルートの基本系とよばれる。

$$Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_{n-1}$$

を root lattice とよぶ。リー環の Cartan-Killing form から自然に導かれるように

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}$$

によって、内積をいれると

$$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2, \quad \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = -1, \quad \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \quad |i - j| > 1$$

が成立している。

$$\Lambda_i = (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_i) - \frac{i}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i$$

とおくと、これらは、 $\langle \Lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ を満たしている。

$$P = \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\Lambda_{n-1}$$

とおき、これを weight lattice とよぶ。

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \alpha, \lambda \rangle \alpha, \quad \alpha \in \Delta, \quad \lambda \in P$$

により、鏡映変換が P に作用する。鏡映変換 s_{α_i} , $1 \leq i \leq n-1$ はワイエル群 W を生成し、これは、 n 次対称群と同型である。

$$P_+(n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Lambda_i ; a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_i \geq 0 \right\}$$

とおく. $P_+(n)$ の元は, dominant integral weight とよばれる. $\lambda \in P_+(n)$ は

$$\langle \lambda, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}, \quad \langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

という性質によって特徴づけられる.

正のルートの和の半分を ρ とおく. すなわち

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha.$$

これは

$$\rho = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_{n-1}$$

とも表される.

上に説明した記号を $sl(3, \mathbb{C})$ の場合に図示したのが図 2.1 である.

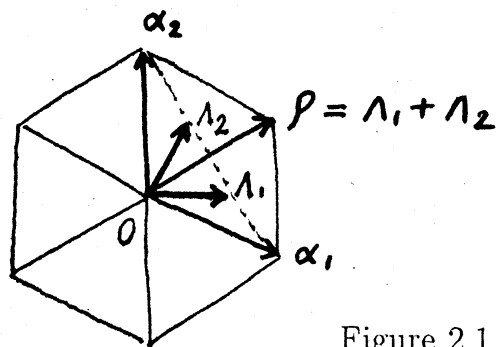


Figure 2.1

Littlewood-Richardson rule

$sl(n, \mathbb{C})$ の表現のテンソル積の分解則である Littlewood-Richardson rule について, 復習しておく. $sl(n, \mathbb{C})$ の有限次元既約表現全体の集合は, dominant integral weight の集合 $P_+(n)$ と 1 対 1 に対応する. 具体的には, この対応は表現の最高ウェイトによって得られるのであった. ヤング図形による表示について説明する. 図 2.2 のような型 $(d_1, d_2, \dots, d_k)$, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k \geq 0$, $k \leq n$ のヤング図形を考える. ここで, $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ とおく. このヤング図形に $P_+(n)$ の元

$$m_1 \Lambda_1 + m_2 \Lambda_2 + \cdots + m_{n-1} \Lambda_{n-1}$$

を

$$m_1 = d_1 - d_2, \dots, m_{k-1} = d_{k-1} - d_k, \quad m_k = d_k$$

とおくことにより対応させる. ただし, $k = n$ のときは $m_k = 0$ とする. 実際には, この最高ウェイトをもつ表現は, n 次元の自然な表現 V の d 個のテンソル積の部分表現として, ヤング対称子を用いて構成される. この表現を $[d_1, \dots, d_k]$ と表すことにする.

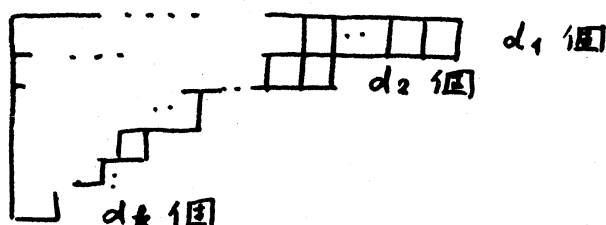


Figure 2.2

Littlewood-Richardson rule は, $sl(n, \mathbb{C})$ の表現のテンソル積

$$[d_1, \dots, d_k] \otimes [d'_1, \dots, d'_m]$$

の既約表現への分解則を与えるもので, 次のように述べられる.

まず, 型 $[d_1, \dots, d_k], [d'_1, \dots, d'_m]$ のヤング図形をそれぞれ描き, 図 2.3 のようように 2 番目のヤング図形の第 i 行の箱に数 i を書き込む. 1 番目のヤング図形に 2 番目のヤング図形の箱を, まず 1 が書き込まれたもの, 次に 2 が書き込まれたものというように, 順に付け加えて新しいヤング図形を作る. その際, 各ステップで以下の規則が満たされているように付け加えてゆく.

- (1) 得られる図形は, 行が n 以下のヤング図形であること.
- (2) 同一の列には同じ数字配列されないこと.
- (3) 付け加えられた数字をまず第 1 行について右から順に読み, 次に第 2 行について右から順に読んで, 以下同様にして数字の列を作ると, これが lattice permutation であること.

ここで, lattice permutation とは, 任意の自然数 N, i に対して, 初めの N 項に含まれる i の個数が, $i+1$ の個数以上であるような数列をいう. 例えば $\{1, 1, 1, 2, 3\}$ の lattice permutation は

$$11123, \quad 11213, \quad 11231 \quad 12113, \quad 12131, \quad 12311$$

の 6 通りである.



Figure 2.3

Littlewood-Richardson rule によると, このようにして得られるヤング図形とテンソル積に含まれる既約成分が 1 対 1 に対応している. 具体例をいくつか見よう.

$sl(3, \mathbb{C})$ の場合の例

$$[0, 1] \otimes [1, 0] = [1, 1] \oplus [0, 0]$$

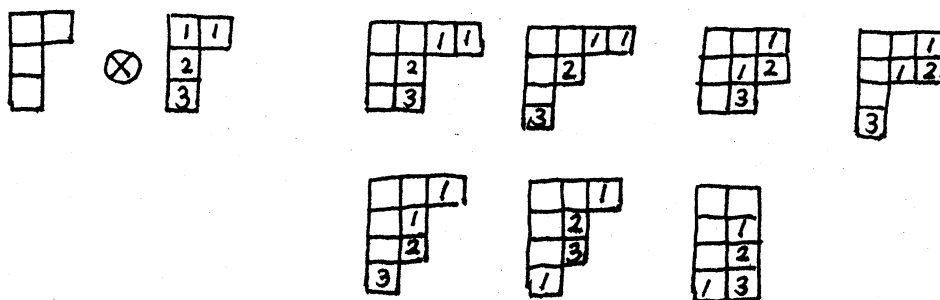
$$[0, 1] \otimes [0, 1] = [0, 2] \oplus [1, 0]$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \text{shaded square} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \text{shaded square} \\ \hline \end{array}$$

$sl(4, \mathbb{C})$ の場合の例

$$[1, 0, 1] \otimes [1, 0, 1] = [2, 0, 2] \oplus [2, 1, 0] \oplus [0, 1, 2] \oplus [0, 2, 0]$$

$$\oplus 2[1, 0, 1] \oplus [0, 0, 0]$$



表現環と fusion algebra

最高ウェイトが $\lambda \in P_+(n)$ で与えられる $sl(n, \mathbb{C})$ の既約表現を V_λ と表すことにする. 上で述べた Littlewood-Richardson rule に従い表現のテンソル積は,

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu n_{\lambda\mu}^\nu V_\nu$$

ここで, $n_{\lambda\mu}^\nu$ は表現 V_ν の重複度を示す. $P_+(n)$ の元で生成される自由 $\mathbf{Z}$ 加群に対して, 積構造を

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu} n_{\lambda\mu}^\nu \nu$$

によって導入したものが $sl(n, \mathbf{C})$ の表現環で, これを R_n と記す. 多項式環との同型

$$R_n = \mathbf{Z}[\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}]$$

が知られている.

Fusion algebra は, [BPZ] など共形場理論における vertex operator の概念を用いて導入された. Fusion algebra の構造定数は, 無限次元リー環の表現空間のある種の intertwiner の空間の次元として定式化される. ([TK] など参照.) A 型の場合には, 表現環を truncate したもののとして, 次のように代数的に述べるので, ここでは, 組合せ的な記述のみを説明しよう. まず, レベルとよばれる正の整数 K を固定する.

$$P_+(n, K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Lambda_i ; a_i \in \mathbf{Z}, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} a_i \leq K \right\}$$

とおく. これは, アフィンリー環 $\widehat{sl(n, \mathbf{C})}$ のレベル K dominant integral weight の集合と 1 対 1 に対応する. 自然な包含写像 $P_+(n, K) \subset P_+(n, K+1)$ を考え

$$\partial P_+(n, K) = P_+(n, K+1) \setminus P_+(n, K)$$

とおく. 表現環 R_n のイデアルで $\partial P_+(n, K)$ で生成されるものを $I_{n,K}$ とかく. このとき, fusion algebra $R_{n,K}$ を

$$R_{n,K} = R_n / I_{n,K}$$

により定義する. これは, $\lambda \in P_+(n, K)$ を基底とする自由 $\mathbf{Z}$ 加群となる. 積構造を

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu} N_{\lambda\mu}^\nu \nu$$

であらわすと, 構造定数 $N_{\lambda\mu}^\nu$ は, 非負整数となることが知られている. ([GW] など参照.)

リー環 $sl(2, \mathbf{C})$ の場合, 表現の分解則はよく知られた Clebsch-Gordan rule にほかならない. 最高ウェイトが $m\Lambda_1$, $m \in \mathbf{Z}$, $m \geq 0$ の表現 $V_{m\Lambda_1}$

を半整数を用いて $V_j, j = m/2$ で表すことにする. $V_{1/2}$ のテンソル積は次のように分解する.

$$\begin{aligned} V_{1/2}^{\otimes 2} &= V_1 \oplus V_0 \\ V_{1/2}^{\otimes 3} &= V_{3/2} \oplus 2V_{1/2} \\ V_{1/2}^{\otimes 4} &= V_2 \oplus 3V_1 \oplus 2V_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

これらを用いて, 表現環では $m+1$ 次元表現に対応した $m\Lambda_1$ を Λ_1 の多項式として

$$P_m = \sum_{i=0}^{[m/2]} (-1)^i \binom{m-i}{i} \Lambda_1^{m-2i} \quad (2.4)$$

と表すことができる. Fusion algebra $R_{2,K}$ は一変数多項式環をイデアルでわった

$$\mathbb{Z}[\Lambda_1]/(P_{K+1})$$

と同型になる. ここで, $V_j, j = 0, 1/2, 1, \dots, K/2$ に対応した fusion algebra の基底を v_j とかくと積構造

$$v_i \cdot v_j = \sum_k N_{ij}^k v_k$$

を定める構造定数 N_{ij}^k は, 以下の条件を満たすときに 1 でその他の場合は 0 となる.

$$\begin{aligned} |i-j| &\leq k \leq i+j \\ i+j+k &\in \mathbb{Z}, \quad i+j+k \leq K \end{aligned}$$

$sl(3, \mathbb{C})$ の場合は, fusion algebra の基底は, 図 2.5 に例を示したグラフの頂点と 1 対 1 に対応する. (図は $K=4$ のときである.) グラフの辺につけられた矢印は, 矢印の始点の表現にベクトル表現 V_{Λ_1} をテンソル積すると, その成分に矢印の終点に対応する表現が現れることを示す.

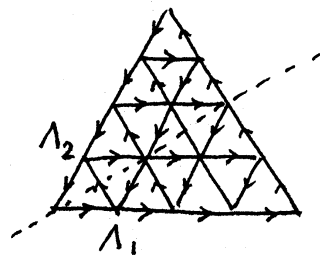


Figure 2.5

$P_+(n, K)$ には

$$\lambda^* = -w(\lambda)$$

で定義される involution が存在する. ここで, w はワイル群の最長元を表す. λ^* は表現 V_λ の双対表現に対応している. $sl(3)$ の場合この作用は, 図 2.5 の点線に関する対称移動である. $N_{\lambda\mu\nu} = N_{\lambda\mu}^{\nu*}$ とおく. この記号を用いて, $N_{\lambda\mu}^{\nu}$ の主な性質をまとめておく.

Proposition 2.6

- (1) $n_{\lambda\mu}^{\nu} \geq N_{\lambda\mu}^{\nu}$
- (2) $N_{\lambda\mu}^{\nu}$ は λ, μ, ν について対称.
- (3) $N_{0\lambda}^{\nu} = \delta_{\lambda\nu}$
- (4) $N_{\lambda^*\mu^*}^{\nu^*} = N_{\lambda\mu}^{\nu}$

Verlinde identity

Verlinde identity は, モジュラー変換の S 行列が fusion algebra を対角化するという主張として [V] にはじめてあらわれた. まず, アフィンリー環の指標へのモジュラー群の作用について整理しておこう. 詳細は, [K] などを参照されたい. $P_+(n, K)$ の要素 λ に対して, integrable highest weight module とよばれる $sl(\widehat{n}, \mathbb{C})$ の既約表現 $\mathcal{H}_\lambda$ が構成される. $\mathcal{H}_\lambda$ の指標を χ_λ とかく. $\mathcal{H}_\lambda$ には Sugawara construction により Virasoro Lie 環が作用するが, 指標は L_0 を用いて

$$\chi_\lambda(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda} q^{L_0 - c/24}$$

と定義される. ここで, $q = \exp \pi \sqrt{-1} \tau$ とおく. また, c は Virasoro Lie 環の central charge で

$$c = \frac{K \dim sl(n, \mathbb{C})}{K + n} \quad (2.7)$$

であたえられる.

指標については, ここでは詳しくはふれられないが, およそ次のようなものである. 最高ウェイト λ の $sl(n, \mathbb{C})$ の表現 V_λ に対して, $sl(\widehat{n}, \mathbb{C})$

の negative part を形式的に作用させて得られるものが Verma 加群 $\mathcal{M}_\lambda$ である. ここで, center は K 倍で作用する. $\mathcal{M}_\lambda$ は既約でなく, その null vector の生成する部分加群でわって既約な $\mathcal{H}_\lambda$ が構成される. $sl(\widehat{n}, \mathbb{C})$ の作用の degree により, $\mathcal{H}_\lambda$ は

$$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{H}_{\lambda, d}$$

と分解する. 指標は, この次元のある種の母関数で

$$Tr_{\mathcal{H}_\lambda} q^{L_0} = \sum_{d=0}^{\infty} q^d \dim \mathcal{H}_{\lambda, d}$$

で与えられる.

指標は, テータ関数を用いて表すことができ, $n = 2, \lambda = 2j + 1$ の場合の具体形は,

$$\chi_\lambda = \eta(\tau)^{-3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [2m(K+2) + (2j+1)] e^{\pi \sqrt{-1} \tau [2m(K+2) + (2j+1)]^2 / 2(K+2)}$$

となる. ここで η は, Dedekind eta function

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

である.

$$\Delta_\lambda = \frac{\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle}{2(K+n)}$$

とおき, conformal weight とよぶ. これは, L_0 の V_λ における固有値である. $n = 2, \lambda = 2j + 1$ のときの値は,

$$\Delta_j = \frac{j(j+1)}{K+2}$$

となる.

Kac-Peterson [KP] により, モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ が指標 $\{\chi_\lambda\}_{\lambda \in P_+(n, K)}$ に次のように線形に作用することが知られている.

$$\chi_\lambda(-1/\tau) = \sum_{\mu \in P_+(n, K)} S_{\lambda\mu} \chi_\mu(\tau),$$

$$\chi_\lambda(\tau+1) = \exp 2\pi \sqrt{-1} \left(\Delta_\lambda - \frac{c}{24} \right) \chi_\lambda(\tau)$$

となる。ここで,

$$S_{\lambda\mu} = \frac{(\sqrt{-1})^{n(n-1)/2}}{\sqrt{n(K+n)^{n-1}}} \sum_{w \in W} \det w \exp \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K+n} \langle w(\lambda + \rho), \mu + \rho \rangle \right)$$

である.

$$T_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} \exp 2\pi\sqrt{-1} \left(\Delta_\lambda - \frac{c}{24} \right)$$

とおく. $sl(2, \mathbb{C})$ のときは,

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{K+2}} \sin \frac{\pi(2i+1)(2j+1)}{K+2}$$

で与えられる.

上の行列 S, T は, とともにユニタリ対称行列である. 次の基本関係式が成立する.

$$(ST)^3 = S^2 = (\delta_{\lambda\mu})_{\lambda\mu} \quad (2.8)$$

双対表現に対応した involution $*$ について

$$S_{\lambda\mu^*} = \overline{S_{\lambda\mu}}$$

$$\Delta_{\lambda^*} = \Delta_\lambda$$

が確かめられる.

$S_{0\lambda}$ は実数で

$$S_{0\lambda} = \frac{1}{\sqrt{n(K+n)^{n-1}}} \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sin \frac{\pi \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{K+n} \quad (2.9)$$

とも表される. また,

$$\frac{S_{0\lambda}}{S_{00}} = \frac{\prod_{\alpha \in \Delta_+} \sin \frac{\pi \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{K+n}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} \sin \frac{\pi \langle \rho, \alpha \rangle}{K+n}}$$

は, $K \rightarrow \infty$ において, 最高ウェイト λ の表現の次元を与えるいわゆるワイルの次元公式となっていることに注意しよう.

Proposition 2.10 (Verlinde identity)

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_{\alpha \in P_+(n, K)} \frac{S_{\lambda\alpha} S_{\mu\alpha} S_{\nu^*\alpha}}{S_{0\alpha}}$$

Verlinde のはじめの主張は、次のように述べる事ができる. Fusion algebra $R_{n,K}$ の基底を変換して

$$w_\lambda = S_{0\lambda} \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \mu$$

とおくと, 上の Proposition と S のユニタリ性から, w_λ が idempotent となることが従う. つまり

$$w_\lambda \cdot w_\mu = \delta_{\lambda\mu} w_\lambda$$

が成立する. 言い替えると, fusion algebra が, 行列 S により対角化された.

3. $sl(n, \mathbb{C})$ 型の 3 次元多様体の位相不変量

framed link の不変量

Witten による 3 次元多様体の不変量を組み合せ的に構成する際に基礎になるのは, 前節で述べた指標へのモジュラー群の作用と, colored framed link の不変量である. Link の不変量について説明しよう.

L を 3 次元球面 S^3 内の向きのついた framed link とする. L の成分を

$$L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k$$

とする. さらに, 写像

$$\lambda: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow P_+(n, K)$$

によって各成分に $sl(n, \mathbb{C})$ の表現を対応させたものを colored framed link とよぶ. この状況で, 不変量 $J(L, \lambda)$ が構成される. 具体的には, link diagram を図 3.1 のような elementary tangle に分解して, $U_q(sl(n))$ 加群としての homomorphism をそれぞれに対応させていく [RT] などで用いられている標準的な方法を用いる. このような定義にしたがって直接計算するのは, あまり得策ではない. このノートでは, 具体的な計算方法の解説を目標にしているので, 定義を述べるよりも, 計算に必要な不変量の性質について解説することにする.

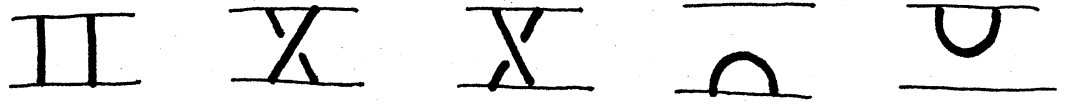


Figure 3.1

最も基本的なのは, link diagram を局所的に変形した際に現れる変化を記述する次の一連の等式である.

Proposition 3.2

$$J(\bigcirc)^\lambda = \frac{S_{0\lambda}}{S_{00}} J(\bigcirc)$$

$$J(\text{cusp})^\lambda = \exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_\lambda J(\text{cusp})^\lambda,$$

$$J(\text{crossing})^\lambda = \frac{S_{\lambda\mu}}{S_{0\lambda}} J(\text{crossing})^\lambda.$$

2 番目の式は, framing の変化が conformal weight を用いて記述されることを示している. また, S は前節で説明したモジュラー変換の S 行列である. $J(L, \lambda)$ は link の向きに依存した不変量である. ある成分の向きを反対にして得られる不変量は, その成分に対応した表現 $\lambda(i)$ を $\lambda(i)^*$ でおきかえることにより計算されることに注意しよう.

$$J(\text{link with } \lambda, \mu) = \sum_{\nu} N_{\lambda \mu}^{\nu} J(\text{link with } \nu)$$

Figure 3.3

図 3.3 のように, link の成分を平行にふやして各成分に表現 λ, μ を対応させると, これはもとの link に表現のテンソル積 $\lambda \otimes \mu$ を対応させたものと同じと考えられて, 得られる不変量は fusion rule にしたがって表される. このことから, k 個の成分をもつ link では, 各成分に fusion algebra の元を対応させることにより, multi-linear map

$$J(L, \cdot) : R_{n,K}^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C}$$

が得られる. Fusion algebra における積を上のように link の平行化に対応させると, この写像は fusion algebra の積構造と compatible である. 不変量の基本的な計算方法はこの規則を用いて各成分にベクトル表現が与えられた場合の不変量の計算に帰着することである. パラメータ q が 1 のべき根でないときは, 上の multi-linear map は表現環のレベルで

$$R_n^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C}$$

として定義される. $q = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K+n}\right)$ とするとイデアル $I_{n,K}$ に対応する部分の寄与が消えるわけである. したがって, 実際の計算においてはまず q を変数とみなして表現環の積構造によって計算してから得られた結果に $q = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K+n}\right)$ を代入しても差し支えない. 次にベクトル表現の場合を詳しくみることにしよう.

スkein関係式

Oriented frame link L ですべての成分にベクトル表現すなわち最高ウェイト Λ_1 が与えられた場合を考えよう. この不変量を J_L と表すことにする. 不変量を構成する際に最も重要な役割をはたすのが図 3.1 の elementary braid に対応する R 行列である. 表現の分解

$$V_{\Lambda_1} \otimes V_{\Lambda_1} = V_{2\Lambda_1} \oplus V_{\Lambda_2}$$

から R 行列は 2 つの固有値をもつことがわかる.

$$q = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K+n}\right), \quad t = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{n(K+n)}\right)$$

とおく. 固有値は次のように求められる. (図 3.4 参照.)

$$\begin{aligned} \exp \pi\sqrt{-1} (\Delta_{2\Lambda_1} - 2\Delta_{\Lambda_1}) &= q^{-1/2}t^{-1} \\ -\exp \pi\sqrt{-1} (\Delta_{\Lambda_2} - 2\Delta_{\Lambda_1}) &= -q^{1/2}t^{-1} \end{aligned}$$

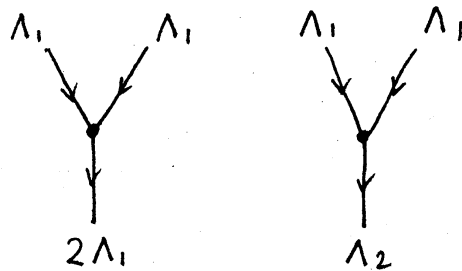


Figure 3.4

したがって R 行列は, 次の 2 次関係式を満たす.

$$(R - q^{-1/2}t^{-1})(R + q^{1/2}t^{-1}) = I$$

このことから J_L はスケイン関係式

$$tJ_{L_+} - t^{-1}J_{L_-} = q^{1/2} - q^{-1/2}J_{L_0} \quad (3.5)$$

を満たすことがわかる. (図 3.6 参照.)

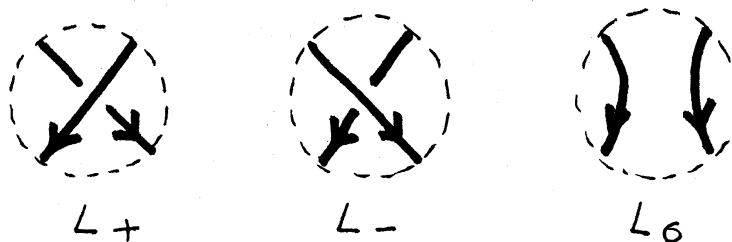


Figure 3.6

$$J_{\bigcirc} = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \quad (3.7)$$

とあわせるとスケイン関係式によって不変量の特徴づけることができる. Framing の変化に関しては

$$J_{\text{link}} = \exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_{\Lambda_1} J_{\text{link}}$$

であった. ここで

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_{\Lambda_1} = q^{n/2}t^{-1}$$

となる. Link diagram の正の交差の数から負の交差の数を引いたものを $w(L)$ とかき

$$J_L = \left(\exp 2\pi\sqrt{-1}\Delta_{\Lambda_1} \right)^{w(L)} P_L$$

とおくと $P(L)$ は framing にはよらない 向きのついた link の不変量となり, さらに

$$q^{n/2}P_{L_+} - q^{-n/2}P_{L_-} = q^{1/2} - q^{-1/2}P_{L_0} \quad (3.8)$$

が満たされる. したがって, $P(L)$ は skein polynomial (2 variable Jones polynomial) の特殊値として計算される.

Dehn surgery formula

次に3次元多様体の不変量の構成について説明しよう． M を境界のない向きづけられたコンパクト3次元多様体とする． M が S^3 内の framed link L に関する Dehn surgery で得られているとする．これは， L の各成分 $L_1, \dots, L_k$ の tubular neighbourhood を取り去ってから， k 個のソリッドトーラスを図 3.9 のように link の framing にしたがって挿入する操作である．

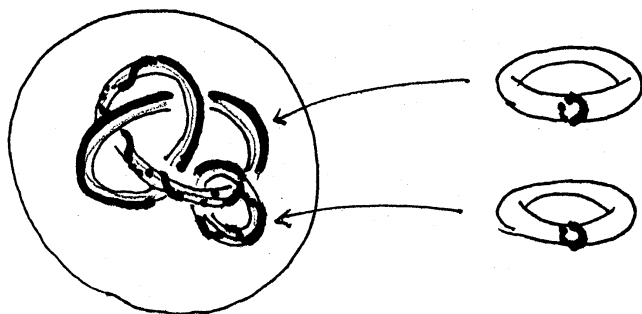


Figure 3.9

n, K は固定する．また L に適当な向きを与えておく．

$$\lambda: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow P_+(n, K)$$

を定めるごとに，不変量 $J(L, \lambda)$ が得られるのであった．これを用いて3次元多様体 M の位相不変量が構成される．

$$Z(M; n, K) = C^{\text{sign}(L)} \sum_{\lambda} S_{0\lambda(1)} \cdots S_{0\lambda(k)} J(L, \lambda) \quad (3.10)$$

ここで C は (2.7) の central charge c を用いて

$$C = \left(\exp 2\pi \sqrt{-1} \frac{c}{24} \right)^{-3}$$

で与えられる．また， $\text{sign}(L)$ は L の link matrix の正の固有値の個数から負の固有値の個数を引いたものを示す．和はすべての $\lambda: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow P_+(n, K)$ についてとる．このように和をとると，involution $*$ 作用から，得られた式は L の向きによらないこともわかる．位相不変性は，3次元多様体 M の Dehn surgery による記述によらないことを証明することによって保証される．これは，いわゆる Kirby move に関する不変性に帰着されるが，これを示すキーとなるのは， $J(L, \lambda)$ についての Proposition 3.2 と行列 S, T の基本関係式 (2.8) である．

対称性

ここで構成された位相不変量についていくつかの対称性が存在する。まず、アフィンリー環の Dynkin diagram automorphism に由来する対称性を取りあげよう。詳しくは、[KT] を見られたい。ウェイトの集合 $P_+(n, K)$ は、 $sl(\widehat{n}, \mathbb{C})$ の level K dominant integral weight の集合

$$P_+(\widehat{n}, K) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \hat{\Lambda}_i ; a_i \in \mathbb{Z}, a_i \geq 0 \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i = K \right\}$$

と同一視できるのであった。 $P_+(\widehat{n}, K)$ には、巡回群 $\mathbb{Z}_n$ が

$$\sigma(\hat{\Lambda}_i) = \hat{\Lambda}_{i+1}$$

を生成元として作用する。 $P_+(n, K)$ に対する作用は、

$$\sigma(\lambda) = C\lambda + K\Lambda_1, \quad \lambda \in P_+(n, K)$$

と表される。ここで、 C は Coxeter 変換で

$$C = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{n-1}}$$

である。

$sl(2, \mathbb{C})$ のとき、この作用は

$$\sigma(j) = K/2 - j$$

で表される反転である。また、 $sl(3, \mathbb{C})$ のときは、図 2.5 の三角形の重心に関する $2\pi/3$ 回転が σ である。表現の双対を表す $*$ とあわせると、2 面体群 D_3 の作用が得られる。

ウェイト $\lambda \in P_+(n, K)$ について対応するヤング図形の箱の個数を $|\lambda|$ で表す。Conformal weight, 行列 S への σ の作用は、次の式で与えられる。

$$\Delta_{\sigma(\lambda)} - \Delta_\lambda = \frac{1}{n} \left(\frac{(n-1)K}{2} - |\lambda| \right) \quad (3.11)$$

$$S_{\sigma(\lambda)\mu} = \exp \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}|\mu|}{n} \right) S_{\lambda\mu} \quad (3.12)$$

これを用いると、 $J(L, \lambda)$ においてある成分に与えられた表現を σ の作用でずらしたときの変化を記述することができる。リンク L にもう一

つの成分 N を付け加えて、新しい成分に対応する表現をかえる状況を考える。

Proposition 3.13 (symmetry principle)

$$\frac{J(L \cup N, \mu \cup \sigma(\lambda))}{J(L \cup N, \mu \cup \lambda)} = \exp \left(\frac{\pi \sqrt{-1}}{n} \left(((n-1)K - 2|\lambda|)N \cdot N - 2 \sum_{j=1}^k |\mu(j)| L_j \cdot N \right) \right)$$

これを用いると、式 3.10 の計算は、2 面体群の作用に関する軌道に分解することにより和の個数を節約することができて、実際の計算には有効である。

また、3 次元多様体の不変量 $Z(M; n, K)$ は n, K に関して level-rank duality とよばれる対称性をもつことも知られている。

計算のアルゴリズム

$sl(2, \mathbb{C})$ の場合

すでに見たように、

$$P_+(n, K) = \{0, 1/2, 1, \dots, K/2\}$$

とみなすことができる。リンク L の各成分に $1/2$ を対応させて得られる不変量 J_L は、Jones 多項式の特殊値を用いて計算することができる。さらに、一般の color については、前節で説明したように fusion rule にしたがって parallel version の Jones 多項式の計算より求められる。3 次元多様体の不変量 $Z(M; 2, K)$ に必要なその他の量は、

$$S_{0j} = \sqrt{\frac{2}{K+2}} \sin \frac{\pi(2j+1)}{K+2}$$

$$c = \frac{3K}{K+2}$$

で与えられている。式 3.10 にあてはめると、[RT], [KM] など詳しく調べられている 3 次元多様体の不変量の cabling formula が得られる。

$sl(3, \mathbb{C})$ の場合

表現環 R_3 は, 基本ウェイト Λ_1, Λ_2 で生成される多項式環 $\mathbb{Z}[\Lambda_1, \Lambda_2]$ と同型であった. 最高ウェイト $m_1\Lambda_1 + m_2\Lambda_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $m_1, m_2 \geq 0$ の表現を, 表現環において, 基本ウェイト $x = \Lambda_1$, $y = \Lambda_2$ の多項式で表し, これを $P_{m_1, m_2}(x, y)$ とかく. P_{m_1, m_2} は, Littlewood-Richardson rule を用いて, 次の式から帰納的に計算することができる.

$$P_{1,0} = x, \quad P_{0,1} = y, \quad P_{1,1} = xy - 1,$$

$$xP_{m,0} = P_{m-1,1} + P_{m+1,0},$$

$$xP_{m_1, m_2} = P_{m_1, m_2-1} + P_{m_1-1, m_2+1} + P_{m_1+1, m_2}, \quad m_1, m_2 > 0$$

$$P_{m_1, m_2}(x, y) = P_{m_2, m_1}(y, x).$$

はじめのいくつかについて計算すると以下のようなになる.

$$P_{2,0} = x^2 - y$$

$$P_{3,0} = x^3 - 2xy + 1$$

$$P_{2,1} = x^2y - y^2 - x$$

$$P_{4,0} = x^4 - 3x^2y + y^2 + 2x$$

$$P_{3,1} = x^3y - 2xy^2 - x^2 + 2y$$

$$P_{2,2} = x^2y^2 - x^3 - y^3$$

次に, リンクの不変量との関係を調べよう. S^3 内の向きのついた framed link $L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k$ について各成分に表現環 R_3 の元を対応させて得られる不変量 $J(L, \lambda)$ を計算する方法は, 以下の通りである. Fusion rule と上の多項式 P_{m_1, m_2} を用いて, 図 3.3 のように計算していくと, $J(L, \lambda)$ はリンク L の parallel version に対して, 各成分に基本ウェイト Λ_1, Λ_2 のいずれかを対応させて得られる不変量で表すことができる. ここで, すべての成分に Λ_1 を対応させて得られる不変量は, スケイン関係式 3.5 によって計算される. また, $\Lambda_1^* = \Lambda_2$ に注意すると, Λ_2 が与えられている成分については, リンクの向きを逆にしてあらためて Λ_1 を対応させれば, やはり同じスケイン関係式による計算に帰着される.

不変量 $Z(M; 3, K)$ の計算にはさらに $S_{0\lambda}$ の値が必要になる. $\lambda = m_1\Lambda_1 + m_2\Lambda_2$ として, これは

$$S_{0\lambda} = \frac{8}{(K+3)\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(m_1+1)}{K+3} \sin \frac{\pi(m_2+1)}{K+3} \sin \frac{\pi(m_1+m_2+1)}{K+3}$$

で与えられる.

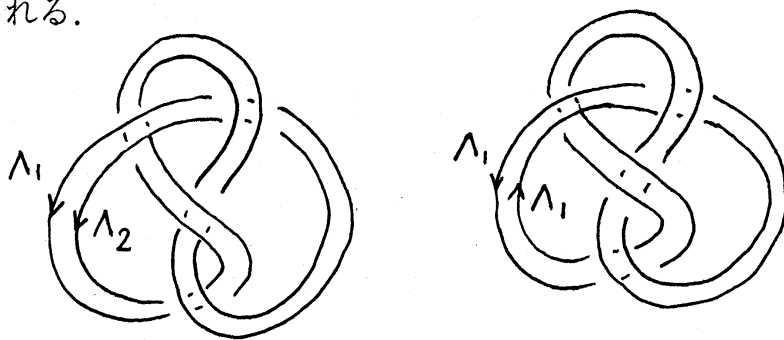


Figure 3.14

一般の $sl(n, \mathbb{C})$ については, 簡便な計算方法は期待できない. 不変量 $J(L, \lambda)$ の計算は原理的には次のようになされる. まず, L を組ひも $b \in B_n$ の両端を閉じたものとして実現しておく. j 番目のひもに対応すウェイトを λ_j とする. 組ひもの作用

$$\rho(b) : V_{\lambda_1} \otimes \cdots V_{\lambda_n} \rightarrow V_{\lambda_1} \otimes \cdots V_{\lambda_n}$$

に対して, 既約成分 V_μ 上のトレースを $\tau_\mu(b)$ とかくと,

$$J(L, \lambda) = \sum_{\mu} \frac{S_{0\mu}}{S_{00}} \tau_\mu(b) \quad (3.15)$$

と表される. したがって, トレース $\tau_\mu(b)$ の計算に帰着されるわけであるが, これはリンクの parallel version をとり岩堀-ヘッケ代数の表現のトレースを用いて, 計算することができる. リンクの parallel version による不変量の表現論的な側面については, [M] を見られたい.

References

- [BPZ] A. A. Belavin, A. N. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Infinite dimensional symmetries in two dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. B241 (1984), 333-380.
- [FH] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, A First Course, Springer GTM RIM 129.
- [GW] F. M. Goodman and H. Wenzl, Littlewood-Richardson coefficients

for Hecke algebras at roots of unity, *Advances in Math.* 82 (1990), 244-265.

[H] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer GTM 9.

[K] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Third Edition, Cambridge University Press.

[KP] V. G. Kac and D. H. Peterson, Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, *Advances in Math.* 53 (1984), 125-264.

[KM] R. Kirby and P. Melvin, The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$, *Invent. Math.* 105 (1991), 473-545.

[Ko] T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I, *Topology* 31 (1992), 203-230.

[KT] T. Kohno and T. Takata, Symmetry of Witten's 3-manifold invariants for $sl(n, \mathbb{C})$, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 2-2 (1993), 149-169.

[M] J. Murakami, The parallel version of the polynomial invariants of links, *Osaka Journal of Math.* 24 (1989), 1-55.

[RT] N. Y. Reshetikhin and V. G. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* 103 (1991), 547-597.

[TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid groups, *Advanced Studies in Pure Math.* 16 (1988), 297-372.

[V] E. Verlinde, Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory, *Nucl. Phys. B* 300 (1988), 360-376.

[W] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* 121 (1989), 351-399.