

Non-orientable closed manifold の
Orientable manifold の中への写像について

関孝 M2 崎田広造

証明したいことは、次の定理およびその系である。

[定理] M^n を closed connected non-orientable
PL n -manifold, N^{n+1} を $H_n(N; \mathbb{Z}_2) = 0$ を満たす
orientable PL $n+1$ -manifold とし, $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$ を任
意の PL map とする。また, $N(S_2(f); M)$ を singular set
 $S_2(f)$ の M^n における regular neighborhood とする。
その時 $\alpha\{M^n - N(S_2(f); M)\} = \sum_1 \cup \sum_2 \cup \dots \cup \sum_r$

但し $\sum_i \cap \sum_j = \emptyset$ if $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$
と書くことができ、各 $\sum_i$ は, compact orientable
PL manifold with boundary になる。

[系] M^n は N^{n+1} に embed できない。

定理を証明する前に、次の Lemma を証明しておく。

[Lemma] 前述の N^{n+1} に含まれる n 次元 solid Klein Bottle $S^1 \times \mathbb{R} B^{n-1}$ を T^n とする。また, T^n の境界 $\partial T^n (= S^1 \times \mathbb{R} S^{n-2})$ を C^{n-1} とする。この T^n の core, 即ち $\text{Int } B^{n-1}$ から 1 点 y をとり, $y \times S^1$ を考え, これを k とする。その時, $\text{Link}[C^{n-1}, k] = 1 \pmod{2}$ in N^{n+1}

[証明]

k の N^{n+1} における regular neighborhood $N(k; N^{n+1})$ を K とする。 N^{n+1} が orientable であるから, 明らかに K は $n+1$ 次元 solid torus である。また, k 上の任意の 1 点 x の N^{n+1} における regular neighborhood $N(x; N^{n+1})$ を D とすると, これは, 明らかに $n+1$ -ball である。故に, x を始点とする 1 次独立で, どの 2 つも互いに直交する $n+1$ 個の vectors, $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ が, この $n+1$ -ball D の中でとれて, e_1 は k 上の vector, $e_1, e_2, \dots, e_n$ は T^n の中で直交するようにできる。そこで, 点 x より始まって, k を ∂K^{n+1} まで e^{n+1} 方向に動かすことを考える。 x より少し e_1 方向に動いた k 上の点 $x+\varepsilon$ において, $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ であった vector は, k に沿って, T^n を一周してくると, $x-\varepsilon$ において, $e_1, -e_2, -e_3, \dots, -e_n, -e_{n+1}$ となっている。何故ならば, k は S^1 と homeomorphic であるから, k 上の vector e_1 は一周してきて, やはり e_1 である。次に, $e_1, e_2, \dots, e_n$ は, non-

orientable manifold $T^n = S^1 \times \tau B^{n-1}$ 中の直交する vectors であって、一周してきても、 e_1 は変らないから、他の vectors $e_2, e_3, \dots, e_n$ の符号は反対になる。そして、最後に、例えば、 $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ を右手系にとっておくと、 N^{n+1} は orientable であるから、 k に沿って、 T^n を一周しても、 $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ が右手系であることには変りはない。一周すると $e_1, -e_2, -e_3, \dots, -e_n$ となるから、 e_{n+1} も $-e_{n+1}$ となる。そうすれば、 $e_1, -e_2, \dots, -e_n, -e_{n+1}$ は始めの右手系と一致する。

故に、 D 内では、 $D \cap T$ が hyperplane となっていて、この n 次元 hyperplane $D \cap T$ の両側に k は押し出されたことになる。換言すると、 $\dot{D} \approx R^{n+1}$ 、 $\dot{D} \cap T \approx R^n$ であって、 R^{n+1} の n 次元 hyperplane R^n の両側に k は押し出されたことになる。だから、 k は $\dot{D} \cap T$ と少なくとも、奇数個の点で交わることになる。故に、 k と T^n との Intersection number は $1 \bmod 2$ となる。 $\partial T^n = C^{n-1}$ であるから、 k と C^{n-1} との Linking number も $1 \bmod 2$ となる。即ち

$$\text{Link } k [C^{n-1}, k] = 1 \bmod 2 \text{ in } N^{n+1}$$

Q.E.D.

この場合、 T^n は、non-orientable であるから、 $\bmod 2$ で考えた。そして、 C^{n-1} を bound する complex (この場合、 T^n) のとり方にも依らないことが必要であるから、

$H_n(N^{n+1}; \mathbb{Z}_2) = 0$ が必要であった。だから、証明では、 K を動かしたが、逆に、 K を固定して、 T^n を動かすと考えてもよい。

[定理の証明]

M^n の三角形分割を K とする。

ある i に対して、もし Σ_i が non-orientable と仮定すると次のような n 次元 solid Klein Bottle T^n が Σ_i の中に存在する。すなわち、 Σ_i の中には、次の条件(1)(2)を満たす n -simplex の有限列 $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m, \Delta_{m+1} = \Delta$ が必ず存在する。

(1) $1 \leq i \leq m-1$ なる i に対して、 Δ_i と Δ_{i+1} は共通の $(n-1)$ -face Δ_i^{n-1} をもち、且つ同調している。

(2) Δ_m と Δ_{m+1} は共通の $(n-1)$ -face Δ_m^{n-1} をもつが、同調はしていない。

このような n -simplex の有限列は M^n の分割にかかわらず必ず存在する。 $T^n = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$ とすると、作り方より、 T^n は non-orientable compact connected PL n -manifold であって、 $T^n = S^1 \times \tau B^{n-1}$ となる。

$cl[M^n - T^n] = A^n$ とおくと、 $\partial T^n = \partial A^n$ となり、これを C^{n-1} とおく。明らかに、 $C^{n-1} = \partial T^n = S^1 \times \tau S^{n-2}$ であって

closed connected non-orientable PL $(n-1)$ -manifold
である。

T' を T^n の first derived subdivision とする。

$\Delta_i^{*n}, \Delta_i^{*(n-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) をそれぞれ, $\Delta_i^n, \Delta_i^{n-1}$ の重心と
する。 Δ_i^* と Δ_i^* を結ぶ T' の 1-simplex を P_i とする。 Δ_i^* と Δ_{i+1}^*
を結ぶ T' の 1-simplex を g_i とする。 $k = (P_1 \cup g_1) \cup (P_2 \cup g_2)$
 $\cup \dots \cup (P_m \cup g_m)$ とおくと, 明らかに, k は $S^1 \times (\text{int } B^n \text{ の 1 点})$ に T^n の中で isotopic である。今 $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$
を任意の PL map とすると, Σ_i の作り方より, (0 は内部)

$f(\dot{T}) \cap f(A) = \emptyset$ であり, また singular set
 $S_2(f|Z_i) = \emptyset$ であるから, $f|Z_i$ は embedding である
故に, $f|T$ も embedding となる。以上のことより $f(c^{n-1})$
は $N^{n+1} - f(\dot{T})$ で $f(A^n)$ を bound するから

$$\boxed{1} \quad f(c^{n-1}) \sim 0 \pmod{2} \text{ in } N^{n+1} - f(k)$$

(' $\sim$ ' means "homologous")

一方, Lemma より

$$\text{Link}[f(c^{n-1}), f(k)] = 1 \pmod{2} \text{ in } N^{n+1}$$

$$\boxed{2} \quad \therefore f(c^{n-1}) \not\sim 0 \pmod{2} \text{ in } N^{n+1} - f(k)$$

$\boxed{1}, \boxed{2}$ より矛盾が出る。

故に, Σ_i ($i = 1, 2, \dots, r$) は orientable manifold
である。

Q.E.D.

[系の証明]

もし, M^n が N^{n+1} に embed できたとすると, $S_2(f) = \emptyset$ によって, $M^n = \Sigma_1$ となり, 矛盾である。何故ならば, M^n は non-orientable であり, また, 定理より, Σ_1 は orientable となるから。 Q.E.D.

応用例

- (1) 2次元 non-orientable manifold P_n は homology sphere の中に embed できない。
- (2) 2次元 non-orientable manifold P_n は Lens space $L(2m+1, \pm 1)$ の中に embed できない。

$\because H_1(L) = \mathbb{Z}_{2m+1}$, $H_2(L) = 0$ であるから,
universal coefficient theorem によって
 $H_2(L; \mathbb{Z}_2) = 0 \otimes \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_{2m+1} * \mathbb{Z}_2 = 0$