

Burgers モデル乱流に対する
非線型波展開法

京大理

巽友正

§1. 高 Reynolds 数における乱流の場合

無限空間を占める流体の中には全般的に様々な乱流は、通常、勝手な方向、波数、振幅と位相をもつ無数の平面正弦波の集合として理解される。この描像は、数学的には乱流の場合の各元 Fourier 分解を考慮することに対応し、これから、異なる波数の波の間の相互作用、各波の持つエネルギーの入り出しなどの有用な物理的諸概念が与えられることは周知の通りである。

この描像は単に乱流の場合の数学的表現として用いられるばかりでなく、乱流の解析に際しての有用な近似手段の基礎としても用いられる。乱流の速度場の統計法則と速度積平均の集合による記述する立場をとると、ある波数の速度積平均を支配する方程式には、運動方程式の非線型性により、必ずしも次の一つのだけ高い速度積平均が現われる。未知数

である速度緩平場の数はつねに方程式の数より一つだけ多く、
これらの方程式系を完結させるためには、一つの完結仮説の
導入が必要となる。これが、よく知られた乱流理論における
非線型項の困難である。

完結仮説として考えられる最も簡単なものは、最終迄（
2次）の速度平場に対する方程式だけとする、その方程式にお
ける非線型項（3次）を無視する、いわゆる「弱い乱流」の
近似であろう。2次の速度緩平場はエネルギー・スペクト
ルに対応し、3次のそれはエネルギー伝達の1方を表わして
いることを考えると、この線型近似は、異質渦糸の渦の内の
相互作用を無視し、各々の渦が独立に振舞う状態を想定する
ことに当たる。スペクトル方程式におけるエネルギー伝達
函数を全く無視する代りに、これをスペクトルを含む適当な
積分で置換して、方程式を完結させる方法がある。この近
似理論は、積分表示を仮定する際に根據となるべき物理的
観察に依拠している多くの理論に劣らぬが、その代表例なもの
は Heisenberg の「渦動粘性」理論であろう（この種の近視
解法理論については Batchelor (1953) を参照）。

以上の諸理論に比べてより精度の高い近似方式は、考え
る方程式の個数を増し、これによって完結仮説の不完全性の
影響をより稀薄にするといえよう。一方程式理論に比べ

二一階だけ近似を高い理論は、2, 3, 4 次の転平場を含む
 二つの方程式と一つの完結仮説とを用いる理論であり、こ
 れに属するものは、「4次キユムラニト打切り」理論 (Millionshtchikov (1941), Iatsuami (1954, 1957),
 Proudman & Reid (1954)) と、その変種である「直接相互
 作用近似」理論 (Kraichnan (1959), (1964), (1965)),
 「Wiener-Hermite 展開の二階近似」理論 (Meehan &
 Siegel (1964)), さらに、4次項を全く無視した「4次
 相関打切り」理論 (Deissler (1958)) などがある。

この近似方式は、与える方程式の数が多ければ多いほど
 精度の高い近似が得られることが期待されるが、一方にあり
 て、方程式の数式の複雑さは定数とともに急激に増大するの
 で、定数を高めることは実際的には限度がある。現在ま
 だに行われた近似では、2次から5次までの転平場を含む三
 つの方程式と一つの完結仮説とを用いた三方程式理論が最高で
 あり、その中には「5次相関打切り」理論 (Deissler (1960)),
 あるいは「5次キユムラニト打切り」理論 (川原 (1968)) が
 ある。

以上の逐次近似理論はいずれも、速度転平場のより高次の
 項を摂動として取り扱うという立場にあって共通しており、
 その方式によつて得られた解が流体力学の Reynolds 数 $R =$

$u_0 \propto \lambda_0 / \nu$ (u_0 : 乱れの代表速度, λ_0 : 代表時間渦長, ν : 流体の動粘性率) の昇べき級数の形をとることもまた同様である。ところが, R の昇べき級数の収束性があまり良くないことは, 流体の層流運動の分野においてすでに良く知られたことであり, たとえば, Reynolds 数展開の第一近似と同等である Stokes, Oseen の近似解法は, 高々 $R = 10$ の程度までしか有効な解を与えない。乱流の場合に於いては, 上記の近似諸理論が R の大まな値に於いて, 程度の差こそあるが破綻を来していることも良く知られている。(その最も著しい例は, 4 次キエウエト打ちり近似による負のエネルギーの発生であろう。)

一方, 高 Reynolds 数における流小の場の構造に於いての普遍的な特徴があり, それが現在の果てであることはすでに多くの研究者によって指摘されている(たとえば, Lighthill (1963), Batchelor (1967) 参照)。 R の大まな値に於いては渦度は差同時に狭い領域に集中し, その他の流小の場のほとんど至るところで渦度は 0 の非同転流になる。層流運動の場合に, 流小の場の漸近解法を全面的に利用した理論が「境界層上理論」である(たとえば, Goldstein (1938) を参照)。この方法は, 流小の場をほとんどいたるところの非同転流と, 物体表面に沿う

非常に低い境界層とに分けて取扱う一種の漸近解法であり、この理論の幅広い有用性はすでに多くの実例によって確かめられている。

一般の流れの場合また、境界のなす一つの流体運動にはほかならず二つの要素を考慮すれば、高 Reynolds 数における流れの場合は、それを線型方程式の解である正弦波の合成と考えるよりは、むしろ、むしろ無数の非連続面（あるいは線）とをそれと取りまじり非回転流として理解する方が、はるかに現実に近い近似であろうと想像される。このように考える線に沿って、この論文では、「非線型渦層面流」として一つの近似解法を提案する。

もしあると、流体は簡単な Burgers の一次元モデル流体と考える。このモデル流体は、非圧縮粘性流体の Navier-Stokes 運動方程式を単純化した形の運動方程式をもっているが、この方程式の解が解析的に閉じた形に得られるという非常に大きな利点をもっている。この流体は、しかし、Navier-Stokes 流体とは違って非圧縮ではなく、ある時刻において完全に連続解であった解にも、有限時間後には衝撃波のようになり連続解を構成が現われる。この意味での流体は、非圧縮粘性流体のモデルというよりは圧縮性流体のモデルと考える方が適当かもしれない。しかし、こ

こゝは Burgers 流体の運動の素朴な解説という問題を論じ、高 Reynolds 数における漸近解法の一つの適用例として、Burgers 流体における数法を取扱う。

§2. Burgers 方程式の周期解

一次元座標を x , 時間を t , 一次元速度を $u(x, t)$ で表わすとき, Burgers モデル流体の運動方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

で与えられる。

(1) 式の解は Burgers 自身 (1950) に詳しく調べられているが、粘性 ν の非常に小さい値、あるいは無次元形では Reynolds 数 R の非常に大きい値に於いて、以下の二種類の解があることが知られている：

i) 滑らかな解。

(1) 式の右辺を無視したときの解で、

$$u(x, t) = \frac{x - x_0}{t - t_0} \quad (2)$$

ただし、 x_0, t_0 はそれぞれ任意定数。

ii) 不連続解.

二つの一様状態をつなぐ不連続面を表わす解は,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_l + u_r) - \frac{1}{2}(u_l - u_r) \tanh \left[\frac{u_l - u_r}{4v} (x' - x_0) \right], \quad (3)$$

ただし, $c = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$, $x' = x - c(t - t_0)$, u_l, u_r ($u_l > u_r$) はそれぞれ, 不連続面の左, 右における u の値を表わす. (3) 式の表わす不連続面は, $u_l > u_r$ の場合のみ発生し, かつその面の左右における u の平均値を位相速度として伝播する. 不連続面の厚さは $v/(u_l - u_r)$ の程度であり, $v \rightarrow 0$ の極限において解 (3) は一つの階段函数

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x - x_0 < c(t - t_0), \\ u_r & x - x_0 > c(t - t_0), \end{cases} \quad (4)$$

に帰着する.

以上二つの解を組合わせると, $v \rightarrow 0$ の極限において, つぎの非周期的同期解を構成することが出来る:

$$u(x, t) = A(t) \text{saw } x, \quad (5)$$

$$\text{ただし, } A(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 t}, \quad (6)$$

で, $\text{saw } x$ はつぎの非周期的同期関数である:

$$\text{saw } x = \begin{cases} \frac{x}{L} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ \frac{x}{L} - \frac{1}{2} & 0 < x \leq \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{saw } x = \text{saw } (x + L).$$

$\text{saw } x$ は図 1 に示すよう周期 L の鋸歯状の波形をもつ函数で、その Fourier 級数展開は、

$$\text{saw } x = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(2n\pi \frac{x}{L} \right) \quad (8)$$

で与えられる。また、 $\text{saw } x$ はつぎのよう加法定理をもつ：

$$\text{saw } nx = \sum_{m=0}^{n-1} \text{saw} \left(x - \frac{m}{n} L \right) \quad n: \text{正整数} \quad (9)$$

saw 函数を表わす解 (5) は非常に不定解心あり、いま、ある時刻 ($t=0$) において正弦波形をもつ波

$$u(x, 0) = A_0 \sin x \quad (10)$$

が与えられたとすると、 $t>0$ において $u(x, t)$ は急速に変形し、有限時間後に (5) の形に近づき、それ以後は (5) の形を保持しながら時間とともに減衰する (図 2 を参照)。
また、初期形 (10) から漸近形 (5) への変化の過程は、 ν と ν^2 (あるいは R) の値によって変らず、 ν の値の影響

は寧ろ不連続面の厚さに関係なく現われる。

§3. 一次元格子の saw 函数表示

いま、区間 $-L/2 \leq x < L/2$ において定義された
右側連続な連続函数 $u(x)$ が与えられたとき、つぎのよ
うな Stieltjes 積分を考へる：

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \text{saw}(x-x') du(x') \\ &= \frac{x}{L} [u(L/2) - u(-L/2)] - \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} u(x') dx' + u(x). \end{aligned}$$

函数 $u(x)$ が周期性

$$u(x) = u(x+L) \quad (11)$$

と、その平均値

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} u(x') dx' = 0 \quad (12)$$

をえつと仮定すれば、上の積分は記号略して、

$$u(x) = \int_{-L/2}^{L/2} \text{saw}(x-x') du(x') \quad (13)$$

と書ける。周期性 (11) にちつて、 $u(x)$ の定義領域を
全空間 $-\infty < x < \infty$ に拡張すれば、(13) は周期函数
 $u(x)$ に対する saw 函数展開を与える。

もし, $u(x)$ が 1 次関数とすると有限な微分係数

$$\frac{du}{dx} = \omega(x)$$

をもちなうば, (13) 式は,

$$u(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \omega(x') \operatorname{saw}(x-x') dx' \quad (14)$$

と書ける. $\omega(x)$ を Ξ 次元流体の速度場 $u(x)$ に対する渦度 $\omega(x) = \operatorname{rot} u$ と対比させて考えることが出来るから, 二次元 $\omega(x)$ を '渦度' と呼ぶことにしよう. このとき, (14) 式は Ξ 次元流体における渦度と速度を結びつける Biot-Savart の関係式

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(x') \times (x-x')}{|x-x'|^3} dx'$$

に対応している.

流体の速度 $u(x)$ の saw 函数表示 (13) あるいは (14) は全く一般解な展開公式であるから, われわれは二次元, 流体の場が集中した渦度の集合と記述されたと仮定する:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \operatorname{saw}(x - x_i(t)), \quad (15)$$

ただし, $\omega_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, N$). 一般解な展開公式 (13) に對して, $u(x)$ は $du(x')$ を振幅とする saw 函数

の和として表わしてある。 $du(x') > 0$ の領域では、
 saw 函数の不連続面は位相速度 $c = u(x')$ で伝播するから、
 不連続面であり続ける。 x に対して、 $du(x')$ が c
 の領域では、不連続の ($t=0$ の) $t \rightarrow \infty$ の勾配は、 $t > 0$
 の場合は有限の勾配となり、(2) 式に従って連続直線の形を保持
 しながら減衰する。 その結果、 $t=0$ における (13) 式の
 いは (14) 式で表わされる初期形をもち $u(x, t)$ は、ある
 時刻の後には $1/t$ の正勾配をもち直線部分と、有限個の負
 の不連続面に帰着していきるのである。 そのような時刻
 以後には、 $u(x, t)$ は (15) 式で表わされるであろうし、
 正勾配がすべて $1/t$ であることから、 $x \neq x_i$ に対して

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N w_i(t) = \frac{1}{t} \quad (16)$$

が成立しているはずである。

(15) 式における w_i , x_i は一般に t の函数であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{dw_i}{dt} \text{saw}(x-x_i) - w_i \frac{d}{dx} [\text{saw}(x-x_i)] \frac{dx_i}{dt} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{dw_i}{dt} \text{saw}(x-x_i) - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N w_i \frac{dx_i}{dt}. \end{aligned}$$

ところが、不連続解 (3) から明らかであるように、

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{2}[u(x_i-0, t) + u(x_i+0, t)] \\ &= u(x_i, t).\end{aligned}\quad (17)$$

ここで、 $u(x, t)$ の平均値が 0 であることを考慮すれば、 ω_i の一つの値に対して $dx_i/dt = u(x_i, t)$ のと負の値が同じ頻度で現われると考えるから、 $\sum_{i=1}^N \omega_i dx_i/dt$ はほとんど 0 であると考えよう。しかし、この和を厳密に 0 にするには、つぎのより正確な条件を要求する。まず、 N を偶数とすると、 N 個の不連続面を $i = 1, 2, \dots, N/2$ と $N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N$ の二群に分け、各群に属する不連続面が $x = 0$ を中心として一対づつ対称に分布しているものとする：

$$x_i = -x_{N/2+i}, \quad \omega_i = \omega_{N/2+i}. \quad (18)$$

このとき、

$$\begin{aligned}u(x) &= \left[\sum_{i=1}^{N/2} + \sum_{i=N/2+1}^N \right] \omega_i \text{saw}(x - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N/2} \omega_i [\text{saw}(x - x_i) + \text{saw}(x + x_i)] \\ &= - \sum_{i=1}^{N/2} \omega_i [\text{saw}(-x - x_i) + \text{saw}(-x + x_i)] \\ &= -u(-x).\end{aligned}\quad (19)$$

したがって、(17) から、

$$\frac{dx_i}{dt} = - \frac{dx_{N/2+i}}{dt}. \quad (20)$$

1 となる2,

$$\sum_{i=1}^N \omega_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N/2} \omega_i \left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_{N-i}}{dt} \right) = 0$$

となり, $\partial u / \partial t$ は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{d\omega_i}{dt} \operatorname{sn}(\alpha - \alpha_i) \quad (21)$$

と表れる。

(16), (21) を Burgers 方程式 (1) に代入すると, $\alpha \neq \alpha_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) のとき方程式は,

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d\omega_i}{dt} + \frac{\omega_i}{t} \right) \operatorname{sn}(\alpha - \alpha_i) = 0$$

となる。すべての α ($\neq \alpha_i$) の値に対してこの方程式が成立するためには,

$$\frac{d\omega_i}{dt} + \frac{\omega_i}{t} = 0$$

でなければならぬ。この方程式の解は,

$$\omega_i(t) = \frac{\omega_{i0}}{t}, \quad \omega_{i0} = \omega_i(1) \quad (22)$$

と与えられる。

以上の (17), (22) の結果を考慮すると, (1) 式に代入

$u(\alpha, t)$ の sn -函数展開は,

$$u(\alpha, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N \omega_{i0} \operatorname{sn}[\alpha - \alpha_i(t)] \quad (23)$$

べきところから、 $\alpha_i(t)$ の時間発展には、

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{1}{t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \omega_j \sin[\alpha_i(t) - \alpha_j(t)] \quad (24)$$

で決定される。対称性条件(18)は、もしそれが $t=0$ で満たされていけば、 $t>0$ においても成立すること(20)、(22)から明らかであろう。高 Reynolds 数における Burgers 方程式(1)の漸近解はかくして(23)、(24)によって与えられる。乱流としての $u(x, t)$ の特性は、 ω_{i0} 、 $\alpha_i(1)$ の分布を指定する二つによって完全に決定される。

ここで注意しなくてはならない大事な点は、以上の取扱いは N が一定に保たれるということである。初期時刻 $t=0$ における連続函数 $u(x)$ から不連続な波形に移行する際、整える不連続面の細数は大体一周期 L の間に $du(x) > 0$ とする区間の細数は等しいと考えるべきであろう。ところが、不連続面の伝播速度 $c_i = d\alpha_i/dt$ が互いに等しくなるとか、不連続面同士の衝突が起こる。いま、渦度 ω_1 、 ω_2 、位相速度 c_1 、 c_2 の二つの波が衝突したとすると、衝突後は二つの波は合併して、

$$\omega' = \omega_1 + \omega_2, \quad c' = c_1 + c_2 \quad (25)$$

それぞれ渦度、位相速度とする一つの波になる。こうして、一回の衝突ごとに N は一つずつ減少する。しかし、 N は限り

なく減小するのではなく、その下限は大体、 c_1 がほとんど
 定数とすると0と等しい状態における N の値、つまり、最初
 の波形における $u(x) = 0$ の回数に等しいと考える。
 このようにして、 N が最初の $u(x)$ の極大(+)点の回数から
 0点の回数にまで減小していくとき、その減小の程度は最初
 の時機において大きく、後にはそれほど緩やかになるであろう。
 したがって、 $N = \text{一定}$ の仮定はこの減衰の初期において良好
 い近似で成立していると考えられる。以下の議論では、こ
 の「定常状態」の近似を採用し、 $N = \text{一定}$ として計算すること
 にする。

§4. 相関とスペクトル

一次元格子の場合 $u(x, t)$ が正弦波の周期性をもちな
 る、これをフーリエの定理に展開するこがで
 きる：

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t) e^{ikx}, \quad (26)$$

ここで、 $k = 2n\pi/L$ (n : 整数) は波数を表す。

u は実数であるから v_k は複素数で、

$$v_{-k} = v_k^*$$

で与えられる (これは共役複素数)。複素数 ψ_k の
 うち、絶対値 $|\psi_k|$ は波数 k の成分の振幅を、偏角 $\arg$
 ψ_k はその位相を表わしている。 ψ_k は、(26) の逆変換公
 式によつて、

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u(x, t) e^{-ikx} dx \quad (27)$$

で表わされる。

$u(x, t)$ が非規則な乱流流形をとることは、 ψ_k 、(それが
 72 変数 $|\psi_k|$, $\arg \psi_k$ か) を含む偶然量であることは知
 られる。したがつて、 $u(x, t)$ に関する統計的規則は、 $|\psi_k|$,
 $\arg \psi_k$ の確率分布を指定するによつて与えられる。
 ψ_k : 各統計量に関する変換公式を導いておくと、 $u(x)$
 があるとは ψ_k に分布が与えられると、それらに関する平均
 を $\langle \rangle$ で表わす。

平均:

$$\langle \psi_k \rangle = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \langle u(x) \rangle e^{-ikx} dx = 0. \quad (28)$$

ただし、考慮する乱流は平均をゼロとし、 $\langle u(x) \rangle = 0$, と仮定
 している。

相関:

$$\langle \psi_k \psi_{k'}^* \rangle = \frac{1}{L^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \langle u(x) u(x') \rangle e^{-i(kx - k'x')} dx dx'$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} C(r) e^{-ikr} dr & k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases} \quad (29)$$

== u,

$$C(r) = \langle u(x) u(x+r) \rangle \quad (30)$$

は相関函数で、一様な乱れにあっては α になる。

$C(r)$ が偶函数, $C(r) = C(-r)$, であることは一様性からの帰結である。

スペクトル:

$$\begin{aligned} E_k &= \langle |u_k|^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} C(r) e^{-ikr} dr \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} C(r) \cos kr dr \end{aligned} \quad (31)$$

エネルギー・スペクトルという。 $C(r)$ は (31) の逆変換にからず、

$$C(r) = 2 \sum_{k>0}^{\infty} E_k \cos kr \quad (32)$$

で表わされる。

周期 $L \rightarrow \infty$ の極限を考えると, E_k の極限は存在しない。

$$\sum_k E_k = E(k) \delta k \quad (33)$$

で表わされる函数 $E(k)$ の極限は存在するから, $E(k)$ エネルギー・スペクトル函数という。 $L \rightarrow \infty$ の極限において,

(31), (32) 式は互に逆変換の式になる:

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C(r) \cos kr \, dr. \quad (34)$$

$$C(r) = 2 \int_0^{\infty} E(k) \cos kr \, dk. \quad (35)$$

よって、単位質量あたり q 個の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} C(0) = \int_0^{\infty} E(k) \, dk \quad (36)$$

で与えられる。

1. Batchelor, G. K. (1953). The theory of homogeneous turbulence, Cambridge U. P.
2. Batchelor, G. K. (1967). An introduction to fluid dynamics, Cambridge U. P.
3. Burgers, J. M. (1950). Proc. Acad. Sci. Amsterdam 52, 247.
4. Deissler, R. G. (1958). Phys. Fluids, 1, 111.
5. Deissler, R. G. (1960). Phys. Fluids, 3, 176.
6. Goldstein, S. (1938). Modern developments in fluid dynamics, Vol. 1, Oxford U. P., (1965) Dover.
7. Kawahara, T. (1968). To be published in J. Phys. Soc. Japan.
8. Kraichnan, R. (1959). J. Fluid Mech. 5, 497.
9. Kraichnan, R. (1964). Phys. Fluids, 7, 1030.
10. Kraichnan, R. (1965). Phys. Fluids, 8, 575.
11. Lighthill, M. J. (1963). Laminar boundary layers (L. Rosenhead ed.), Ch. II.
12. Meecham, W. C. & Siegel, A. (1964). Phys. Fluids, 7, 1178.
13. Millionshtchikov, M. (1941). C. R. Acad. Sci. U. R. S. S. 32, 615.
14. Proudman, I. & Reid, W. H. (1954). Phil. Trans. A, 247, 163.
15. Tatsumi, T. (1954). Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 307.
16. Tatsumi, T. (1957). Proc. Roy. Soc. A, 239, 16.

