

Lie 群上の L^p -Fourier 変換における Hausdorff-Young 不等式について

鳥取大学 大学教育支援機構 教育センター 井上 順子 (Junko INOUE) *
Education Center, Organization for Supporting University Education,
Tottori University

概要

ユニモジュラー Lie 群 G 上の L^p -Fourier 変換は, G 上の L^p -関数の空間 $L^p(G)$ から G のユニタリ双対 $\widehat{G}$ 上の L^q 空間 $L^q(\widehat{G})$ への有界線型写像として定義される. ($1 < p \leq 2, q = p/(p-1)$) この写像の作用素ノルムを求める問題をとりあげ, $\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大, 冪零 Lie 群における結果等を中心に報告し, この問題の研究の一端を紹介する. ここで報告する最近の結果, 定理 3 および定理 7 は A. Baklouti との共同研究によるものである.

1 序

1.1 $\mathbb{R}^n$ における Hausdorff-Young 不等式

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における Fourier 解析の基本的な不等式の 1 つに Hausdorff-Young 不等式がある. いま, $\mathbb{R}^n$ の (標準) 内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し, $\mathbb{R}^n$ とその双対空間 $\mathbb{R}^{n*}$ を写像 $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto \langle \cdot, \xi \rangle$ により同一視する. このとき, $\mathbb{R}^n$ 上の可積分関数 $f = f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, ここで dx は Lebesgue 測度, の Fourier 変換を

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

で定義すると, $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx) \cap L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ に対して Parseval の等式

$$\|f\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\mu(\xi) =: \|\widehat{f}\|_2^2, \quad d\mu(\xi) = \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

が成り立つ. さらに, 指数 p ($1 < p \leq 2$), $q = p/(p-1)$ に対して Hausdorff-Young の不等式

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \quad (1)$$

* 本研究は JSPS 科研費 21540180 の助成を受けたものである.

が成り立ち, Fourier 変換 $f \mapsto \hat{f}$ は有界線型写像 $\mathcal{F}^p(\mathbb{R}^n) : L^p(\mathbb{R}^n, dx) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^{n*}, d\mu)$ に拡張される.

特に f が Gauss 関数 $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ の場合, $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\|\xi\|^2/2}$ であり, 等式

$$\|\hat{f}\|_q = A_p^n \|f\|_p, \quad \text{ただし} \quad A_p = \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ. 一方, 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ に対する, (1) より精密な不等式

$$\|\hat{f}\|_q \leq A_p^n \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つことが, 指数 $q = p/(p-1)$ が偶数の場合に Babenko [1] (1961) により証明され, その後 Beckner [5] (1975) により, $1 < p < 2$ を満たす全ての p に対して証明された. 言い換えると Fourier 変換の作用素ノルムは

$$\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R}^n)\| = A_p^n$$

であることが示されたことになる.

1.2 局所コンパクト, ユニモジュラー群における Hausdorff-Young 不等式

G を局所コンパクト, type I のユニモジュラー群とする. dg を Haar 測度, 指数 $1 \leq p$ に対して G 上の L^p -関数の空間を $L^p(G) = L^p(G, dg)$, G のユニタリ双対を $\hat{G}$ で表す. このとき, $f \in L^1(G)$ に対して π の表現空間上の作用素 $\pi(f)$ を

$$\pi(f) := \int_G f(g) \pi(g) dg, \quad f \in L^1(G), \quad \pi \in \hat{G}$$

により定義すると Abstract Plancherel 定理により, $\hat{G}$ 上の Borel 測度 $d\mu$ が存在して等式

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \text{Tr}(\pi(f)^* \pi(f)) d\mu(\pi)$$

が任意の $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対して成り立つ. G 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を L^1 -関数 f から $\hat{G}$ 上の有界作用素値 μ -可測場 $\mathcal{F}f$ への写像

$$L^1(G) \ni f \mapsto \mathcal{F}f : \quad \mathcal{F}f(\pi) = \pi(f), \quad \pi \in \hat{G}$$

で定義する. 一般に, 指数 $r \geq 1$, $\hat{G}$ 上の有界作用素値 μ -可測場 F に対して

$$\|F\|_r := \left(\int_{\hat{G}} \|F(\pi)\|_{c_r}^r d\mu(\pi) \right)^{\frac{1}{r}},$$

ここで $\|F(\pi)\|_{c_r} := (\text{Tr}(F(\pi)^* F(\pi))^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{r}} : \text{Schatten ノルム}$

とし, $\|F\|_r < \infty$ である μ -可測場 F がなす Banach 空間を $L^r(\widehat{G})$ で表す. このとき, Kunze による Hausdorff-Young 型定理 [10] により $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$, $f \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対して $\mathcal{F}f \in L^q(\widehat{G})$ であり, 不等式

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq \|f\|_p$$

が成り立ち, 有界線型写像 (L^p -Fourier 変換) $\mathcal{F}^p = \mathcal{F}^p(G) : L^p(G) \rightarrow L^q(\widehat{G})$ が得られる. 以上の設定のもとで, この講義録では L^p -Fourier 変換 $\mathcal{F}^p$ ($1 < p < 2$) の作用素ノルム

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| := \sup_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{F}^p f\|_q}{\|f\|_p}$$

を求める問題を考える.

$G = \mathbb{R}^n$ の場合, $\mathcal{F}$ は通常の Fourier 変換であり, 1.1 節で述べたように $\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R}^n)\| = A_p^n$ が全ての $1 < p < 2$ において成り立つ.

一方, G がコンパクト群の場合, 定数関数 f により $\|\mathcal{F}^p f\|_q = \|f\|_p$ であるから $\|\mathcal{F}^p(G)\| = 1$ である. さらに, Fournier [6](1977) はノルム $\|\mathcal{F}^p(G)\| < 1$ の必要十分条件は, G がコンパクト開部分群を持たないことであることを示した.

コンパクト開部分群を持たない非可換なユニモジュラー群に対しては, Russo による初期の一連の研究を始めとして, これまで個々の群, 群のクラス, あるいは特別な指数 p など様々な枠組みにおいて L^p -Fourier 変換のノルムの計算や上からの評価などが試みられている. 例えば指数 p の共役指数 $q = p/(p-1)$ が偶数である場合, Klein-Russo [9] は半直積群に対し, その構成因子を用いてノルムの上からの評価を得た.

定理 1 (Klein-Russo [9]) $G = A \rtimes X$ は局所コンパクト, ユニモジュラー群 A と X の半直積であり, G もユニモジュラーとする. このとき, 指数 p の共役指数 q が偶数, 即ち $p = \frac{2k}{2k-1}$ (k は整数で $k \geq 2$) の場合は不等式

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq \|\mathcal{F}^p(A)\| \|\mathcal{F}^p(X)\|$$

が成り立つ.

2 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大における結果

一般にコンパクト拡大に関しては, 上記の定理 1 およびコンパクト群の L^p -Fourier 変換のノルムが 1 であることから, q が偶数の場合は, 上からの評価が得られる.

定理 2 (Russo [14]) 可分な局所コンパクト, ユニモジュラー群 G が, ユニモジュラー, type I の閉正規部分群 N で G/N がコンパクト群となるものを持つとする. このとき, p

($1 < p < 2$) の共役指数 $q = p/(p-1)$ が偶数の場合, 不等式

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq \|\mathcal{F}^p(N)\|$$

が成り立つ.

これに対して, Baklouti-Inoue [3] では $\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大 G を対象とし, 任意の $1 < p < 2$ に対して L^p -Fourier 変換のノルムを求めることが出来た. この結果は, 第3節で述べる冪零 Lie 群を対象とするノルムの評価計算のうち多くの場合と同様, Russo [13] および Fournier-Russo [7] による, 積分作用素の Schatten ノルムに関する Hausdorff-Young 型不等式に基づくものである.

定理 3 (Baklouti-Inoue [3]) $G = A \rtimes K$ は $A = \mathbb{R}^n$ とコンパクト群 K との半直積, $1 < p < 2$ とする. このとき,

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| = A_p^n$$

である.

証明は [3] 参照. 特にこの場合は, A 上 K -不変な内積を導入して定める Gauss 関数 g を K 上定数として G に拡張した関数 $f = 1_K \otimes g$ (1_K は K 上の定数 ($=1$) 関数) に対して, $\|\mathcal{F}^p f\|_q = A_p^n \|f\|_p$ が成り立つ (即ち f は extremal function) ことを注意しておく.

3 冪零 Lie 群における Hausdorff-Young 不等式

3.1 連結かつ単連結な冪零 Lie 群の場合

G を連結かつ単連結な冪零 Lie 群, その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする. この場合には, Russo [11] (1974), [12] (1976), [13] (1977), Klein-Russo [9] (1978), Inoue [8] (1992), Baklouti-Smaoui-Ludwig [4] (2003) 等これまでの様々な設定での研究が関連している. ノルムの上からの評価について, 単連結冪零 Lie 群全体を対象とし全ての p ($1 < p < 2$) に適用される評価としては, 以下の Baklouti-Smaoui-Ludwig によるものがある. まず, 単連結冪零 Lie 群においては, Kirillov の orbit method により, $\widehat{G}$ は G の余随伴軌道 $\mathfrak{g}^*/G$ と同一視されることに注意する.

定理 4 (Baklouti-Smaoui-Ludwig [4]) G を連結, 単連結な冪零 Lie 群, $1 < p < 2$ とする. このとき,

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq A_p^{\dim(G) - \frac{m}{2}}$$

が成り立つ. ここで $m := \sup\{\dim(\text{Ad}^*(G) \cdot l); l \in \mathfrak{g}^*\}$ である.

これは、前述の、Russo, Fournier-Russo の積分作用素の Hausdorff-Young 型不等式を利用して得られる。一方、 G は余次元 1 の正規部分群と $\mathbb{R}$ による半直積で表されることから、共役指数 q が偶数の場合に限れば、定理 1 を適用して定理 4 より良い評価が得られる：

定理 5 (Klein-Russo [9]) G を連結、単連結な冪零 Lie 群、 $1 < p < 2$ とする。さらに q が偶数のとき、即ち、 $p = 2k/(2k-1)$ ($k = 2, 3, 4, \dots$) と表せるとき、

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq A_p^{\dim(G)}.$$

ノルムの決定について考察する際、可換群 $\mathbb{R}^n$ 、コンパクト群、 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大の場合は、extremal function が存在してノルムの下からの評価が得られたが、冪零 Lie 群の場合は状況が異なる。このことは、Klein-Russo [9] が Heisenberg 群におけるノルムを q が偶数の場合に決定して指摘した：

定理 6 (Klein-Russo [9]) 指数 p は $p = 2k/(2k-1)$ (k は 2 以上の整数) であるとする。 G を $2n+1$ 次元の Heisenberg 群とする。このとき、

$$(i) \|\mathcal{F}^p(G)\| = A_p^{2n+1}.$$

(ii) extremal function は存在しない、即ち、 $\|\mathcal{F}^p f\|_q = A_p^{2n+1} \|f\|_p$ ならば、 f は殆どいたるところ $f = 0$ である。

3.2 一般の連結冪零 Lie 群における結果

[2] では単連結とは限らない一般の連結冪零 Lie 群に対して、定理 4 を拡張した。

定理 7 (Baklouti-Inoue [2]) G を連結冪零 Lie 群、 $\tilde{G}$ をその普遍被覆群、 H を G の極大コンパクト部分群とする。このとき、

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq A_p^{\dim(G/H) - \frac{m}{2}}$$

が成り立つ。ここで $m := \sup\{\dim(\text{Ad}^*(\tilde{G}) \cdot l); l \in \mathfrak{g}^*\}$ である。

これも、前述の、Russo, Fournier-Russo の積分作用素の Hausdorff-Young 型不等式から得られる評価である。例えば G を Heisenberg 群の離散部分群による商群とする。即ち、 $\mathfrak{g}_{2n+1}$ を $2n+1$ 次元 Heisenberg Lie 環とし、その中心を $\mathfrak{z} = \mathbb{R}\text{-span}\{Z\} = \mathbb{R}Z$ で表し、 $\mathfrak{g}_{2n+1}$ に対応する連結単連結 Lie 群 $G_{2n+1} := \exp(\mathfrak{g}_{2n+1})$ の中心 $\exp(\mathfrak{z})$ に含まれる離散部分群 $\Gamma = \exp(\mathbb{Z}Z)$ をとり、 $G := G_{2n+1}/\Gamma$ を考える。 G の極大コンパクト部分群は $\exp(\mathfrak{z})/\Gamma \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ であり、 $\tilde{G} = G_{2n+1}$ の余随伴軌道の次元の最大値は $2n$ であるから、定理 7 を適用すれば上からの評価 $\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq A_p^n$ が得られる。特に $n = 1$ の場合、即ち 3 次

元 Heisenberg 群の商群に関しては, Russo が [13] においてノルムの上からの評価値 A_p を得たが, これはその計算と同様のものになる. 現在分かっていることはここまでであるが, 単連結な群における不等式等を参照すると, 定理 7 の値も最良ではないと推測される.

参考文献

- [1] K. I. Babenko, An inequality in the theory of Fourier integrals, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **25** (1961), 531–542.
- [2] A. Baklouti and J. Inoue, Estimate of the L^p -Fourier transform norm for connected nilpotent Lie groups, *Adv. Pure Appl. Math.* **2** (2011), no. 3-4, 467–483.
- [3] A. Baklouti and J. Inoue, On the norm of the L^p -Fourier transform on compact extensions of $\mathbb{R}^n$, to appear in *Forum Math.*
- [4] A. Baklouti, K. Smaoui and J. Ludwig, Estimate of the L^p -Fourier transform norm on nilpotent Lie groups, *J. Funct. Anal.* **199** (2003), no. 2, 508–520.
- [5] W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis, *Ann. of Math. (2)* **102** (1975), no. 1, 159–182.
- [6] J. J. F. Fournier, Sharpness in Young’s inequality for convolution, *Pacific J. Math.* **72** (1977), no. 2, 383–397.
- [7] J. J. F. Fournier and B. Russo, Abstract interpolation and operator-valued kernels, *J. London Math. Soc. (2)* **16** (1977), no. 2, 283–289.
- [8] J. Inoue, L^p -Fourier transforms on nilpotent Lie groups and solvable Lie groups acting on Siegel domains, *Pacific J. Math.* **155** (1992), no. 2, 295–318.
- [9] A. Klein and B. Russo, Sharp inequalities for Weyl operators and Heisenberg groups, *Math. Ann.* **235** (1978), no. 2, 175–194.
- [10] R. A. Kunze, L^p -Fourier transforms on locally compact unimodular groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **89** (1958), 519–540.
- [11] B. Russo, The norm of the L^p -Fourier transform on unimodular groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **192** (1974), 293–305.
- [12] B. Russo, The norm of the L^p -Fourier transform. II, *Canad. J. Math.* **28** (1976), no. 6, 1121–1131.
- [13] B. Russo, On the Hausdorff-Young theorem for integral operators, *Pacific J. Math.* **68** (1977), no. 1, 241–253.
- [14] B. Russo, The norm of the L^p -Fourier transform. III. Compact extensions, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), no. 2, 162–178.