

K3 曲面の Enriques 商の個数について

京都大理 大橋 久範

e-mail : pioggia@kurims.kyoto-u.ac.jp

§ 定義

X, Y はコンパクト kähler 複素二次元多様体とする.

- X が $K_X \sim 0$, $\pi_1(X) = 1$ を満たすとき,
これを K3 曲面 という.
- Y が $2K_Y \sim 0$, $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を満たすとき,
これを Enriques 曲面 という.

Enriques 曲面とは、K3 曲面を自由対合で割って得られる曲面のこと、と言っても同じである。

§ 主定理

Enriques 曲面のモジュライ空間は、その被覆 K3 曲面の周期を経由して構成される。だが逆に、K3 曲面の同型類から得られる Enriques 曲面は

高々一つとは限らない。以下の定理は、この対応関係に関するものである。

定理1 任意の自然数 n に対して、 n よりも多くの非同型な Enriques 商をもつ $K3$ 曲面が存在する。

この定理における $K3$ 曲面は周期の存在はわかるものの、具体的な表示は与えられていない。

定理2 $K3$ 曲面 X に対して、 $\text{Aut}(X)$ の中の位数有限の元のなす共役類の個数は、有限である。

系 X のもつ、非同型な Enriques 商は有限個。

注 $K3$ 曲面 X で、非同型な2つの Enriques 商を持つものの最初の例は、金銅 [1] により与えられた。

定理1の証明では、周期を用いて与えられた $K3$ 曲面 X の Neron-Severi 格子 $NS(X)$ の情報から、 X の Enriques 商の数え上げを行う。同じ方法が積型の Kummer 曲面について適用できる。

定理3 積型 Kummer 曲面 X の周期が、十分一般の位置にあると仮定する。このとき X は ちょうど 15 個の非同型な Enriques 商をもつ。これらは Lieberman 対合, 金銅-向井対合において適当なパラメータをとることにより全て構成できる。

上に挙げた二種類の対合については、後の § で説明する。

§ Enriques 商を数える方法.

- まず 次の対応に注意する。

$$\{ \text{Enriques 商の同型類} \} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Aut}(X) \text{ の中の 共役類} \\ \text{で、自由対合からなるもの} \end{array} \right.$$

これは、 X の Enriques 商 Y の 自己同型が
つねに X に持ち上がることからわかる。

- Torelli の定理を用いて、自由対合 i とその
 $H^2(X, \mathbb{Z})$ への作用を同一視する。さらに、
 i が位数 2 であることから、この作用は
固定される部分格子 $M \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ で決まる。

このことから、以降、 M から定まる $H^2(X, \mathbb{Z})$ の
対合を $i = i_M$ と書くことにする。

- 自由対合の固定部分 M について 次の事実を使う。

(A) M は $U(2) \oplus E_8(2)$ に同型な

$NS(X)$ の原始的な部分格子である。

(B) $M^\perp \cap NS(X)$ は 長さ -2 の元を含まない.

(C) M は 豊富因子を含む.

逆に上の (A) - (C) をみたす $NS(X)$ の部分格子 M が与えられたとき、 i_M は 自由対合から引き起こされていることが Torelli の定理からわかる。

- $g \in \text{Aut}(X)$ による共役関係 $g i_{M_1} g^{-1} = i_{M_2}$ は、 $g(M_1) = M_2$ と同じことである。従って

問題は 「(A) ~ (C) をみたす M の全体の中で、

$\text{Aut}(X)$ によりうつり合わないものの個数」を求めることになる。これは、 $NS(X)$ の格子としての自己同型群 $O(NS)$ を 中間 にはさむことにより、計算できる形の表示式が得られる。

$$\mathcal{M} = \left\{ M \subset NS \mid \text{上の (A), (B) をみたす部分格子} \right\}$$

とおく。これには $\text{Aut}(X)$ だけでなく $O(NS)$ 全体が作用できる。 $O(NS) \curvearrowright \mathcal{M}$ の作用の完全代表系を $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{M}$ とおく。

公式 $j=1, 2, \dots, k$ に対し.

$$K^{(j)} = \{ \varphi \in O(NS) \mid \varphi(M_j) = M_j \}$$

とおき、この $K^{(j)}$ の、標準的な準同型

$$\sigma : O(NS) \longrightarrow O(q_{NS})$$

により像を $\sigma(K^{(j)})$ とおく。このとき.

$$B_0 = \sum_{j=1}^k \#(O(q_{NS}) / \sigma(K^{(j)}))$$

について.

(1) X の非同型な Enriques 商の個数は高々 B_0 個である.

(2) X について, ① σ が全射 かつ ② $\text{Aut}(T_x, \omega_x) = \{\pm \text{id}\}$

と仮定すると, X はちょうど B_0 個の非同型な Enriques 商をもつ.

(記号について: q_{NS} は非退化格子 $NS(X)$ の判別形式を表す, [3] 参照.

- $T_x = NS(X)^\perp \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ は超越格子
- $\omega_x \in T_x \otimes \mathbb{C}$ は X の周期

証明には Weyl 群に関する事実が用いられる。

定義 • $O(NS)$ の中で、長さ -2 の元に関する鏡映全体から生成される部分群を W_X と書き、 X の Weyl 群という

- $O(NS)$ の元で、有効因子の全体を保つものなる部分群を $O^+(NS)$ と書く。

このとき、 $O(NS)$ は次のように分解される。

$$O(NS) = \{\pm 1\} \times W_X \rtimes O^+(NS)$$

$O^+(NS)$ は、 $O(NS)$ の中で豊富因子を豊富因子にうつすものの全体と一致することと注意すると、前ページの公式はこの分解を用いて単純な計算を繰り返すことで得られる。

(注) (2) の条件②は、 X の周期が十分一般の位置にあればなりたつ。

§ 定理1 について.

計算はとばして. 結果だけ書く. X の周期は
十分一般の位置にあるとする.

場合 I $NS(X) \cong U(2) \oplus E_8(2) \oplus \langle -2N \rangle$

$N \geq 2$, $2N = 2^e p_1^{e_1} \cdots p_l^{e_l}$ の場合.

$$B_0 = \begin{cases} 2^{l-1} & (e=1) \\ (2^5+1) 2^{l+4} & (e=2) \\ 2^{l+10} & (e \geq 3) \end{cases}$$

場合 II $NS(X) \cong U \oplus E_8(2) \oplus \langle -4M \rangle$

$M \geq 1$, $4M = 2^e p_1^{e_1} \cdots p_l^{e_l}$ の場合

$$B_0 = \begin{cases} 1 & (e=2, l=0) \\ 2^{l-1} & (e=2, l>0) \\ 2^{2l+5} & (e \geq 3) \end{cases}$$

つまり, すべての $l \geq 0$ に対し, (例えば) 2^{l+10} 個
の Enriques 商をもつ 3 曲面 X が存在する.

§ 積型の Kummer 曲面の場合

まず、向井 による [1] の例の一般化を紹介する。

構成: 2つの楕円曲線 C_1, C_2 から アーベル曲面

$A = C_1 \times C_2$, 商 $\bar{X} = A / \{\pm 1\}$ をつくる。 $\bar{X}$ の

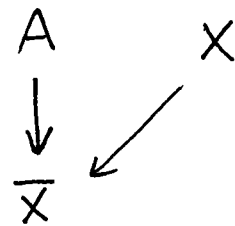
最小特異点解消 X は K3 曲面であり、積型の Kummer 曲面と呼ばれる。

2つの射影 $\text{pr}_i: A \rightarrow C_i$

は $\{\pm 1\}$ による商と可換なので、

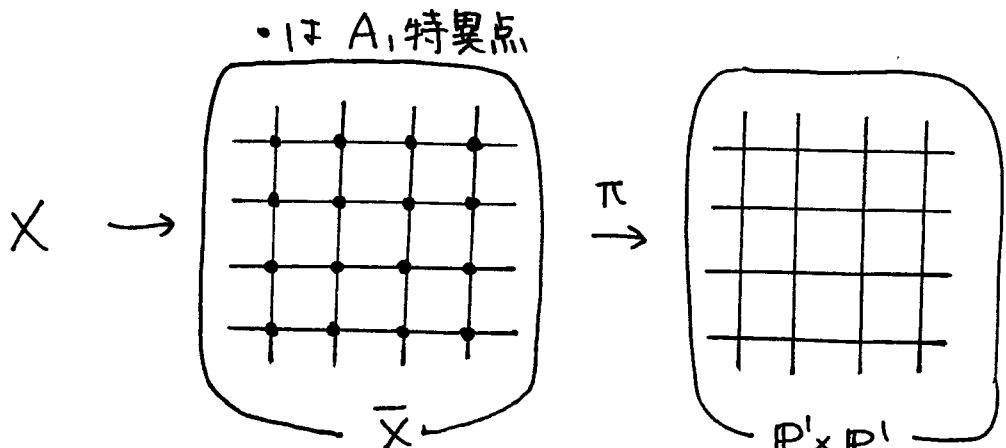
自然に $\pi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ なる

$$(\mathbb{P}^1 = C_i / \{\pm 1\})$$



次数 2 の写像を引き起こす。これは $\bar{X}$ を経由し、

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の $(4, 4)$ 因子に沿って分岐する。(図)

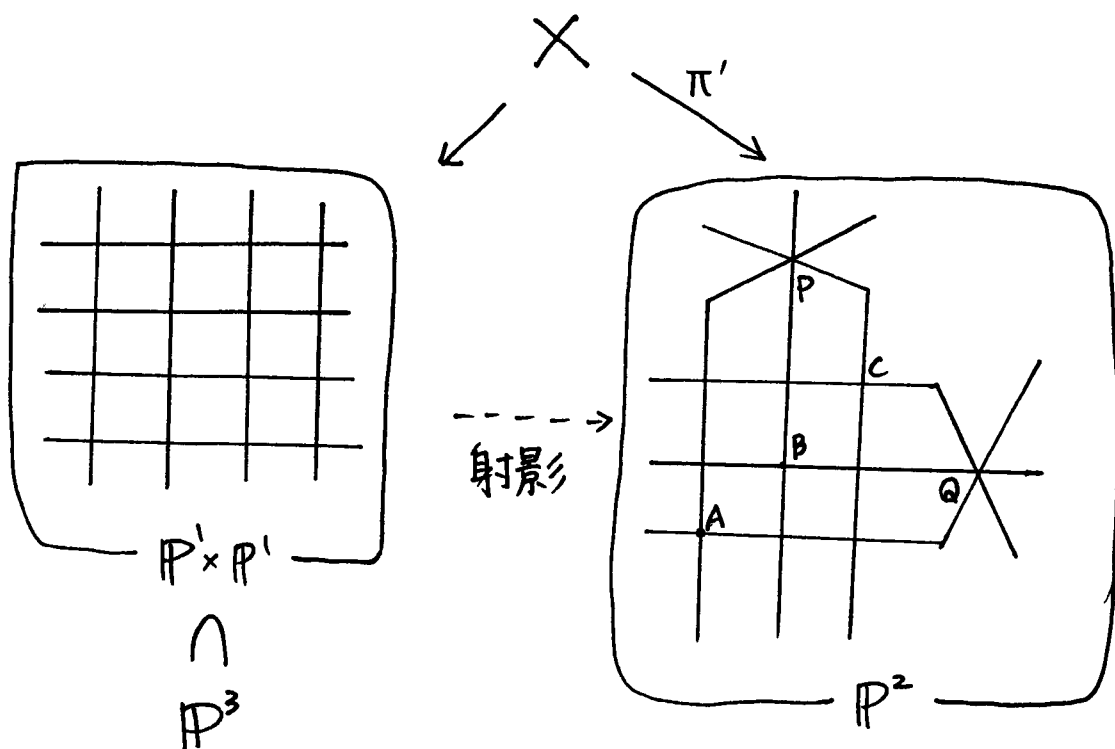


ここで、 C_i の位数2以下の点を $(C_0^{(i)}=0, C_1^{(i)}, \dots, C_3^{(i)})$ ¹⁰ といったとき、図の8本の直線は A 上の8本の楕円曲線 $C_1 \times \{C_i^{(2)}\}, \{C_i^{(1)}\} \times C_2$ ($i=1,2,3,4$) の像を表している。

- Lieberman対応: π の被覆変換を σ とおく。

A の点、 $C = (C_i^{(1)}, C_j^{(2)})$ ($i, j \geq 1$) をとり、これによる平行移動を $C: X \rightarrow X$ とおく。このとき σC は自由対応

- 金銅-向井対応: 上で出た $P' \times P'$ と P^3 の二次超曲面とし、これを図の16個の交点のうちの一つ (右上の点とする) から P^3 の超平面 $\cong P^2$ 上に射影する。



π' は、 $\mathbb{P}^2$ の 6 本の直線で分岐する二重被覆に、特異点解消を合成したものである。(図)

P, Q は射影により縮約される 2 本の直線の像とする。 σ' を π' の被覆変換とする。

いま、 $\mathbb{P}^2$ の Cremona 変換 $C': (x, y, z) \mapsto (\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z})$ で図の A, B, C を中心とし P と Q を入れ替えるものが唯一つ決まる。すると $\sigma' C'$ は自由対合である。■

はじめの楕円曲線を十分一般にとった場合、

$$NS(X) \cong U \oplus E_8 \oplus D_4^{\oplus 2}$$

となる。定理 3 は、「公式」を用いて Enriques 商の個数 n が 15 個であることをまず示し、次に上述の 2 種類の対合が、パラメータを含めると 15 個の Enriques 商を表すことを示す、という方法で示される。

以下、「公式」を適用しようとする際の重要な

ステップとなる。「 $M \in \mathcal{M}$ の NS の中での直交補空間¹² の決定」について述べる。

主張 $M = U(2) \oplus E_8(2)$ が $S = U \oplus E_8 \oplus D_4^{\oplus 2}$ に原始的に埋め込まれていて、 $M^\perp = K$ が長さ -2 の元をもたないとしたら、 $K \cong E_8(2)$

M により定まる Enriques 曲面 Y が、 $H^2(Y, \mathbb{Q})$ に自明に作用する対合をもつことに注意すると、

この主張は [4] の中の補題からわかるが、

判別形式を用いて直接計算する方法もあり、

適用例を少しだけ増やせる利点もあるのだ。これを紹介する。

(証明)

まず、判別形式 $q_S \cong U(2)^{\oplus 2}$, $q_M \cong U(2)^{\oplus 5}$

($U(2) = q_{U(2)}$) がともに整数値をとるから、

q_K も整数値の形式である。従って、有限二次形式の分類から $q_K \cong U(2)^{\oplus a} \oplus V(2)^{\oplus b}$ ($b=0, 1$)

とかける ($V(2) = q_{D_4}$, [3] 参照)。

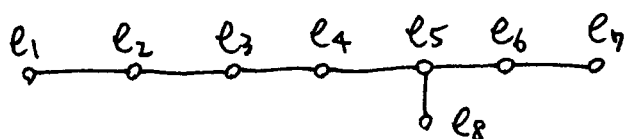
有限二次形式の、8を法とする符号数を確かめると、

$$\text{sign. } q_K = 0 \quad \text{for}$$

$$q_K \cong u(2)^{\oplus a} \quad (a=0,1,2,3)$$

のどれかである。どの場合にも、 K は E_8 の中に有限指数で入っていることがわかる。

一方、 E_8 の基底を下図のようにとる。



$$E_8 \text{ の元 } f_0 = 0, \quad f_j = e_1 + \dots + e_j, \quad 1 \leq j \leq 7$$

$$, \quad f_8 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_4 + 6e_5 + 4e_6 + 2e_7 + 3e_8$$

を考えると、すべての差 $f_i - f_j$ は長さ -2 をもつ。

K は長さ -2 の元をもたないことから、 f_i はどの2つも、 K を法として合同でないことがわかり、

$$[E_8 : K] \geq 9 \quad \text{が得られ、} \quad q_K \cong u(2)^{\oplus 4} \text{ となる。}$$

従って、 $K(\frac{1}{2})$ は整数値の格子であることがわかり、

$$K(\frac{1}{2}) \cong E_8, \quad K \cong E_8(2) \text{ がわかる。} \quad \square$$

参考文献

- [1] Kondo, S., Enriques surfaces with
finite automorphism groups,
Japan. J. Math., 12 (1986), 192-282
- [2] Nikulin, V.V., Finite automorphism
groups of kähler k3 surfaces
(English translation),
Trans. Moscow Math. Soc. Issue 2
(1980), 75-137.
- [3] Nikulin, V.V., Integral bilinear forms
and some of their applications
(English translation).
J. Soviet Math., 22 (1983), 1401-1476
- [4] Mukai, S., Namikawa, Y., Automorphisms of
Enriques surfaces which act trivially on
the cohomology groups
Invent. Math., 77 (1984), 383-397