

ペキシダー化された波動型偏差分関数方程式と 関連する関数方程式

Shigeru Haruki (岡山理科大学 春木 茂)

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Okayama University of Science, JAPAN.

Shin-ichi Nakagiri (神戸大学工学部 中桐 信一)

Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Kobe University, JAPAN.

1. 波動型偏差分関数方程式

次の波動型偏差分関数方程式を考える。

$$f(x+t, y) + f(x-t, y) = f(x, y+t) + f(x, y-t). \quad (W1)$$

論文 J. Aczél, H. Haruki, M. A. McKiernan and G. N. Sakovič 1968 [1, p.46] の出現以来、上の偏差分関数方程式 (W1) 及びその類似の波動型関数方程式に対し、その代数的および幾何学構造が多くの文献で研究されている。例えば、論文 M. A. McKiernan 1972 [9]、D. Girod 1973 [2] 及び H. Haruki 1970 [4] とそこで引用されている文献を見られたい。

$(G, +)$ を 2 で割れるアーベル群とし、 C を複素数体とする。このノートの最初の目的は、次の 2 つの関数方程式が $f: G \times G \rightarrow C$ なる仮定のもとで波動型関数方程式 (W1) と同値である事を示す事である。

$$\begin{aligned} f(x+t, y+t) + f(x+t, y-t) + f(x-t, y+t) + f(x-t, y-t) \\ = f(x+2t, y) + f(x-2t, y) + 2f(x, y). \end{aligned} \quad (W2)$$

$$\begin{aligned} f(x+t, y+t) + f(x+t, y-t) + f(x-t, y+t) + f(x-t, y-t) \\ = f(x, y+2t) + f(x, y-2t) + 2f(x, y). \end{aligned} \quad (W3)$$

さて、論文 [4, p.118] 及び [9, p.263] において次のことが示されている。変換

$$g(x, y) = f(x+y, x-y) \quad (1.1)$$

により、波動型関数方程式 (W1) は次の関数方程式に変換される。

$$g(x+t, y+t) + g(x-t, y-t) = g(x+t, y-t) + g(x-t, y+t). \quad (W4)$$

それ故、方程式 (W1) と (W4) は変換 (1.1) により同じものと見なせる。

未発表ノート H. Haruki [3] (日付 Jan. 24, 1969) において、彼は次の未解決問題を提示している。

(H-1) 次の関数方程式の解を求めよ。

$$f_1(x+t, y+t) + f_2(x-t, y-t) = f_1(x+t, y-t) + f_2(x-t, y+t). \quad (P1)$$

このノートの次の目的は、上の問題 (H-1) を以下の4節で得られる一般的な結果を用いる事なく解く事である。即ち、3節において $f_1, f_2: G \times G \rightarrow C$ なる仮定のもとで、(P1) の一般解を求める。H. Haruki はまた [3] (日付 March 14, 1968) において次の未解決問題を挙げている。

(H-2) 次の関数方程式を満足する関数 f_1, f_2, f_3 及び f_4 を、全ての f_1, f_2, f_3, f_4 が連続であるという仮定のもとで決定せよ。

$$f_1(x+t, y) + f_2(x-t, y) = f_3(x, y+t) + f_4(x, y-t). \quad (P2)$$

このノートでは、更に一般的に $f_1, f_2, f_3, f_4: G \times G \rightarrow C$ なる仮定のもとで上の未解決問題 (H-2) を解く。その際我々は、 f_1, f_2, f_3, f_4 の連続性を仮定しない。方程式 (P1) と (P2) は波動型関数方程式 (W1) のペキシダー化である。最終第4節で、ペキシダー化された一般的な波動型関数方程式 (P2) を解く事がこのノートの3番目のそして主たる目的である。

2. 関数方程式 (W2) および (W3)

まず、任意の $t \in G$ に対して次のシフト作用素 X^t 及び Y^t を導入しよう。

$$X^t f(x, y) = f(x+t, y), \quad Y^t f(x, y) = f(x, y+t).$$

特に $I = X^0 = Y^0$ は、恒等作用素を表す。ここで、シフト作用素の族で生成された線形変換の環は、結合的かつ分配的である事を注意しておく。

このノートの最初の結果は、次の定理で与えられる。

定理 2.1. 仮定 $f: G \times G \rightarrow C$ のもとで、関数方程式 (W2) および (W3) は、共に波動型関数方程式 (W1) と同値である。

(証明) 方程式 (W1) を作用素で書き直せば

$$(X^t + X^{-t})f(x, y) = (Y^t + Y^{-t})f(x, y) \quad (2.1)$$

となる。これに作用素 $Y^t + Y^{-t}$ を掛けると次のようになる。

$$(X^t + X^{-t})(Y^t + Y^{-t})f(x, y) = (Y^t + Y^{-t})^2 f(x, y).$$

展開すると

$$(X^t Y^t + X^t Y^{-t} + X^{-t} Y^t + X^{-t} Y^{-t})f(x, y) = (Y^{2t} + Y^{-2t} + 2)f(x, y) \quad (2.2)$$

となり、これは (W2) の作用素形になっている。よって、方程式 (W1) から方程式 (W2) が導かれた。逆に、(2.2) の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} (X^{2t} Y^{2t} + X^{2t} Y^{-2t} + X^{-2t} Y^{2t} + X^{-2t} Y^{-2t} + 2X^{2t} + 2X^{-2t} + 2Y^{2t} + 2Y^{-2t} + 4)f(x, y) \\ = (Y^{4t} + Y^{-4t} + 4Y^{2t} + 4Y^{-2t} + 6)f(x, y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

が得られる。次に (W2) において t を $2t$ に置き換えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} (X^{2t} Y^{2t} + X^{2t} Y^{-2t} + X^{-2t} Y^{2t} + X^{-2t} Y^{-2t})f(x, y) \\ = (Y^{4t} + Y^{-4t} + 2)f(x, y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.3) から (2.4) をひくと

$$(2X^{2t} + 2X^{-2t})f(x, y) = (2Y^{2t} + 2Y^{-2t})f(x, y)$$

となる。ここで $2t$ を t で置き換えると方程式 (W1) が得られる。よって (W2) から (W1) が従う。これで (W1) と (W2) の同値性が示された。

他方、(W1) に $Y^t + Y^{-t}$ の替りに作用素 $X^t + X^{-t}$ を掛ける。このとき先ほどと同様に (W1) と (W3) とが同値である事が示される。かくして、定理 2.1 が証明された。

$(K, +)$ を 2 で割れるアーベル群とする。定理 2.1 において、 C を K に置き換えても定理 2.1 はそのまま成り立つ。(W1) に関する M. A. McKiernan [9, p.264, THEOREM] (もしくは、D. Girod [2, pp.157-158, (2.2) THEOREM]) の結果より、定理 2.1 から次の事がわかる。

$f: G \times G \rightarrow K$ が方程式 (W2) もしくは (W3) を満足するための必要かつ十分条件は、次の 3 つの条件で与えられる：

- (i) 2 つの関数 $\alpha, \beta: G \rightarrow K$ が存在する。

(ii) 歪対称かつ双加法的関数 $A: G \times G \rightarrow K$ が存在する。

(即ち、 $A(x, y) = -A(y, x)$ 及び $A(x, y + z) = A(y, x) + A(x, z)$ が成り立つ。)

(iii) 解 $f: G \times G \rightarrow K$ は (i) と (ii) の関数を用いて

$$f(x, y) = \alpha(x + y) + \beta(x - y) + A(x, y), \quad \forall x, y, t \in G \quad (2.5)$$

と表現される。

$G = K = \mathbf{R}$ (実数体) の場合は、D. Girod [2, p.163, (3.4) THEOREM] の結果より (W2) (もしくは (W3)) の有界可測な一般解は、

$$f(x, y) = \alpha(x + y) + \beta(x - y) \quad (2.6)$$

で与えられる。ここで、 α と β は正のルベグ測度集合で有界な任意関数である。

3. 関数方程式 (P1)

この節では、ペキシダー化された波動型関数方程式 (P2) の興味ある特殊例として関数方程式 (P1) を考察する。

定理 3.1. 2つの関数 $f_1, f_2: G \times G \rightarrow C$ が方程式 (P1) を満足するための必要かつ十分条件は、次で与えられる。即ち、3つの関数 $\alpha, \beta, \gamma: G \rightarrow C$ と歪対称かつ双加法的関数 $A: G \times G \rightarrow C$ が存在して、全ての $x, y \in G$ に対して

$$f_1(x, y) = \alpha(x) + \beta(y) + A(x, y) \quad (3.1)$$

$$f_2(x, y) = \gamma(x) + \beta(y) + A(x, y) \quad (3.2)$$

と書ける事である。

(証明) (P1) を作用素形で表現すると次のようになる。

$$(X^t Y^t - X^t Y^{-t}) f_1(x, y) = (X^{-t} Y^t - X^{-t} Y^{-t}) f_2(x, y). \quad (3.3)$$

(3.3) の両辺に作用素 $X^t Y^t + X^{-t} Y^{-t} + X^{-t} Y^t + X^t Y^{-t}$ を掛けると、(2t を t に置き換えて)

$$(X^t Y^t - X^t Y^{-t}) f_1(x, y) + (Y^t - Y^{-t}) f_1(x, y)$$

$$= (X^{-t}Y^t - X^{-t}Y^{-t})f_2(x, y) + (Y^t - Y^{-t})f_2(x, y)$$

が得られる。この式と (3.3) から

$$(Y^t - Y^{-t})f_1(x, y) = (Y^t - Y^{-t})f_2(x, y),$$

即ち、 $f_1(x, y+t) - f_1(x, y-t) = f_2(x, y+t) - f_2(x, y-t)$ 及び

$$f_1(x, y+t) - f_2(x, y+t) = f_1(x, y-t) - f_2(x, y-t) \quad (3.4)$$

が従う。さて、関数 $h: G \times G \rightarrow C$ を $h(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$, $\forall x, y \in G$ により定義する。この時、(3.4) は

$$h(x, y+t) = h(x, y-t)$$

と書ける。ここで、 $t = y$ とおくと $h(x, 2y) = h(x, 0)$ 、つまり $h(x, y) = k(x)$ と書ける。ここで、 $k: G \rightarrow C$ は $k(x) = h(x, 0)$, $\forall x, y \in G$ で定義される関数である。よって、 $f_2(x, y) = f_1(x, y) - k(x)$ となる。この $f_2(x, y)$ を (P1) に代入すると、 $f_1(x, y)$ についての関数方程式

$$f_1(x+t, y+t) + f_1(x-t, y+t) = f_1(x-t, y+t) + f_1(x-t, y-t) \quad (3.5)$$

が導かれる。即ち、1節の方程式 (W4) である。従って再び [9, p.264, THEOREM] もしくは [2, pp.157-158, (2.2) THEOREM] の結果 (2節の式 (2.5) と変換 (1.1) を用いる) から、 $f_1(x, y)$ は (3.1) で与えられる事がわかる。ここで、変換 (1.1) により歪対称性と双加法性は変化しない事を注意する。よって、(3.1) と $f_2(x, y) = f_1(x, y) - k(x)$ から (3.2) が従う。ここで、 $\gamma: G \rightarrow C$ は $\gamma(x) = \alpha(x) - k(x)$ により定義される関数である。逆は明らかであり、これで 定理 3.1 の証明は終わった。

定理 3.1 は、2で割れるアーベル群 K 上でも成り立つ事を注意しておく。

4. 関数方程式 (P2)

この節の目的は、ペキシダー化された波動型関数方程式 (P2) に対して、次の主定理を証明する事である。未知関数 f_1, f_2, f_3, f_4 について、何らの正則性の仮定なしで主定理が成り立つ事を注意する。

定理 4.1. 関数 $f_1, f_2, f_3, f_4: G \times G \rightarrow C$ が全ての $x, y, t \in G$ に対して関数方程式 (P2) を満たすと仮定する。この時、

(i) 歪対称かつ双加法的関数 $A: G \times G \rightarrow C$

(ii) 双加法的関数 $B_1, B_2 : G \times G \longrightarrow C$

(iii) 関数 $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2 : G \longrightarrow C$

が存在し、全ての $x, y \in G$ に対して

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= A(x, y) + B_1(x + y, x - y) \\ &\quad + \alpha(x + y) + \beta(x - y) + \varphi_1(x + y) + \psi_1(x - y) + \chi_1(2y), \\ f_2(x, y) &= A(x, y) - B_1(x + y, x - y) \\ &\quad + \alpha(x + y) + \beta(x - y) - \varphi_1(x + y) - \psi_1(x - y) - \chi_1(2y), \\ f_3(x, y) &= A(x, y) + B_2(x + y, 2x) \\ &\quad + \alpha(x + y) + \beta(x - y) + \varphi_2(x + y) + \psi_2(2x) + \chi_2(-x + y), \\ f_4(x, y) &= A(x, y) - B_2(x + y, 2x) \\ &\quad + \alpha(x + y) + \beta(x - y) - \varphi_2(x + y) - \psi_2(2x) - \chi_2(-x + y) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

と書ける。

定理 4.1 の証明には、次の 2 つの補題が必要になる。

補題 4.1. 定理 4.1 の全ての仮定が満たされているとする。関数 $S : G \times G \longrightarrow C$ を、 $S(x, y) = \frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y))$, $\forall x, y \in G$ により定義する。この時、 S は関数方程式 (W1) を満たす。さらに、関数 $\alpha, \beta : G \longrightarrow C$ 及び歪対称かつ双加法的関数 $A : G \times G \longrightarrow C$ が存在し

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y)) \\ &= \frac{1}{2}(f_3(x, y) + f_4(x, y)) \\ &= \alpha(x + y) + \beta(x - y) + A(x, y), \quad \forall x, y \in G \end{aligned} \quad (4.2)$$

と書ける。

(証明) (P2) において $t = 0$ とおくと、

$$\begin{aligned} f_1(x, y) + f_2(x, y) &= f_3(x, y) + f_4(x, y) \\ &= 2S(x, y) \end{aligned}$$

が得られる。次に (P2) において t を $-t$ と置き換えて、それと (P2) とを加えると次式が得られる。

$$S(x + t, y) + S(x - t, y) = S(x, y + t) + S(x, y - t).$$

この式は、方程式 (W1) に他ならない。従って M. A. McKernan [9, p.264, THEOREM] の結果を再び使う事により、先に述べた形の関数 α, β, A が存在して、全ての $x, y, t \in G$ に対して (4.2) がなりたつ。これで証明は終わる。

次のステップは、関数 $f_1(x, y) - f_2(x, y)$ 及び $f_3(x, y) - f_4(x, y)$ の形を決定する事である。これが出来れば補題 4.1 から全ての f_1, f_2, f_3, f_4 が決定できる事になる。

補題 4.2. 定理 4.1 の全ての仮定が満たされているとし、関数 $T, U : G \times G \longrightarrow C$ を

$$T(x, y) = \frac{1}{2}(f_1(x, y) - f_2(x, y)), \quad U(x, y) = \frac{1}{2}(f_3(x, y) - f_4(x, y)), \quad \forall x, y \in G$$

により定義する。この時、 T, U は次の関数方程式を満たす。

$$U(x, y+2t) + U(x+t, y-t) + U(x-t, y-t) = U(x, y-2t) + U(x-t, y+t) + U(x+t, y+t). \quad (E1)$$

$$T(x+2t, y) + T(x-t, y+t) + T(x-t, y-t) = T(x-2t, y) + T(x+t, y+t) + T(x+t, y-t). \quad (E2)$$

(証明) (P) において t を $-t$ に置き換え、この式から (P2) を引くと次式が得られる。

$$T(x+t, y) - T(x-t, y) = U(x, y+t) - U(x, y-t). \quad (4.3)$$

次に (4.3) において x を $x+t$ に置き換えて

$$T(x+2t, y) - T(x, y) = U(x+t, y+t) - U(x+t, y-t) \quad (4.4)$$

を得る。さらに、 t を $-t$ に置き換えると次のようになる。

$$T(x-2t, y) - T(x, y) = U(x-t, y-t) - U(x-t, y+t). \quad (4.5)$$

式 (4.3) において y を $y+t$ に置き換えると

$$T(x+t, y+t) - T(x-t, y+t) = U(x, y+2t) - U(x, y) \quad (4.6)$$

となり、ついで t を $-t$ に置き換えると

$$T(x-t, y-t) - T(x+t, y-t) = U(x, y-2t) - U(x, y) \quad (4.7)$$

が得られる。式 (4.4) から式 (4.5) を引き、さらに式 (4.6) から式 (4.7) を引くと、次の 2 つの関数方程式が得られる。

$$T(x+2t, y) - T(x-2t, y) = U(x+t, y+t) - U(x+t, y-t) - U(x-t, y-t) + U(x-t, y+t). \quad (4.8)$$

$$U(x, y+2t) - U(x, y-2t) = T(x+t, y+t) - T(x-t, y+t) - T(x-t, y-t) + T(x+t, y-t). \quad (4.9)$$

さて、(4.3) において t を $2t$ に置き換えると

$$T(x+2t, y) - T(x-2t, y) = U(x, y+2t) - U(x, y-2t) \quad (4.10)$$

が従う。よって、(4.8) と (4.10) から (E1) が従い、一方 (4.9) と (4.10) から (E2) が従う。これで補題 4.2 の証明が終わった。

(定理 4.1 の証明) 次の変換により、方程式 (E1) と (E2) をそれぞれ下の方程式 (4.12) と (4.13) に変換しよう。即ち、新しい関数 $V, W : G \times G \rightarrow C$ を

$$V(u, v) = U(x, y), \quad W(u, v) = T(x, y), \quad \forall x, y \in G$$

$$\text{ここで } u = x + y, \quad v = x - y \quad (4.11)$$

により定義する。この時、(E1) と (E2) は $2t$ を t 、 u と v をそれぞれ x と y に置き換える事により次の 2 つの関数方程式に変わる。

$$V(x+t, y-t) + V(x, y+t) + V(x-t, y) = V(x-t, y+t) + V(x, y-t) + V(x+t, y). \quad (4.12)$$

$$W(x+t, y+t) + W(x, y-t) + W(x-t, y) = W(x-t, y-t) + W(x+t, y) + W(x, y+t). \quad (4.13)$$

従って、 $W(x, y)$ は次の方程式 (E3) を満たす。

$$f(x+t, y+t) + f(x, y-t) + f(x-t, y) = f(x-t, y-t) + f(x, y+t) + f(x+t, y). \quad (E3)$$

関数方程式 (E3) は、既に文献 [5, p.5, (23)], [10], [6, p.213, (87)] に現れている。しかしこの方程式は、文献 [6, pp.256-260, Problem (7)] において未解決問題として挙げられており、部分的な解やその考察は文献 [6, pp.213-216] や [8, p.207, (3.25)] において与えられていた。最近この方程式 (E3) は、P. K. Sahoo and L. Székelyhidi [11, p.282, Theorem 1] により完全に解かれた。彼らの結果は次の通りである。関数 $f : G \times G \rightarrow C$ が方程式 (E3) を満たすための必要十分条件は、ある双加法的関数 $B : G \times G \rightarrow C$ 及び関数 $\varphi, \psi, \chi : G \rightarrow C$ が存在して

$$f(x, y) = B(x, y) + \varphi(x) + \psi(y) + \chi(x - y) \quad (4.14)$$

と書ける事である。従って、(4.14) と (4.11) より

$$T(x, y) = B_1(x + y, x - y) + \varphi_1(x + y) + \psi_1(x - y) + \chi_1(2y) \quad (4.15)$$

が言える。ここで、 $B_1 : G \times G \rightarrow C$ は双加法的であり $\varphi_1, \psi_1, \chi_1 : G \rightarrow C$ である。他方、関数 $M : G \times G \rightarrow C$ を

$$M(u, v) = V(x, y), \quad \forall x, y \in G, \quad \text{ここで } u = x, \quad v = x + y \quad (4.16)$$

により定義しよう。この時 (4.12) は M に関する方程式

$$M(x+t, y) + M(x-t, y-t) + M(x, y+t) = M(x-t, y) + M(x+t, y+t) + M(x, y-t)$$

に変わる。かくして $M(x, y)$ は再び方程式 (E3) を満たす。よって、(4.14) と (4.16) から次の事が言える。即ち、双加法的関数 $\tilde{B}_2 : G \times G \rightarrow C$ と関数 $\tilde{\varphi}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{\chi}_2 : G \rightarrow C$ が存在して

$$V(x, y) = \tilde{B}_2(x, x+y) + \tilde{\varphi}_2(x) + \tilde{\psi}_2(x+y) + \tilde{\chi}_2(-y) \quad (4.17)$$

と書ける。さらに、(4.17) と (4.11) から双加法的関数 $B_2 : G \times G \rightarrow C$ と関数 $\varphi_2, \psi_2, \chi_2 : G \rightarrow C$ が存在して

$$U(x, y) = B_2(x+y, 2x) + \varphi_2(x+y) + \psi_2(2x) + \chi_2(-x+y) \quad (4.18)$$

と書ける。

一方、補題 4.1 と 補題 4.2 から

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = 2S(x, y)$$

$$f_3(x, y) + f_4(x, y) = 2S(x, y)$$

$$f_1(x, y) - f_2(x, y) = 2T(x, y)$$

$$f_3(x, y) - f_4(x, y) = 2U(x, y)$$

が従う。ここで、 $2S$ は方程式 (W1) の任意の解であり、 $2T, 2U$ はそれぞれ方程式 (E1) 及び (E2) の任意の解である。方程式 (W1), (E1), (E2) の一般解は補題 4.1 と定理 4.1 の証明中に得られている。 f_1, f_2, f_3 及び f_4 に関する上の方程式系の解を S, T , 及び U で表し、それらの解の表示を用いれば、最終的な解の表示式 (4.1) が得られる。これで定理 4.1 の証明が終わった。

参考文献

- [1] J. Aczél, H. Haruki, M. A. McKiernan and G. N. Sakovič, *General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials*, Aequationes Math. 1(1968), 37-53.
- [2] D. Girod, *On the functional equation $\Delta_{T_1y} \Delta_{T_2y} f = 0$* , Aequationes Math. 9(1973), 157-164.

- [3] H. Haruki, *Notebooks of open problems* (unpublished).
- [4] H. Haruki, *On the functional equation $f(x+t, y) + f(x-t, y) = f(x, y+t) + f(x, y-t)$* , Aequationes Math. 5(1970), 118-119.
- [5] S. Haruki, *The general solution of finite difference-functional equations analogous to the wave equation with several unknown functions* (unpublished). A manuscript to Prof. M. A. McKiernan from the first author dated on May 12, 1975.
- [6] S. Haruki, *Particular difference and mean value type functional equations*, University of Waterloo, Ph.D. Thesis, 1977 (266 pages).
- [7] S. Haruki, *On the general solution of a nonsymmetric partial difference functional equation analogous to the wave equation*, Aequationes Math. 36(1988), 20-31.
- [8] S. Haruki, *A wavelike functional equation of Pexider type*, Aequationes Math. 63(2002), 201-209.
- [9] M. A. McKiernan, *The general solution of some finite difference equations analogous to the wave equation*, Aequationes Math. 8(1972), 263-266.
- [10] M. A. McKiernan, Comments to the first author concerning the manuscript of the above reference [5] dated on July 7, 1975.
- [11] P. K. Sahoo and L. Székelyhidi, *On a functional equation related to digital filtering*, Aequationes Math. 62(2001), 280-285.