数理解析研究所講究録
第1890巻 2014年 136-148

流体としてのブラックホール：重力物理と流体力学の接点

秋田県立大学・総合科学教育研究センター
宮本 雲平
Umpei Miyamoto
Research and Education Center for Comprehensive Science,
Akita Prefectural University
E-mail: umpei@akita-pu.ac.jp

概 要

ブラックホールは一般相対論によって予言される曲がった時空である．1970年代以降ブラックホールの量子効果が精力的に調べられ，定常なブラックホールが温度やエントロピーといった量をもつ熱力学系（ブラックホール熱力学）であることがわかってきたが，動的なブラックホールが熱力学系との対応をもつかは長年謎のままであった．ところが，近年発見された「流体・重力対応」によれば，動的なブラックホールは流体に対応しており，流体の解析によりブラックホールの性質が，もしくは逆に，ブラックホールの解析により流体の性質を調べることが可能になるという．本稿では，一般相対論やブラックホールに関する知識を前提とせず，極力平易な言葉で流体・重力対応とその周辺の研究を紹介したい．

1 はじめに

アインシュタインによって構築された一般相対論とは重力の理論である．当時，重力の理論と言えばニュートン理論が知られており，自然現象を説明するにはそれで事足りていたわけであるが，アインシュタインは物理法則の座標変換不変性というアイデアを突き詰めることで，重力を時間と空間の歪みとして記述するというアイデアに到達し，一般相対論を完成させた．

一般相対論の代表的な予言が「曲がった時空の極み」とも言えるブラックホールである．相対論によれば，質量のあるところには必ずエネルギーがあり（$E = mc^2$），エネルギーがあると周囲の時空間は必ず曲がることになる．丸い地球に我々人間が張り付いていられるのは，地球が人間を引っ張っているのではなく，重い地球が空間を歪め，その歪みに沿って人間が「落っこちている」というのが正しい．天体がとてつもなく重い，もしくはとてつもなく小さい（つまり高密度の）場合，その天体が曲げた時空では光の経路さえも直線ではなく，一度そこに入った光が絶対に出てこられない「領域」を形成する．その領域がブラックホールである．

このようにブラックホールとは定義からして曲がった時空そのものであり，通常の連続体（流体，弾性体，etc）のような何か不連続なもの（原子・分子）の集合体を粗視化したものではないし，時空が従う運動方程式—後述のアインシュタイン方程式—もナヴィエ・ストークス方程式とは似ても似つかない代物である．

そのブラックホールが流体と似ていることをお伝えするのが本稿の目的である．では，「似ている」とはどういうことか．ブラックホールと流体の振る舞いが「何となく似ている」だけ

なのか，それとも，両者の物理量に何かしらの対応付けをすれば，それらが同一の法則に従うといった「より高度な類似」（このような類似を物理では双対性（duality）と呼んだりする）なのか，様々な場合が考えられる．

上記の問いに関する答えは，「どちらの意味でも似ている」である．勿論，ブラックホールは流体ではないので完全に同じではないが，ある種の不安定性などに限定すると，酷似した振る舞いを見せる．更に，ある近似のもとではアインシュタイン方程式からナヴィエ・ストークス方程式が「導出」される．本稿ではまず，一般相対論やブラックホールに関する一般的導入を行い，その後，ブラックホールのある種の不安定性が，流体のレイリー・プラトー不安定性とよく似た振る舞いをすることを紹介する．最後に，ブラックホールと流体の方程式レベルの対応である流体・重力対応を紹介したい．

2 ブラックホール入門

2.1 一般相対論

我々は空間が3次元の広がりをもつことを知っていて，点の位置を極座標 (r,θ,ϕ) で表わしたりする．相対論では，この空間と時間 t を一緒にして4次元「時空」と呼び，座標 $(x^a)_{a=0,1,2,3} := (ct,r,\theta,\phi)$ などで時空点を指定する．c は真空中の光速度である．一般相対論で基本となる物理量は，二つの時空点 x^a と x^a+dx^a の距離の「平方」を

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}dx^a dx^b \tag{1}$$

と書いたときの計量 g_{ab} である（以後，同じ添え字が上下に現れたら Σ がなくても和を取ると約束する）．アインシュタインは計量が

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{2}$$

という運動方程式に従うことを発見した．ここで，G_{ab} はアインシュタイン・テンソルと呼ばれる計量の2階微分を含む時空の曲率，Λ は宇宙定数と呼ばれる定数，G はニュートンの万有引力定数，T_{ab} はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれ，時空中に存在する物質分布を表わす．(2) 式の左辺は時空の曲がり具合を表す量で，右辺は時空間に存在する物質の分布を表している．つまり，**一般相対論におけるアインシュタイン方程式 (2) は時空の曲がり（重力）と物質分布が相互に規定しあう様子を記述している．**

2.2 ブラックホール

ブラックホールの中で最も単純なシュバルツシルト・ブラックホールとはアインシュタイン方程式 (2) で $T_{ab}=\Lambda=0$（真空）としたときの解で

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2\ ,\quad f(r) = 1 - \frac{r_0}{r} \tag{3}$$

と書かれる．$d\Omega_2^2 := d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ は 2 次元単位球上の距離，r_0 はブラックホールの重力質量 M と

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \tag{4}$$

という関係にある定数である．ここで，$r_0 = 0$ とすれば，$f(r) \equiv 1$ となり 3 次元空間 (r, θ, ϕ) で三平方の定理が成り立つことが見て取れる．一方，$r_0 > 0$ だと時空は曲がっていて，$r < r_0$ なる領域から「外向き」の光を発射しても，原点 $r = 0$ に向って逆行するという摩訶不思議なことが起こる（原点には重力が無限大となる世にも恐ろしい「時空特異点」が待ちかまえている！）．**どんなに頑張っても内側を見ることができないので，$r = r_0$ という面は地平線，その内側がブラックホールと呼ばれるのである．**

2.3 ブラックホール熱力学

ブラックホールの周囲に物質が漂っていると，ブラックホールはそれらを吸い込み，質量 M を増加させてブクブク太っていく．それに伴い，半径 r_0 や表面積 $A = 4\pi r_0^2$ も大きくなる．一般に，定常ブラックホールの面積が A から $A + \delta A$ $(\delta A \geq 0)$ に変化したとすると，質量エネルギーの変化分 $\delta(Mc^2)$ は

$$\delta(Mc^2) = \frac{c^2}{8\pi G}\kappa\delta A \tag{5}$$

となることが知られている．

いま仮に，Mc^2 を熱力学に登場する内部エネルギー U と同一視し，κ を温度 T，A をエントロピー S と対応させると，(5) 式は熱力学の第一法則 $\delta U = T\delta S$ に見えなくもない．ホーキングはブラックホールによる粒子生成の発見によって，このようなブラックホールと熱力学の対応が「本物」であることを知らしめた．もう少し詳しく言うと，彼は，ブラックホールが周囲の量子場を励起し，表面重力に比例する温度（ホーキング温度）

$$T = \frac{\hbar}{2\pi c k_B}\kappa \tag{6}$$

で黒体放射（ホーキング放射）することを証明したのである．ここで，$\hbar$ はプランク定数，k_B はボルツマン定数である．この関係を (5) 式へ代入すればエントロピー（ベッケンスタイン・ホーキング・エントロピー）と面積の比例定数も

$$S = \frac{c^3 k_B}{4G\hbar}A = \frac{k_B}{4\ell_P^2}A \tag{7}$$

と決まる．ここで，$\ell_P := \sqrt{G\hbar/c^3}$ $(\sim 10^{-33}\ \mathrm{cm})$ はプランク長さと呼ばれる量である．かくして，定常なブラックホールは一定の温度・エントロピーをもつ熱力学系であることがわかったのである．蛇足かもしれないが，(7) 式は 4 つの基本的自然定数 $(c, G, \hbar, k_B)$ が入っている誠に魅力的なもので，この式をもって（「博士の愛した数式」$e^{i\pi} = -1$ にも勝るとも劣らない）**「この世で一番美しい公式」と呼ぶ人が居るとか居ないとか．**

さて，上述の「ブラックホール熱力学」は大変有用だが，あくまで定常ブラックホールに対してのみ通用する．時間変動するある種の高次元ブラックホールには対応する「ブラックホー

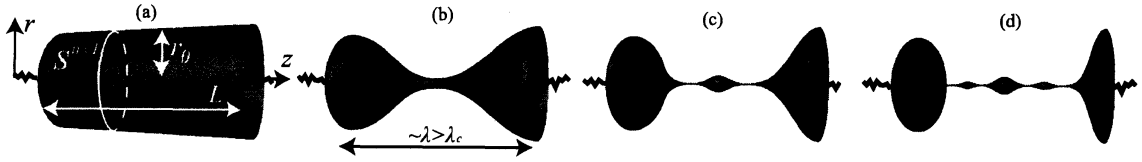

図 1: ブラックストリングの地平線がグレゴリー・ラフラーメ不安定性によって時間発展する様子 [(a)→(b)→(c)→(d) と時間が進む]．z = 一定 で切った地平線は $(n+1)$ 次元球 S^{n+1} となっており，z 軸上 $(r=0)$ には特異点が存在すると考えられる．

ル流体力学」があるというのが本稿の主旨だが，それを見る前に，高次元時空に住むブラックホールには幾つもの「相」があり，それらの不安定性によって「相転移」が起こり得ることを見よう．

3 高次元ブラックホール入門

3.1 ブラックストリング

最も簡単な高次元ブラックホール解はシュバルツシルト解 (3) において

$$f(r) \to 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \ , \ d\Omega_2^2 \to d\Omega_{n+1}^2 \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

という一般化を施せば得られる．このとき，半径 r_0 の $(n+1)$ 次元球 S^{n+1} が地平線を与えるが，5 次元以上の高次元では球以外の地平線をもつ新たな「相」が出現する．その一つブラックストリングは，上のブラックホールに $+dz^2$ という操作で新たな空間 z を導入することで得られる $(n+4)$ 次元の解である．このとき，地平線は半径 r_0 の $(n+1)$ 次元球 S^{n+1} と z 方向に広がりを持つ円筒となる（図 1[a] を参照）．

3.2 グレゴリー・ラフラーメ不安定性

各々の相の安定性や相転移について知るには，(2) 式を用いた摂動解析が出発点となる．実は，長いブラックストリングにはグレゴリー・ラフラーメ (Gregory-Laflamme) 不安定性 [1] と呼ばれる高次元ブラックホールに特有の不安定性がある．正確に言うと，計量に

$$\delta g_{ab} \propto \exp(-i\omega t + ikz) \tag{9}$$

という摂動を加えたとき，$\omega^2 < 0$（ω が純虚数）となる波数 k $(0 < k < k_c \sim \sqrt{n}/r_0)$ が存在する（図 2）．波長 $\lambda := 2\pi/k$ の言葉で言えば，ブラックストリングの長さ L が長い，つまり $L > \lambda_c := 2\pi/k_c \sim r_0/\sqrt{n}$ のとき不安定となる．

いま仮に，ブラックストリングの長さLは一定として，半径r_0が十分大きいとしよう($r_0 \gg L$)．すると，このブラックストリングは安定である．しかし，時間と共にホーキング放射で質量を失うのでr_0は小さくなっていき，$r_0 \lesssim L$となった時点で不安定となる．すると，ちょっとした外部攪乱（揺らぎ）が加わった途端に運動が始まってしまい，その運動の最終状態は何かという問題が生じる．非常にナイーブな予想は「揺らぎが増幅することにより地平線が切れて，ブラックホール相に転移する」である．何故なら，同じ質量で比べるとブラックホールのエントロピーはブラックストリングのそれより大きいからである．しかし，もし地平線が切れたら，それまで地平線の内側に隠れていた恐るべき特異点が顔を出してしまう[1]．さらに，ブラックストリングとブラックホールのエントロピーの大小関係も，実は次元を上げていくと$n \geq n_c := 10$で逆転してしまい[3, 4]，このナイーブな判定法をどこまで信じて良いか解らないし，最終状態が次元に依存する可能性もある．

大きな進歩は近年報告された数値シミュレーションによってもたらされた[5]．その結果によれば（5次元では）「地平線は一度ダンベルのような形になり[図1(b)]，更に時間が経つと，取っ手部分に再び不安定性が発生し新たなコブができる[図1(c)]．その過程を幾度か繰り返し[図1(d)]，最終的に地平線は切れる」という．また，切れる直前にクビレ付近の地平線半径が$r(t) \propto (t_0 - t)$（ここでt_0は切れると予想される時刻）と自己相似的に振る舞うという報告もされた[2]．

上の数値実験の結果は非常に興味深いが，注意も必要である．つまり，文字通り地平線が有限時間で切れるとは言い切れない点である．理由はいくつかあるが，例えば，彼らが時間発展を調べた地平線は「見かけの地平線」と呼ばれ本当の地平線（事象の地平線）とは異なること，切れる前に数値計算は必ず破綻する（コンピュータで特異点は扱えない）ことなどがあげられる．このような理由もあり，やはり解析的手法による裏付けが（少なくとも私は）欲しくなる．しかも，宇宙検閲官仮説の破れや自己相似性といった現象は，背後に潜む豊かな物理を垣間見せている．しかし，このような著しく動的過程では，最早ブラックホールが大域的な熱平衡状態にあるはずもなく，熱力学という便利な道具は無用である．そこで登場するのが流体・重力対応となる．

4　レイリー・プラトー不安定性との類似性

後で，流体・重力対応を用いればグレゴリー・ラフラーメ不安定性が流体の音波不安定性として理解できることを示すが，歴史的には流体・重力対応の発見とは独立に，グレゴリー・ラフラーメ不安定性と流体に対するレイリー・プラトー不安定性の類似性が指摘されていた[6, 7]．レイリー・プラトー不安定性とは，長細い流体を表面張力がちぎれさせる不安定性である（図1の地平線をそのまま流体表面と思えばよい）．この節では少し寄り道して，流体・重力対応が定式化される以前に発見され，流体とブラックホールの際だった類似性を我々に教えてくれた臨界次元に関する研究を紹介しよう．

---

[1]一般相対論では「宇宙検閲官仮説」というものが知られ，特異点は滅多なことでは地平線の外に現れないと信じられている．文献[2]も参照．

[2]このような巾解は，時間・空間の適当なスケーリングによって元の解に戻るので自己相似解と呼ばれ，切れ方に（初期条件などに依存しないという）普遍性があることを示唆している．

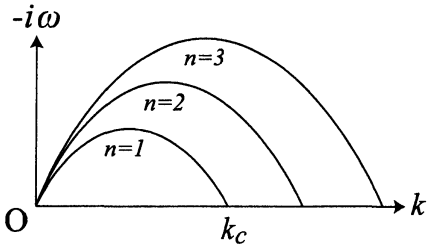

図 2: ブラックストリングに $\delta g_{ab} \propto \exp(-i\omega t + ikz)$ という摂動を与えたときの分散関係 $\omega(k)$. 長波長領域 $0 < k < k_c \sim \sqrt{n}/r_0$ で不安定 $(-i\omega > 0)$ となる.

4.1 ブラックストリングの臨界次元

数値シミュレーション [5] の結果は，長いブラックストリングが不安定であり，動的な相転移を経てブラックホールへ至ることを表している．では，そのような結果は数値シミュレーションをやるまで全く予想がつかなかったのであろうか．答えはノーである．2.3 節でブラックホールは熱力学系と考えられることを述べた．ということは，物質の相転移現象で議論されるように，エントロピーや自由エネルギーの比較によって，どの相が実現されるのかという議論が可能なのである．実際に，グレゴリー・ラフラーメ不安定性が丁度発生する長さのブラックストリングについて，そのエントロピーを同じ質量のブラックホールのそれと比べると，ブラックホールの方が大きく，相としてより安定であることが以前より知られている [1].

静的なブラックホール解を求め，熱力学量を計算するのはダイナミクスを追う数値シミュレーションに比べれば格段に易しいため，いろいろな次元で計算が行われた．ただし，幾何学的な対称性が高い問題であるため，ただ次元を上げるだけでは何も特別なことは起こらないと考えられていた．しかし，事実はそう単純でないことが程なくしてわかった．次元を上げていくと，ブラックストリングとブラックホールのエントロピーの大小関係が逆転し，ブラックストリングがブラックホールへ転移しなくなる「臨界次元」がありそうなことがわかったのである [3, 4].

4.2 アナログ・モデルによる臨界次元の確認

レイリー・プラトー不安定性は，蛇口から出てくる水を細くしていったときに千切れて水滴になる現象を引き起こすものである．グレゴリー・ラフラーメ不安定性が，この非常に身近な不安定性と似ていることが指摘されたのは比較的最近である [6]．この論文では，仮想的な高次元流体のレイリー・プラトー不安定性が考察され，次元の増加と共に不安定性が強くなることなどグレゴリー・ラフラーメ不安定性との定性的な類似性が指摘された．

ブラックストリングの臨界次元を研究していた筆者は，この論文を目にしたとき，流体にも臨界次元があるだろうと直感した．そして，グレゴリー・ラフラーメ不安定性のシミュレーションは難しいが，レイリー・プラトー不安定性のシミュレーションなら容易であり，臨界次元の存在を目の当たりにすることが出来ると考えた．レイリー・プラトー不安定性は非常に普遍

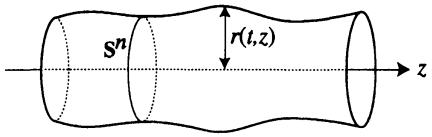

図 3: $(n+2)$ 次元中の軸対称表面.

的な現象なので，それを記述するモデルは数あれど，どのモデルを用いても次元依存性などの基本的性質は変わらないと思われる．従って筆者は，金属表面で起こる拡散現象を記述する**表面拡散方程式（surface diffusion equation）**[8] というものを用いて，一般次元のレイリー・プラトー不安定性を考察することにした [9]．以下で簡単に，モデルとシミュレーション結果を紹介する．

表面拡散とは金属表面の曲率勾配によって引き起こされる質量輸送現象である．表面上を移動する粒子数フラックス $\boldsymbol{J}$ はネルンスト・アインシュタイン関係式と呼ばれるもので与えられる．

$$\boldsymbol{J} = -A\nabla_s \kappa \tag{10}$$

ここで，A は定数，∇_s は表面勾配演算子，κ は表面の平均曲率である．ここで更に，体積保存則を考えると表面の運動を決定する方程式が得られる．

$$\rho u + \nabla_s \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{11}$$

ここで，u は表面の法線方向の速度，ρ は定数の原子数密度である．こうして，表面の運動は次のような表面拡散方程式と呼ばれるものに従う．

$$u = \rho^{-1} A \nabla_s^2 \kappa =: B\Delta_s \kappa \tag{12}$$

これから，仮想的な $D := (n+2)$ $(n \geq 1)$ 次元空間で $(n+1)$ 次元の軸対称な「金属表面」を考えることにする．$z = \text{constant}$ という平面で切った n 次元球 $\mathbf{S}^n$ の半径を $r = r(t,z)$ と書くことにする．ここで，t は時間であり，z は対称軸の座標である（図 3 参照）．

この座標系を用いると，表面の平均曲率，法線方向の速度，表面ラプラシアン演算子は

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{n}{r\sqrt{1+r'^2}} - \frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} \\ u &= \frac{\partial_t r}{\sqrt{1+r'^2}}, \quad \Delta_s = \frac{1}{r^n\sqrt{1+r'^2}}\partial_z\left(\frac{r^n}{\sqrt{1+r'^2}}\partial_z\right) \end{aligned} \tag{13}$$

で与えられる．以上から，一般次元において軸対称な表面拡散ダイナミクスを支配する方程式は次のようになる．

$$\partial_t r(t,z) = \frac{B}{r^n}\partial_z\left(\frac{r^n}{\sqrt{1+r'^2}}\partial_z\left[\frac{n}{r\sqrt{1+r'^2}} - \frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}}\right]\right) \tag{14}$$

図 4 はこの方程式を使って，4 次元空間と 12 次元空間においてレイリー・プラトー不安定性の時間発展をシミュレーションした結果である [9]．この解析によって，レイリー・プラトー不安定性には臨界次元（$D \simeq 10$）が確かに存在し，高次元側では円筒が球へ転移しないことが明らかにされた．

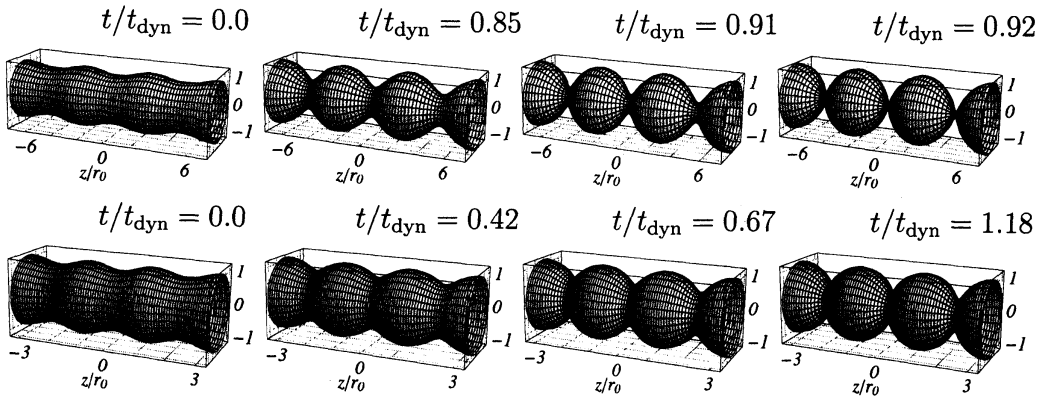

図 4: 4 次元空間（上）と 12 次元空間（下）において時間発展するレイリー・プラトー不安定性．4 次元では不安定性が発展して千切れるのに対し，12 次元では非一様形状を持つ平衡状態に収束する．

5 （特殊）相対論的流体力学

5.1 流体方程式を視点を変えて見る

流体・重力対応の話へ移る前に，流体力学の復習をしておこう．登場する物理量は質量密度 ρ，圧力 P，速度場 v^i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ などである．これらは

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0\ , \quad \partial_t(\rho v^i) + \partial_j \Pi^{ij} = 0 \tag{15}$$

という質量保存則と運動量保存則に従う．ここで，$\Pi_{ij} = \Pi^{(0)}_{ij} + \Pi^{(1)}_{ij}$ は運動量（流束）テンソルと呼ばれる量で

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)}_{ij} &= \rho v_i v_j + P\delta_{ij} \\ \Pi^{(1)}_{ij} &= -\eta\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{p}\delta_{ij}\partial_k v^k\right) - \zeta\delta_{ij}\partial_k v^k \end{aligned} \tag{16}$$

と書かれ，η はずれ粘性率，η は体積粘性率である．$\Pi^{(0)}_{ij}$ だけ考えれば完全流体に対するオイラー方程式が得られ，$\Pi^{(1)}_{ij}$ まで考えれば散逸流体に対するナヴィエ・ストークス方程式が得られる．

ここで重要なのは次の事項である．まず，(15) 式が保存則の形をしているため（少なくとも形式的には）容易に相対論的方程式に拡張できる．その時は流体のエネルギー・運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$ として，二つの式をまとめて

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\ , \quad x^\mu := (ct, z^i) \tag{17}$$

と書くことができる．もう一つは，(15) 式を解くのに必要な**状態方程式 (P と ρ の関係) や η, ζ は流体力学の範疇では決定されず，分子や場のレベルまで遡ったミクロな理論から導出するか，実験で決めるしかない**点である．最後に，運動量テンソルを $\Pi^{(0)}_{ij} + \Pi^{(1)}_{ij}$ と意味ありげな和の

形に書いたが，その意味は $\Pi_{ij}^{(m)}$ が速度の m 階微分を含んでいるということである．より一般には，高階微分を含んだ項 $\Pi_{ij}^{(m\geq 2)}$ が潜んでいると考えられる．この事情は相対論的流体でも同じで，一般に運動方程式は

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\ ,\ T^{\mu\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m T^{\mu\nu}_{(m)} \tag{18}$$

と書ける．ここで，ϵ は速度の微分を数える形式的なパラメータである．ただし，$T^{\mu\nu}_{(0)}$ が密度や圧力などの熱力学量だけで表され $T^{\mu\nu}_{(m\geq 1)}$ がそれらの勾配に関わる量であることを考慮すると，$\epsilon\ (<1)$ を平衡状態からの外れ具合を表すパラメータと考える方が物理的である．

さて，後々の為に相対論的流体のエネルギー・運動量テンソルを $O(\epsilon)$ まで書き下すと

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{(0)} &= \rho u^\mu u^\nu + P P^{\mu\nu} \\ T^{\mu\nu}_{(1)} &= -2c\eta\sigma^{\mu\nu} - c\zeta P^{\mu\nu}\partial_\alpha u^\alpha \end{aligned} \tag{19}$$

となる．$T^{\mu\nu}_{(0)}$ は完全流体のエネルギー・運動量テンソルを「空間方向」への射影テンソル $P^{\mu\nu} := u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}$ を用いて書いたものである．ここに，$\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)$ は平坦時空の計量である．$T^{\mu\nu}_{(1)}$ が粘性項で，$\sigma^{\mu\nu} := (1/2)P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}[\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - (2/p)P_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma]$ は歪みテンソルである．

5.2 音波不安定性

ここで流体の音波不安定性について触れておく．音波とは流体中を密度揺らぎなどが波動として伝搬していくものであった．例えば，静止した流体に $\delta\rho \propto \exp(-i\omega t + ikz)$ という揺らぎを与えたとすると，(15) 式から（完全流体の近似で）

$$\omega^2 = c_s^2 k^2,\quad c_s^2 := \frac{dP}{d\rho} \tag{20}$$

という分散関係を得る．ここで c_s^2 は音速度の平方である．従って，もし状態方程式 $P = P(\rho)$ が $c_s^2 < 0$ となるようなものなら，揺らぎが指数関数的に増幅することになる．負の圧縮率を持っている（圧力を上げると膨張するヘンな）流体はこの意味で不安定である．

6 流体・重力対応の導出

準備が整ったので，いよいよ流体・重力対応がどのように導出され，その応用としてグレゴリー・ラフラーメ不安定性などの現象が流体力学の枠組みでどう記述されるか見ていこう [10].

6.1 微分展開法：ブラックホールを緩やかに揺らす

ブラックストリングの地平線は z 方向に伸びていたが，ここではより一般にこのような方向が $p\ (\geq 1)$ 個あるとしよう．つまり，$(n+3)$ 次元ブラックホールに $+\sum_{i=1}^{p}(dz^i)^2$ という操

作をして得られるブラック p ブレインと呼ばれる解を考える．以下の議論で S^{n+1} 上の角度座標は陽に現れないので省略し，陽に現れる全ての座標を

$$x^a := (x^\mu, r) := (ct, z^i, r) \tag{21}$$

と書いておこう．さて，このブラック p ブレインだが，z^i 方向に並進運動（ブースト）させて一定の $(p+1)$ 元速度 u^μ を持たせることができる $(u^\mu u_\mu = -1)$．すると，この解は定数の組 (r_0, u^μ) で特徴付けられる．地平線半径 r_0 はホーキング温度と

$$T = \frac{n\hbar c}{4\pi k_B r_0} \tag{22}$$

と対応しているので，このブラック p ブレインは**一定の温度を持った大域的熱平衡状態にある**と言える．結論から言えば，ブラック p ブレインがこの大域的平衡状態から「少し」外れた時，計量の揺らぎ δg_{ab} が従うアインシュタイン方程式 (2) が流体方程式 (18) に還元されるのである．

まず，一定だった温度 $T(r_0)$ と速度 u^μ を

$$(r_0, u^\mu) \to (r_0(x^\nu), u^\mu(x^\nu)) \tag{23}$$

と $x^\nu = (t, z^i)$ の関数に昇格させ，揺らがせてみよう．ただし，解のなかの定数を勝手に関数にしたらアインシュタイン方程式 (2) は勿論満たされなくなる．再び解になるためには，元々のブラック p ブレイン解の計量 $g^{(0)}_{ab}$ を $g^{(0)}_{ab} + \delta g_{ab}$ と変化させアインシュタイン方程式 (2) を再び書き下し，解きなおす必要がある．

そうして得られる摂動 δg_{ab} に関する式は非常に煩雑だが，流体・重力対応を導くという我々の目的の為には，厳密に解く必要はない．何故なら，**流体描像が期待されるのは平衡状態から「ほんの少し」外れた状態**だからである．これを正確に表すなら，未知の量をまとめて

$$X := (r_0(x^\nu), u^\mu(x^\nu), \delta g_{ab}(x^a)) \tag{24}$$

と書き，これらの x^μ 方向の微分で決まるスケール

$$\lambda := \left| \frac{X}{\partial_\mu X} \right| \tag{25}$$

(図 1(b) を見よ) が，もともと「背景」にあるスケール r_0 に比べて十分大きい（$\lambda \gg r_0$）ということである．従って，まず微小量 r_0/λ で全ての未知関数を

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m X_{(m)} \ , \quad \epsilon := \frac{r_0}{\lambda} \ll 1 \tag{26}$$

と展開する．そうして展開したものをアインシュタイン方程式 (2) へ代入すれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m G^{ab}_{(m)} = 0 \tag{27}$$

というかたちで摂動方程式が得られるから，この摂動方程式を $m = 1$ から逐次的に解いていけばよい．実際には，アインシュタイン方程式 (2) を書き下すとき，∂_μ が $r_0 \partial_\mu \ln X = O(\epsilon)$ という組み合わせで現れるので，アインシュタイン方程式 (2) において機械的に $\partial_\mu \to \epsilon \partial_\mu$ という置き

換えをすれば，摂動方程式 (27) が得られる．このような方法は一般に**微分展開法 (derivative expansion) と呼ばれ，物理系に二つ以上のかけ離れたスケールがあるときに，運動方程式の独立変数を減らすのに用いられる常套手段の一つである**．今の場合，後述するように，独立変数の r が系から消える．流体分野では，非線形浅水波を記述する KdV(コルテヴェーグ・ドフリース) 方程式を流体方程式から導出する際に，同様の方法を経験した方も多いと思われる [11].

一般に摂動アインシュタイン方程式 $G^{ab}_{(m\geq 1)}=0$ は (x^μ, r) を独立変数とする偏微分方程式である．しかし，r に関しては厳密に積分できてしまい，地平線 $(r=r_0)$ や無限遠方 $(r=\infty)$ の正則性という境界条件から積分定数なども一意に決まる．すると，x^μ だけを独立変数とする偏微分方程式が残る．ここで，(26) 式で定義した二つのスケールの比 $\epsilon = r_0/\lambda$ を，流体方程式 (18) における ϵ（速度微分の個数）と同一視すると，(驚くべき事に）残ったアインシュタイン方程式が (18)(19) 式にある相対論的流体方程式 $\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(m-1)}=0$ のかたちに書けるのである．

具体的には次のようになる．$(n+3+p)$ 次元の 1 次の摂動方程式 $\epsilon G^{ab}_{(1)}=0$ は

$$P=-\frac{\rho}{n+1}=-\frac{\Omega_{n+1}c^4}{16\pi G}r_0^n \tag{28}$$

で与えられる圧力 P とエネルギー密度 ρ を定義すれば，$(p+1)$ 次元オイラー方程式 $\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(0)}=0$ と見なせる．ここで，Ω_{n+1} は $(n+1)$ 次元単位球の面積である．更に，2 次の摂動方程式 $\epsilon G^{ab}_{(1)}+\epsilon^2 G^{ab}_{(2)}=0$ は

$$\eta=\frac{\Omega_{n+1}c^3}{16\pi G}r_0^{n+1}\ ,\ \zeta=\frac{\Omega_{n+1}c^3}{8\pi G}r_0^{n+1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}\right) \tag{29}$$

という粘性係数を定義すれば，ナヴィエ・ストークス方程式 $\partial_\mu(T^{\mu\nu}_{(0)}+\epsilon T^{\mu\nu}_{(1)})=0$ と見なせる．例えば，ブラックストリング $(p=1)$ に対しては $(r_0(t,z), u^z(t,z))$ のみを未知関数とする偏微分方程式の組を得る．それらは元々の重力方程式 (2) とは比較にならないほど単純化されている点，流体力学において培われた多くの手法を適用できる点で非常に有用である．

第 5 節の流体力学の一般論を思い出しながら，上の議論を見渡してみよう．すると，**「ミクロ」な理論としての重力方程式 (2) から現象論的方程式 (18) が導かれた構図になっている**．何故なら，状態方程式 (28) や粘性係数 (29) などが地平線の半径 r_0 という重力の量で与えられているからである．一般形 (18) に現れる高階微分の項 $T^{\mu\nu}_{(m\geq 2)}$ も $G^{ab}_{(m\geq 3)}=0$ から（原理的には）いくらでも得ることができる．

6.2 音波不安定性としてのグレゴリー・ラフラーメ不安定性

さて，状態方程式 (28) から音速を計算してみると

$$c_s^2:=\frac{dP}{d\rho}=-\frac{1}{n+1}<0 \tag{30}$$

となり，この**「ブラック p ブレーン流体」は音波不安定であること**がわかる．まさに，この点が元々のブラック p ブレーンがグレゴリー・ラフラーメ不安定であることを反映しているのである．さらに，粘性 (29) まで含めて音波を調べると，その分散関係は図 2 の様子を見事に再現する [10].

この辺で,「線形摂動の分散関係くらいなら再現できても，非線形領域の重力現象は流体では記述できないのでは？」と思った方もいるだろう．しかし，あなどることなかれ．得られた流体描像は $\epsilon \sim |\partial_z r_0| \ll 1$ さえ満たされていれば有効である．言い換えれば，r_0 や $|u^\mu|$ と言った物理量が大きすぎちゃいけない，小さすぎちゃいけないという制限はなく，例えば**地平線が切れそうな状況 ($r_0 \to 0$) でも流体記述が十分に通用する（可能性がある）**．数値実験 [5] に見られたような非線形現象が，近い将来ブラックホール流体力学で解明されると思われる．

参考のために，筆者による現時点での予想（妄想？）を述べておこう．筆者は，上で導かれた流体方程式を用いてグレゴリー・ラフラーメ不安定性を調べれば，ブラックストリングがちぎれる様子を目の当たりにできると考えている．ちぎれる直前の自己相似的振る舞い $r_0 \propto (t_0 - t)$ なども再現できると期待している．ただし，図1で見たようなクビレ部分に新たに発生するコブや臨界次元 n_c の存在を流体サイドで確認するには，$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(m\geq 2)} = 0$ に相当する高次の効果が必要とも感じている．

7 コメント

本文では議論の見通しを良くするため，真空 ($T_{ab} = \Lambda = 0$) におけるアインシュタイン方程式 (2) を用いた流体・重力対応を見てきた．しかし，始めに対応が確立されたのは，負の宇宙項 ($\Lambda < 0$) がある場合，いわゆる AdS/CFT(anti-de Sitter/conformal field theory) 対応の文脈に於いてである [12, 13, 14, 15]．その場合，(少し専門的な話に成らざるを得ないが) 10次元ブラック3ブレインから得られる流体力学は，量子色力学のような4次元ゲージ理論の長波長近似に相当すると期待されている．そこでは，クォークの閉じ込め・非閉じ込めに相当する1次相転移の機構を取り入れることが可能で，流体・重力対応の枠組みで表面を持った流体を自然に考えることができる [16]．すると，グレゴリー・ラフラーメ不安定性を（音波不安定性ではなく）レイリー・プラトー不安定性として再現することも可能となる [17, 18]．レイリー・プラトー不安定性では流体表面の切れ方が自己相似的 $r(t) \propto (t_0 - t)$ になることはよく知られており [19, 20]，より詳細な解析が待たれる．

また，本文では**「流体でブラックホールを理解する」という立場を貫いたが，実は逆の立場もある**（AdS/CFT 対応に関する研究も含めれば，むしろ後者が主流と言える）．例えば，ナヴィエ・ストークス方程式には一般解の存在証明や乱流の記述など重要かつ難解な課題が残されているし，相対論的ナヴィエ・ストークス方程式には因果律の破れや平衡状態の不安定性などの懸念もある．流体力学の背後に潜むのが「単なる」ブラックホールの運動というなら，上のような流体力学における諸問題が重力理論によって解決される可能性もあるだろう．

参考文献

[1] R. Gregory and R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2837.

[2] G. T. Horowitz and K. Maeda, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 131301.

[3] E. Sorkin, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 031601.

[4] H. Kudoh and U. Miyamoto, Class. Quant. Grav. **22** (2005) 3853.

[5] L. Lehner and F. Pretorius, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 101102.

[6] V. Cardoso and O. J. C. Dias, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 181601.

[7] U. Miyamoto and K. i. Maeda, Phys. Lett. B **664** (2008) 103.

[8] W. W. Mullins, J. Appl. Phys. **28**, 3, 333 (1957).

[9] U. Miyamoto, Phys. Rev. D **78** (2008) 026001.

[10] J. Camps, R. Emparan and N. Haddad, JHEP **1005** (2010) 042.

[11] 巽友正『連続体の力学』岩波書店 1995

[12] S. Bhattacharyya, V. E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, JHEP **0802** (2008) 045.

[13] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005).

[14] 夏梅誠，原子核研究 54-3(2010)110.

[15] 中村真，夏梅誠，物性研究 94-3(2010)350.

[16] O. Aharony, S. Minwalla and T. Wiseman, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 2171.

[17] K. i. Maeda and U. Miyamoto, JHEP **0903** (2009) 066.

[18] M. M. Caldarelli, O. J. C. Dias, R. Emparan and D. Klemm, JHEP **0904**, 024 (2009).

[19] J. Eggers, Rev. Mod. Phys. **69**, 865 (1997).

[20] U. Miyamoto, JHEP **1010** (2010) 011.