

Representations of a solvable Lie group
on $\bar{\partial}_b$ cohomology spaces

京大理 野村隆昭 (Takaaki NOMURA)

§1. $\mathfrak{g}$ を有限次元の実リー代数, $j \in \mathfrak{g}$ 上の実線型作用素で $j^2 = -1_{\mathfrak{g}}$ とみたすもの, そして $\omega \in \mathfrak{g}^*$ (i.e. ω は $\mathfrak{g}$ 上の一次形式) とする. 次の (i) ~ (iii) がみたさいるとき, 3つ組 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を *normal j -algebra* といい.

(i) $\mathfrak{g}$ は完全可解

(ii) $j \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の複素線型作用素に拡張し, $\mathfrak{g}^- \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における j の固有値 $-\sqrt{-1}$ に対応する固有空間とすると, $\mathfrak{g}^-$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分代数

$$(iii) \quad \begin{cases} \omega([jx, jy]) = \omega([x, y]) & \forall x, y \in \mathfrak{g} \\ \omega([x, jx]) > 0 & \forall x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\} \end{cases}$$

さて, $(\mathfrak{g}, j, \omega) \in \text{normal } j\text{-algebra}$ とし, $G = \exp \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ をリー代数に持つ連結かつ単連結なリー群とする. $\mathfrak{g}$ の基本的構造についてはよく知られている. 本稿では Rossi and Vergne [7, Theorem 4.3] に従って, 次の定理 1 にまとめよう. まず, 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ は内積 $\langle x, y \rangle = \omega([x, jy])$

と持ち、 ω はこの内積を ω 上の直交変換になっていることに注意する。また、 ω を j によって複素ベクトル空間と見たものの $\varepsilon(\omega, j)$ を表すと、 (ω, j) はエルミート内積

$$(1) \quad (x, y) = \omega([x, jy]) - i\omega([x, y])$$

を持ち、そして、 $\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(x, y)$ である。

定理1 (Pyatetskii-Shapiro [6]).

(i) $\pi' = [\omega, \omega]$ とし、 σ と ω における $\langle \cdot, \cdot \rangle$ にかんする π' の直交補空間とする。このとき、 σ は ω の可換部分代数を $\omega = \sigma + \pi'$ であり、 ω の随伴表現の制限で定義される σ の π' への表現は completely reducible である：

$$\pi_\alpha = \{x \in \omega; [H, x] = \alpha(H)x \quad \forall H \in \sigma\} \quad (\alpha \in \sigma^* \setminus \{0\})$$

とおくと $\pi' = \bigoplus \pi_\alpha$ 。そしてこの分解は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する直交分解である*。

(ii) $0 \neq \pi_\alpha \subset \sigma$ となる $\alpha \in \sigma^* \setminus \{0\}$ の全体を $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ とすると、 $l = \dim \sigma$, $\dim \pi_{\alpha_k} = 1$ ($1 \leq k \leq l$) であり、必要ならば番号を適当に付け変えると $\pi_\alpha \neq \{0\}$ となる $\alpha \in \sigma^* \setminus \{0\}$ は次の形(ただし、すべての possibilities が起こるとは限らない)。

$$\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_m) \quad (1 \leq m < k \leq l), \quad \frac{1}{2}(\alpha_k - \alpha_m) \quad (1 \leq m < k \leq l)$$

$$\frac{1}{2}\alpha_k \quad (1 \leq k \leq l), \quad \alpha_k \quad (1 \leq k \leq l)$$

$l = \dim \sigma$ のことを ω の階数と呼び $\operatorname{rank} \omega$ を表す。

*以後この π' は理れる。

$$(iii) \quad \mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g} + \sum_{k \geq m} \pi_{(\alpha_k - \alpha_m)/2}, \quad \mathfrak{g}(1/2) = \sum_{i=1}^l \pi_{\alpha_i/2},$$

$$\mathfrak{g}(1) = \sum_{k \geq m} \pi_{(\alpha_k + \alpha_m)/2}$$

とおくと, $[\mathfrak{g}(k), \mathfrak{g}(m)] \subset \mathfrak{g}(k+m)$ が成り立つ. そして

$$j \pi_{(\alpha_k - \alpha_m)/2} = \pi_{(\alpha_k + \alpha_m)/2} \quad (k > m), \quad j \pi_{\alpha_m/2} = \pi_{\alpha_m/2} \quad (1 \leq m \leq l)$$

(iv) $u_i \in \pi_{\alpha_i} \quad (1 \leq i \leq l)$ と $[j u_i, u_i] = u_i$ と選ぶと $\alpha_k(j u_i) = \delta_{ki}$ となる. $s = \sum_{i=1}^l u_i$ とおくと, $\mathfrak{g}(k)$ は $\text{ad } j s$ の k -固有空間.

以下 $\mathfrak{g}$ の部分空間上の Lebesgue 測度はすべて内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に關して正規化されているものとする. $G(0) = \exp \mathfrak{g}(0)$, $G(1) = \exp \mathfrak{g}(1)$ とそれぞれ $\mathfrak{g}(0)$, $\mathfrak{g}(1)$ に対応する G の連結部分群とする. また, $N = \exp(\mathfrak{g}(1/2) + \mathfrak{g}(1))$ は G の高々 2-step な連結バネ零部分群である. そして G は $G = N \rtimes G(0)$ と半直積で表される. さて我々の問題を述べる前に次の誘導表現 T の既約分解を考えてみよう: $T = \text{Ind}_{G(0)}^G \mathbb{1}$ ($\mathbb{1}$ は $G(0)$ の trivial 1次元表現). $G/G(0)$ と N とは微分同型であるから, T は $L^2(N)$ 上に実現できる (N は単連結バネ零リ一群故, N の Haar 測度は $\pi = \text{Lie } N$ 上の Lebesgue 測度):

$$(2) \quad T(g_0) f(n) = \delta(g_0)^{1/2} f(g_0^{-1} n g_0), \quad \delta(g_0) = (\det_{\pi} \text{Ad } g_0)^{-1}, \quad (g_0 \in G(0))$$

$$T(n_0) f(n) = f(n_0^{-1} n) \quad (n_0 \in N)$$

さて, 定理 1(iii) から $G(0)$ は $\mathfrak{g}(1)$ に G の随伴表現の制限を作用する. 従って $G(0)$ は $\mathfrak{g}(1)^*$ にその反値表現を作用する. こ

の作用での開軌道については次の事実が知られている。

命題1 (cf. Rossi et Vergne [8, Proposition 3.3.1]).

$\mathcal{X} = \{-1, 1\}^l$ ($l = \text{rank } \mathfrak{g}$) とおく。 u_i ($1 \leq i \leq l$) を定理 1(iv) の如くとし、 $u_i^* \in \mathfrak{g}(1)^*$ と $u_i^*(u_k) = \delta_{ik}$ ($1 \leq k \leq l$)、 $u_i^*|_{\pi(u_k + dm)/2} = 0$ ($k > m$) を定義する。 各 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l) \in \mathcal{X}$ に対して、 $\lambda_\eta = \sum_{i=1}^l \eta_i u_i^* \in \mathfrak{g}(1)^*$ とおくと、 $\{\lambda_\eta\}_{\eta \in \mathcal{X}}$ は $\mathfrak{g}(1)^*$ における $G(0)$ の開軌道の完全代表系となし、 $\mathfrak{g}(1)^*$ の開集合をなす軌道の次元は $\dim \mathfrak{g}(1)^*$ より真に小さい。 以下 $O_\eta = G(0) \cdot \lambda_\eta$ とおく。

G の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴表現による作用での開軌道については次の通り。

命題2. $\mathfrak{g}^*$ における G の開余随伴軌道も $\mathcal{X} = \{-1, 1\}^l$ でパラメトライズされ、 $\mathfrak{g}(1)^* \supset O_\eta \mapsto O_\eta \equiv \mathfrak{g}(0)^* + \mathfrak{g}(1/2)^* + O_\eta \subset \mathfrak{g}^*$ なる一対一対応がある。

以下 $\rho: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$ を Kirillov - Bernat 対応とする。 さて、 $\mathfrak{g}(1/2) = \{0\}$ とすると (この仮定は、 normal $\mathfrak{j}$ -algebra $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}, \omega)$ に対応する Siegel 領域が tube 領域になることと同

値), $T = \text{Ind}_{G(0)}^G \mathbb{1}$ は次の様にきれいに分解される:

$$(3) \quad T \cong \bigoplus_{\eta \in \mathcal{E}} \rho(\theta_\eta)$$

証明は $\mathcal{O}(1)$ と $\mathcal{O}(1)^*$ の duality による (euclidean) Fourier 変換を用いると容易. 分解 (3) が互いに同値でない既約ユニタリ表現の重複度 1 の和になっていることに注意. そして $\rho(\theta_\eta)$ ($\eta \in \mathcal{E}$) 達は G の Plancherel 公式が書き下せることにも注意しておく.

一般に $\mathcal{O}(1/2) \neq \{0\}$ とすると, 今度は $T \cong \bigoplus_{\eta \in \mathcal{E}} \infty \rho(\theta_\eta)$ となり, 各表現が無限の重複度を帯って現れる. これは一つには $G(0)$ が G に比べて小さすぎるということが原因である ($T|_N$ は N の左正則表現であることに注意). 表現論的には T の部分表現 T_0 を $T_0 \cong \bigoplus_{\eta \in \mathcal{E}} \rho(\theta_\eta)$ となるものは如何様にもとり出せるが, 本稿では重複度を "削っ" て, $\bigoplus_{\eta \in \mathcal{E}} \rho(\theta_\eta)$ となる表現と, 幾何学的な対象と関連づけて produce するのが目的である. 以下, つねに $\mathcal{O}(1/2) \neq \{0\}$ と仮定する. まず Rossi et Vergne [8, Théorème 3.5.11] による 1 つの結果を述べよう. そのために幾つかの準備が必要である.

簡単のため, $V = \mathcal{O}(1/2)$ とおく. V は $\mathfrak{g}$ で不変である (定理 1(iii)) から, $\mathfrak{g}|_V$ を V 上複素ベクトル空間とみなせて, $(V, \mathfrak{g})$ を表す. $V^\pm$ を $V_{\mathbb{C}}$ における $\mathfrak{g}$ の固有値 $\pm\sqrt{-1}$ に対応する固有空間とする^{*}. N のリー代数の複素化 $N_{\mathbb{C}}$ の元と N 上の

^{*} $V^\pm$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の可換部分代数になる.

左不変な微分作用素とみなして, $L^2_{CR}(N)$ と

$$\{f \in C^\infty(N) : Xf = 0 \quad \forall X \in V^-\} \cap L^2(N)$$

の $L^2(N)$ における閉包とすると, $L^2_{CR}(N)$ は (2) で定義された G のユニタリ表現 T で不変である. 一方

$$(4) \quad Q(x, y) = \frac{1}{4}([jx, y] + i[x, y]) \quad (x, y \in V)$$

とおくと, Q は $(V, j) \times (V, j)$ から $\mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}} \wedge$ の hermitian sesquilinear map である. $n = \dim_{\mathbb{C}}(V, j)$ とし, $\mathcal{O}(1)$ 上の一次形式の集合 Ξ , Ξ_p ($1 \leq p \leq n$) を次のように定義する.

$$(5) \quad \begin{aligned} \Xi &= \{\lambda \in \mathcal{O}(1)^* : \lambda \circ Q \text{ は非退化}\} \\ \Xi_p &= \{\lambda \in \Xi : \lambda \circ Q \text{ の負の固有値は } p \text{ 個, 正の固有値は } n-p \text{ 個}\}. \end{aligned}$$

$(\mathcal{O}, j, \omega)$ が normal j -algebra であることから, $\omega \in \Xi_n$ 従って $\Xi_n \neq \emptyset$ である. Ξ_n は $G(0)$ -不変な開集合であり, Ξ_n に含まれる開 $G(0)$ -軌道を全部とってそれらを $O_{\eta(1)}, \dots, O_{\eta(k)}$ ($\eta(m) \in \mathcal{X}$, $m=1, \dots, k$) とすると, $\overline{\Xi_n} = \bigcup_{m=1}^k \overline{O_{\eta(m)}}$ (バーは閉包) である. $O_{\eta(1)}, \dots, O_{\eta(k)}$ は命題 2 で得られる $\mathcal{O}^*$ の開余随伴軌道とする.

定理 2 (Rossi et Vergne). $T|_{L^2_{CR}(N)} \cong \bigoplus_{m=1}^k \mathcal{P}(O_{\eta(m)})$

注意 $\mathfrak{f} = \mathcal{O}(0)_{\mathbb{C}} + V^-$ とおくと, $\mathfrak{f}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の部分代数であ

り, $\omega \in \mathcal{O}^*$ に従属している. 余随伴軌道 $G \cdot \omega$ は開集合 (実際 $\eta = (-1, \dots, -1) \in \mathcal{X}$ に対応する $\mathcal{O}_\eta$ がある) であるから, $\mathfrak{f}$ は $\mathcal{O}_\mathbb{C} \times \mathcal{O}_\mathbb{C}$ 上の交代双一次形式 $x, y \mapsto \omega([x, y])$ に関する Lagrangian (= maximal totally isotropic) subspace である. しかし, $\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}} = \mathcal{O}(0)_\mathbb{C} + \mathcal{O}(\frac{1}{2})_\mathbb{C}$ は $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ の部分代数ではない. 従って, $\mathfrak{f}$ は polarization ではなく, weak polarization ではない (cf. Ozeki-Wakimoto [5]. 本稿で使う用語 polarization は [5, Def. 2.1] では admissible ω -polarization となっている). この weak polarization $\mathfrak{f}$ を用いて, Rossi et Vergne [8] では $T|_{L_{CR}^2(N)}$ が定式化されている.

従って, 問題は定理 2 で与えられている表現を如何にして拾いあげるかである. $L_{CR}^2(N)$ は, いわゆる自乗可積分な CR 函数の空間であるから, 次に自乗可積分な $\bar{\partial}$ -コホモロジー空間を考えるのが自然であろう.

§2. $M \in \mathbb{C}^n$ 多様体とする. Greenfield [2] に従って CR 多様体を定義する. 複素化された接バンドル $T(M)_\mathbb{C}$ の subbundle $T^{1,0}$ 次の (i), (ii) を満たすものが M 上の CR 構造と行う.

- (i) $T^{1,0} \cap T^{0,1} = \{0\}$ (zero section), ただし, $T^{0,1} = \overline{T^{1,0}}$.
- (ii) $T^{1,0}$ は involutive, i.e., α, β が $T^{1,0}$ の smooth sections

のとき, その bracket $[\alpha, \beta]$ も T^{10} の section

として, 対 (M, T^{10}) を CR 多様体としよう. 以下, M 上には Riemann 構造があつて, CR 構造と compatible に $T(M)_{\mathbb{C}}$ を Hermitian に拡張されてゐるものとする, i.e., $T^{10} \perp T^{01}$ かつ conjugation $-$ は $T_x(M)_{\mathbb{C}}$ ($\forall x \in M$) を isometry とする. $E = (T^{10} \oplus T^{01})^{\perp} \subset T(M)_{\mathbb{C}}$ とおき, Λ^{10} (resp. Λ^{01}) を $T^{01} \oplus E$ (resp. $T^{10} \oplus E$) の $T^*(M)_{\mathbb{C}}$ における annihilator とする.

$$\Lambda^{p,q} = \underbrace{\Lambda^{10} \wedge \cdots \wedge \Lambda^{10}}_{p} \wedge \underbrace{\Lambda^{01} \wedge \cdots \wedge \Lambda^{01}}_q \subset \Lambda^{p+q}(T^*(M)_{\mathbb{C}})$$

とおき, $\pi_{p,q}$ を直交射影 $\Lambda^{p+q}(T^*(M)_{\mathbb{C}}) \rightarrow \Lambda^{p,q}$ とする. $\Pi(\Lambda^{p,q})$ を $\Lambda^{p,q}$ の C^0 sections 全体を表すとき, $\bar{\partial}_b: \Pi(\Lambda^{p,q}) \rightarrow \Pi(\Lambda^{p,q+1})$ を $\bar{\partial}_b = \pi_{p,q+1} \circ d$ (d は外微分) と定義する. T^{10} が involutive であるから $\bar{\partial}_b \circ \bar{\partial}_b = 0$ となる.

さて我々の situation にもどろう. $\lambda = \sum_{i=1}^k u_i \in \mathcal{Q}(1)$ を定理 1 (iv) の如くとし, $\Omega = G(1) \cdot \lambda$ とおくと Ω は $\mathcal{Q}(1)$ における regular open convex cone である (Rossi and Vergne [7, Th. 4.15]). そして (4) で定義された Q は Ω -positive になるから, data Ω, Q から第 2 種 Siegel 領域 $D = D(\Omega, Q)$ が構成される:

$$D = \{(w, v) \in \mathcal{Q}(1)_{\mathbb{C}} \times (V, j); \operatorname{Im} w - Q(v, v) \in \Omega\}$$

さて, D の Šilov 境界を $S(D)$ とすると, よく知られてゐる

様に

$$S(D) = \{(w, v) \in \mathcal{U}(1)_{\mathbb{C}} \times V; \operatorname{Im} w - Q(v, v) = 0\}$$

となる. $S(D)$ は $\mathcal{U}(1)_{\mathbb{C}} \times (V, j)$ の実部分多様体であるから, 自然に $\mathbb{C}R$ 構造が入る: $\mathcal{T}(\mathcal{U}(1)_{\mathbb{C}} \times (V, j))$ を $\mathcal{U}(1)_{\mathbb{C}} \times (V, j)$ 上の正則接バンドルとすると,

$$T^{10}(S(D)) = T(S(D))_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{T}(\mathcal{U}(1)_{\mathbb{C}} \times (V, j))|_{S(D)}$$

で $S(D)$ に $\mathbb{C}R$ 構造が入る.

一方, §1 で導入したベキ零リ一群 $N = \exp(\mathcal{U}(1/2) + \mathcal{U}(1))$ の各元を $n(a, c)$ ($a \in \mathcal{U}(1)$, $c \in \mathcal{U}(1/2) = V$) で表すと, sesquilinear map Q の定義と Campbell-Hausdorff の公式から, N の群演算は次の様に記述される:

$$(6) \quad n(a, c)n(a', c') = n(a + a' + 2A(c, c'), c + c')$$

$$T \in \mathbb{R}, \quad A(c, c') = \operatorname{Im} Q(c, c').$$

N は $\mathcal{U}(1)_{\mathbb{C}} \times (V, j)$ に

$$n(a, c) \cdot (w, v) = (w + a + 2iQ(v, c) + iQ(c, c), v + c)$$

で働く. そして明らかに

$$\gamma: N \ni n(a, c) \mapsto n(a, c) \cdot (0, 0) = (a + iQ(c, c), c) \in S(D)$$

は上への微分同型である. さて N にも $T^{10}(N) = N \times V^+$ によって左不変な $\mathbb{C}R$ 構造が入る.

補題1. $\gamma: N \rightarrow S(D)$ は $\mathbb{C}R$ 同型.

§1を導入した $\mathcal{H}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathcal{H}$ 上に制限したものと再び $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を表す. この内積に関して, $\mathcal{H} = V \oplus \mathcal{H}(1)$ は直交分解である. $\mathcal{H}|_V$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して V 上の直交変換であるから, V^+ と V^- は, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を拡張した $V_{\mathbb{C}}$ のエルミート内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ を直交させている. $V^+ \oplus \mathcal{H}(1)_{\mathbb{C}}$ の $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^*$ における annihilator は自然に $(V^-)^*$ と同一視されるから, $\Lambda^{0,1}$ は $N \times (V^-)^*$ とみなされ, $(V^-)^*$ と V^+ には $\mathbb{C}$ -linear dualityがあるから, $\Gamma(\Lambda^{0,1})$ を N 上の V^+ 値 $\mathbb{C}^{\infty}$ 函数^(の空間)と同一視できる. 従って $\Gamma(\Lambda^{0,2})$ は N 上の $\Lambda^2 V^+$ 値 $\mathbb{C}^{\infty}$ 函数の空間とみることが出来る. V^+ の基底 $(Z_k)_{k=1}^n$ と $(\bar{Z}_k + \bar{Z}_k)_{k=1}^n$ が (V, j) で内積 $(\cdot, \cdot)$ (0)を定義されたものの (V, j) への制限)に関して正規直交基底となるものの全体を $\mathcal{B}(V^+)$ を表す. さて, $(Z_k)_{k=1}^n \in \mathcal{B}(V^+)$ をとって, $\varphi, \psi \in \Gamma_c(\Lambda^{0,2})$ (compact support of sections) と
 $\varphi = \sum_J' \varphi_J \otimes Z_J$ (ただし $Z_J = Z_{j_1} \wedge \dots \wedge Z_{j_2}$ for $J = (j_1, \dots, j_2)$)
と $\sum_J'$ は $1 \leq j_1 < \dots < j_2 \leq n$ なる $J = (j_1, \dots, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ についての和), $\psi = \sum_J' \psi_J \otimes Z_J$ と表すとき,

$$(\varphi, \psi)_g = \frac{1}{2^2} \sum_J' \int_N \varphi_J(n) \overline{\psi_J(n)} dn$$

を $\Gamma_c(\Lambda^{0,2})$ に pre-Hilbert space structure を与える. 勿論この定義は $(Z_k)_{k=1}^n \in \mathcal{B}(V^+)$ のとりに依る. $\mathcal{J}_b \in \bar{\partial}_b$ の formal adjoint i.e. $(\bar{\partial}_b \varphi, \psi)_{g+1} = (\varphi, \mathcal{J}_b \psi)_g$ とし,

$$\square_b = \mathcal{J}_b \bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b \mathcal{J}_b \quad \text{とする.}$$

補題 2. $\varphi \in \Gamma(\wedge^q)$, $\varphi = \sum_J' \varphi_J \otimes Z_J$ のとき,

$$\begin{aligned} \square_b \varphi = & -2 \sum_J' \left(\sum_{m \notin J} Z_m \bar{Z}_m + \sum_{m \in J} \bar{Z}_m Z_m \right) \varphi_J \otimes Z_J \\ & + 2 \sum_J' \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \sum_{m \notin J} [Z_{j_k}, \bar{Z}_m] \varphi_J \otimes Z_m \wedge Z_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{Z}_{j_k} \wedge \cdots \wedge Z_{j_q} \end{aligned}$$

ただし, $m \notin J = (j_1, \dots, j_q)$ (resp. $m \in J$) とは, $\forall k$ に対し, $m \neq j_k$ (resp. ある k に対して $m = j_k$) を示し, $\hat{Z}_{j_k}$ は Z_{j_k} という項がないことを示すものとする.

さて, 定義域を $\Gamma_b(\wedge^q)$ とする $\bar{\partial}_b, \mathcal{J}_b, \square_b$ をそれぞれ $(\bar{\partial}_b)_0^q$, $(\mathcal{J}_b)_0^q$, $(\square_b)_0^q$ とし, $\bar{\partial}_b^q, \mathcal{J}_b^q, \square_b^q$ をそれぞれ作用素 $(\bar{\partial}_b)_0^q$, $(\mathcal{J}_b)_0^q$, $(\square_b)_0^q$ の閉包とする. このとき, 簡単な議論で,

$$\begin{aligned} \text{Range } \bar{\partial}_b^{q-1} &\subset \text{Dom } \bar{\partial}_b^q \cap \text{Ker } \bar{\partial}_b^q \\ \text{i.e., } \bar{\partial}_b^q \circ \bar{\partial}_b^{q-1} &= 0 \quad \text{が示される.} \end{aligned}$$

$$H^q = \text{Ker } \bar{\partial}_b^q \ominus (\text{Range } \bar{\partial}_b^{q-1} \text{ の閉包})$$

とおき, H^q ($q=0, 1, \dots, n$) を自乗可積 $\bar{\partial}_b$ コホモロジー空間と呼ぶ.

補題 3. $H^q = \{ \varphi \in \text{Dom } \square_b^q : \square_b^q \varphi = 0 \} \quad \text{i.e. } H^q = \text{Ker } \square_b^q.$

§3. バネリー群 N 上の Fourier 変換について述べよう. $A = \text{Im } Q$ は $V \times V$ から $\mathfrak{g}(1)$ への交代双一次写像で, $Q(x, y) = A(jx, y) + iA(x, y)$ である. Ξ を (5) で定義された集合とすると, 容易に

$\lambda \in \Xi \iff$ 交代双一次形式 $\lambda \circ A$ が非退化.

がわかる. 従って, $\lambda \in \Xi \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$ の余随伴軌道は $\lambda + \mathfrak{g}(1/2)^*$ となる. ρ_λ を余随伴軌道 $\lambda + \mathfrak{g}(1/2)^*$ に対応する N の既約ユニタリ表現 (同値類ではなく一つの表現) とする. $\lambda(A(x, y)) = \langle A_\lambda x, y \rangle$ で $V = \mathfrak{g}(1/2)$ 上の歪対称作用素 A_λ と定め, $\text{Pf}(\lambda \circ A) = (\det A_\lambda)^{1/2}$ とおく. N は単連結バネリー群であるから, 作用素 $\rho_\lambda(f) = \int_N f(n) \rho_\lambda(n)^{-1} dn$ ($f \in C_c^\infty(N)$) は trace class になる.

Kirillov character formula. $\lambda \in \Xi$, $f \in C_c^\infty(N)$ のとき,

$$\text{Tr}(\rho_\lambda(f)) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \text{Pf}(\lambda \circ A)^{-1} \int_{\mathfrak{g}(1)} f(n(a, 0)) e^{-i\lambda(a)} da$$

ただし, $n = \dim_{\mathbb{C}}(V, j)$.

この指標公式と, Ξ が $\mathfrak{g}(1)^*$ で dense であることから, 次の反転公式を得る.

Inversion formula. $\mathcal{Q}(1)^*$ 上の Lebesgue 測度を適当に正規化すると, $f \in C_c^\infty(N)$ に対して

$$f(e) = \int_{\Xi} [T_\lambda P_\lambda(f)] Pf(\lambda \circ A) d\lambda$$

こゝより表現論の一般論を援用すると, 可測な既約 $\mathcal{U}$ -タリ表現の族 $\{(T_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)\}_{\lambda \in \Xi}$ が存在して

$$(7) \quad L^2(N) \cong \int_{\Xi}^{\oplus} \mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\lambda^+ Pf(\lambda \circ A) d\lambda \cong \int_{\Xi}^{\oplus} B_2(\mathcal{H}_\lambda) Pf(\lambda \circ A) d\lambda$$

となることがわかる. ただし, $\mathcal{H}_\lambda^+$ は $\mathcal{H}_\lambda$ に共役同型な Hilbert 空間, $B_2(\mathcal{H}_\lambda)$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\lambda$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素の全体がなす Hilbert 空間を表す.

§2 で定義された H^g 空間ともしよう. N の CR 構造は左不変であるから, 左移動で H^g 上への N の $\mathcal{U}$ -タリ表現 L_g が定義できる.

定理 3 (Rossi and Vergne [9, Th. 4.5]).

$$\sum_{g=0}^n L_g \cong \int_{\Xi}^{\oplus} T_\lambda Pf(\lambda \circ A) d\lambda.$$

§4. 我々はまず, 定理 3 と分解 (7) の関係を, 具体的に実現させた N の既約 $\mathcal{U}$ -タリ表現を通して明らかにすることから始

めよう. (V, j) 上のエルミート内積 $(\cdot, \cdot)$ に関する自己共役作用素 $H_\lambda \in \lambda(Q(x, y)) = (H_\lambda x, y)$ を定義し, (V, j) 上の複素線型作用素 j_λ を $j_\lambda = -i |H_\lambda|^{-1} H_\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を定義する. ただし, $|H_\lambda| = (H_\lambda^2)^{1/2}$. そうすると, V 上の実線型作用素とみたとき, j_λ は j と可換な複素構造であり, $\lambda \in \mathbb{C}_n$ のとき, $j_\lambda = j$, $\lambda \in \mathbb{C}_0$ のとき $j_\lambda = -j$ である. そして, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して j_λ は直交変換になっている. 以下 j_λ は V 上の実線型作用素とし, $V_{\mathbb{C}}$ 上の複素線型作用素に自然に拡張しておく. $V_{\mathbb{C}}(j_\lambda; -\sqrt{-1})$ を $V_{\mathbb{C}}$ の j_λ の固有値 $-\sqrt{-1}$ に対応する固有空間を表すことにし

$$\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}} + V_{\mathbb{C}}(j_\lambda; -\sqrt{-1})$$

とおく. このとき, $\mathcal{O}_\lambda$ は $\lambda \in \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ における totally complex な positive polarization となる. この $\mathcal{O}_\lambda$ を用いて N の holomorphically induced representation π_λ を構成しよう. $\chi_\lambda \in G(1)$ のユニタリ指標を $\chi_\lambda(n(a, 0)) = e^{i\lambda(a)}$ なるものとする. π_λ の表現空間 $\mathcal{S}_\lambda$ は次の (i), (ii) をみたす $f \in C^\infty(N)$ のなる空間の完備化 ((ii) の積分から定義されるノルムについて) である:

$$(i) \quad Yf = -i\lambda(Y)f \quad \forall Y \in \mathcal{O}_\lambda \quad (\text{左不変微分作用素とみたす})$$

$$(ii) \quad \int_{N/G(1)} |f(n)|^2 d\bar{n} < +\infty$$

($d\bar{n}$ は $N/G(1)$ 上の N -不変測度)

そして各表現作用素 $\pi_\lambda(n)$ は左移動を与えられる. 通常の誘導表現 $\text{Ind}_{G(1)}^N \chi_\lambda$ の空間を $L^2(N; \lambda)$ とすると, $\mathcal{H}_\lambda$ は $L^2(N; \lambda)$ の閉部分空間であることに注意しておく. 一方,

$$Q_\lambda(z, w) = \lambda(A(j_\lambda z, w)) + i\lambda(A(z, w))$$

とおくと, Q_λ は $(V, j_\lambda) \times (V, j_\lambda)$ 上の負定値 hermitian sesqui-linear form である. 一般に $\lambda \circ Q \neq Q_\lambda$ であることに注意. (V, j_λ) 上の正則函数 F は

$$\|F\|_\lambda^2 = \int_V |F(v)|^2 \exp 2Q_\lambda(v, v) dv < +\infty$$

を満たすものの全体のなす Hilbert 空間を $\mathcal{F}_\lambda(V)$ と表す. Q_λ は負定値であるから, $\mathcal{F}_\lambda(V) \neq \{0\}$ である. そして次で与えられる対応 $\mathcal{H}_\lambda \cap C^\infty(N) \ni f \mapsto F \in \mathcal{F}_\lambda(V)$

$$F(v) = f(n(v, v)) \exp -Q_\lambda(v, v)$$

は, $(d\pi)$ を適当に正規化することにより) Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\lambda$ と $\mathcal{F}_\lambda(V)$ との同型に拡張される. そして, π_λ は次のユニタリ表現 U_λ に変換される.

$$(8) \quad U_\lambda(n(a, b))F(v) = \exp(i\lambda(a) + Q_\lambda(b, b) - 2Q_\lambda(v, b)) \cdot F(v-b)$$

$(U_\lambda, \mathcal{F}_\lambda(V))$ は余随伴軌道 $\lambda + \mathfrak{g}(\frac{1}{2})^* \subset \mathfrak{h}^*$ に対応する N の既約ユニタリ表現である.

かくして N の既約ユニタリ表現の族 $(U_\lambda, \mathcal{F}_\lambda(V))_{\lambda \in \mathfrak{h}}$ を得るが, この族を "重ね合わせ" することが出来る, i.e., Hilbert

空間の場合 $\Xi \ni \lambda \mapsto \mathcal{F}_\lambda(V)$ が直積分可能であることを簡単に述べておく. 今, ベクトルの場 $\Xi \ni \lambda \mapsto F_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda(V)$ が可測 (可測性* の Lebesgue 測度に関して) であるとは, 任意の $v \in V$ に対して, 函数 $\lambda \mapsto F_\lambda(v)$ が可測であるときと定義する (各 F_λ は $\mathcal{F}_\lambda(V)$ の元, 従って一点 $v \in V$ の値 $F_\lambda(v)$ が意味と持っことに注意). この様に定義された可測なベクトルの場 $\Xi \ni \lambda \mapsto F_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda(V)$ の全体を Γ とおくと, Γ は複素ベクトル空間であり, Dixmier [1, p. 164] の Definition 1 (i) ~ (iii) とみたすことが示される ($K_\lambda(z, w) = (\frac{2}{\pi})^n Pf(\lambda \circ A) \exp -2Q_\lambda(z, w)$ が $\mathcal{F}_\lambda(V)$ の再生核であることをフルに使う). 従って

$$\begin{aligned} \text{定理 4. } L^2(N) &\cong \int_{\Xi}^{\oplus} \mathcal{F}_\lambda(V) \otimes \mathcal{F}_\lambda(V)^* Pf(\lambda \circ A) d\lambda \\ &\cong \int_{\Xi}^{\oplus} B_2(\mathcal{F}_\lambda(V)) Pf(\lambda \circ A) d\lambda \end{aligned}$$

注意. ここで構成した既約ユニタリ表現の族 $(U_\lambda, \mathcal{F}_\lambda(V))_{\lambda \in \Xi}$ は, Ogden-Vagi [4] で構成されているものと, holomorphic induction の手続きを以て整理したものである.

さて, $V_+^0(\lambda) = \wedge^0 V^+ \quad (\forall \lambda \in \Xi)$ とおくと, $\lambda \mapsto V_+^0(\lambda)$ は constant な Hilbert 空間の場がある. Dixmier [1, Prop. 11, p. 174] より次の系を得る.

$$\begin{aligned} \text{系. } L^2(N) \otimes \wedge^q V^+ &\cong \int_{\Xi}^{\oplus} \mathcal{F}_{\lambda}(V) \otimes \mathcal{F}_{\lambda}(V)^{\dagger} \otimes V_+^q(\lambda) \text{Pf}(\lambda \circ A) d\lambda \\ &\cong \int_{\Xi}^{\oplus} B_2(\mathcal{F}_{\lambda}(V)) \otimes V_+^q(\lambda) \text{Pf}(\lambda \circ A) d\lambda \end{aligned}$$

系の同型に従って, $L^2(N) \otimes \wedge^q V^+$ の閉部分空間である H^q を特徴付けよう. V 上の複素構造 j_{λ} は j と可換であるから, j_{λ} は V^+ を不変にする. $V^+(j_{\lambda}; \sqrt{-1})$ を V^+ における j_{λ} の固有値 $\sqrt{-1}$ に対応する固有空間とし, $p(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} V^+(j_{\lambda}; \sqrt{-1})$ とおく. $\lambda \mapsto p(\lambda)$ は Ξ に locally constant である. 実際 $\lambda \in \Xi_q$ のとき, $p(\lambda) = q$ である. $\mathcal{G}(\lambda) = \wedge^{p(\lambda)} V^+(j_{\lambda}; \sqrt{-1})$ とおく. 明らかに $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G}(\lambda) = 1$ で $\lambda \in \Xi_q$ のとき, $\mathcal{G}(\lambda) = \wedge^q V^+(j_{\lambda}; \sqrt{-1}) \subset V_+^q(\lambda)$ となる. 従って $(\lambda \mapsto j_{\lambda})$ は連続 (piecewise) ゆえ $\lambda \mapsto \mathcal{G}(\lambda)$ は 1 次元 Hilbert 空間の連続 (piecewise) な場である.

一方, 任意の $\lambda \in \Xi$ に対して, V 上の恒等的に 1 なる函数 $\mathbb{1}$ は $\mathcal{F}_{\lambda}(V)$ に属する. $B_2(\mathcal{F}_{\lambda}(V))$ に属する作用素 T で値域 $\text{Range } T$ が 1 次元部分空間 $\subset \mathbb{1}$ に含まれるものの全体を $A(\mathcal{F}_{\lambda}(V))$ とする. 明らかに $A(\mathcal{F}_{\lambda}(V))$ は $B_2(\mathcal{F}_{\lambda}(V))$ の閉部分空間で, $A(\mathcal{F}_{\lambda}(V))$ 自身 Hilbert 空間である.

定理 5. $H^g \cong \int_{\Xi_g}^{\oplus} A(\mathcal{F}_\lambda(V)) \otimes \mathcal{G}(\lambda) Pf(\lambda \circ A) d\lambda$

$$\cong \int_{\Xi_g}^{\oplus} \mathcal{F}_\lambda(V)^\dagger Pf(\lambda \circ A) d\lambda$$

$$\cong \int_{\Xi_{n-g}}^{\oplus} \mathcal{F}_\lambda(V) Pf(\lambda \circ A) d\lambda$$

注意. (i) 写像 $A(\mathcal{F}_\lambda(V)) \ni T \mapsto T^* \left(\frac{1}{\|1\|_\lambda} \right) \in \mathcal{F}_\lambda(V)^\dagger$ が $A(\mathcal{F}_\lambda(V))$ と $\mathcal{F}_\lambda(V)^\dagger$ との Hilbert 空間としての同型を与える.

(ii) $\mathcal{F}_\lambda(V)^\dagger \cong \mathcal{F}_{-\lambda}(V)$ は $j_{-\lambda} = -j_\lambda$ から容易に導かれる.

系 (Rossi and Vergne [9]). $H^g = \{0\} \iff \Xi_g = \emptyset$

§5. さて H^g を unitary G -module にすることを考えよう. まず最初に次の事に注意する. $G = N \rtimes G(0)$ と半直積に表されるから $G/G(0)$ は reductive coset space である. よく知られている様に " $G/G(0)$ 上に G 不変な Riemann 計量が存在する $\iff \mathfrak{n} = \text{Lie } N$ 上に $\text{Ad}_G G(0)$ 不変な正定値内積が存在する" であるから, 我々の場合 $G/G(0)$ 上には G 不変な Riemann 計量が存在しない. 従って, 通常の手続きでコホモロジー空間 H^g 上に G のユニタリ表現は定義できない. ところが, 定理 5 により, $H^g \cong \int_{\Xi_{n-g}}^{\oplus} \mathcal{F}_\lambda(V) Pf(\lambda \circ A) d\lambda$ であり, Ξ_{n-g} は $G(0)$ space であるから, 各 fiber $\mathcal{F}_\lambda(V)$ を $\mathcal{F}_{g,\lambda}(V)$ に写すユニタリ

リ変換が見つければ $G = N \rtimes G(0)$ のユニタリ表現を定義することができる。しかし、 j_λ と $\text{Ad}_V g_0$ ($g_0 \in G(0)$) の関係が簡単でないのび、求める変換 $\mathcal{F}_\lambda(V) \rightarrow \mathcal{F}_{g_0 \cdot \lambda}(V)$ を直接見出すのは難しい(結果としては見つかる)。そこで N の既約ユニタリ表現の別の実現を作ることから再出発する。

§6. 各 $\eta \in \mathcal{E} = \{-1, 1\}^L$ に対し、 $\lambda_\eta \in \mathfrak{g}(1)^*$ と命題1で定義されたものとする。 j_{λ_η} と λ_η に対して §4 の冒頭の様にして作られる V 上の複素構造とし、 V 上の作用素 $j_{g,\eta}$ と

$$j_{g,\eta} = (\text{Ad}_V g) \circ j_{\lambda_\eta} \circ (\text{Ad}_V g)^{-1} \quad (g \in G(0))$$

を定義する。 $\text{Ad}_V g$ と j は可換であるから、 $j_{g,\eta}$ は j と可換な V 上の複素構造である。ただし、 V 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して、一般には、 $j_{g,\eta}$ は直交変換ではない。その代り、次の有用な関係式が成り立つ。

$$(9) \quad (\text{Ad}_V g_1) \circ j_{g_2,\eta} = j_{g_1 g_2,\eta} \circ (\text{Ad}_V g_1) \quad (\forall g_1, g_2 \in G(0), \eta \in \mathcal{E}).$$

以下 §4 と全く同じ方法で N の既約ユニタリ表現を構成する:

$$\sigma_{g,\eta} = \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}}(j_{g,\eta}; -\sqrt{-1})$$

は $g \cdot \lambda_\eta$ における totally complex positive polarization である。この $\sigma_{g,\eta}$ を用いて構成される holomorphically induced representation $\pi_{g,\eta}$ とすると、 $\mathcal{H}_{g,\eta}$ は $L^2(N; \lambda)$ ($\lambda = g \cdot \lambda_\eta$) の閉部分空間である(このことは §7 で

π_λ と $\pi_{g,\eta}$ ($\lambda = g \cdot \lambda_\eta$) との間の intertwining operator の構成に
おいて用いる). 一方

$$Q_{g,\eta}(z, w) = \lambda(A(j_{g,\eta} z, w)) + i\lambda(A(z, w)) \quad (\lambda = g \cdot \lambda_\eta)$$

とすると, $Q_{g,\eta}$ は $(V, j_{g,\eta}) \times (V, j_{g,\eta})$ 上の負定値 hermitian
sesqui-linear form である. $(V, j_{g,\eta})$ 上の holomorphic
functions F は

$$\|F\|_{g,\eta}^2 = \int_V |F(v)|^2 \exp 2Q_{g,\eta}(v, v) dv < +\infty$$

をみたすものの全体のなす Hilbert 空間を $\mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ で表す.

$\mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ 上に N の既約 $\mathbb{C}$ -タリ表現 $U_{g,\eta}$ が次の様に実現さ
れる.

$$(10) \quad U_{g,\eta}(n(a, b))F(v) = \exp(i g \cdot \lambda_\eta(a) + Q_{g,\eta}(b, b) - 2Q_{g,\eta}(v, b)) \cdot F(v - b)$$

このとき, $G(10)$ の左 Haar 測度と有限集合 $\mathcal{E} = \{-1, 1\}^2$ 上の
counting measure に関して, Hilbert 空間の場合 $G(10) \times \mathcal{E}$
 $\ni (g, \eta) \mapsto \mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ が直積分可能ということも, §4 の $\mathcal{F}_\lambda(V)$
の場合と同様に示される.

$G(10)$ が完全可解で, $\dim \mathcal{O}(10) = \dim \mathcal{O}(1)$ なることから,
 $\mathcal{O}(1)^*$ での各開 $G(10)$ 軌道 $\mathcal{O}_\eta$ ($\eta \in \mathcal{E}$) と $G(10)$ は微分同型で
あることに注意しておく. model $(U_{g,\eta}, \mathcal{F}_{g,\eta}(V))_{g \in G(10), \eta \in \mathcal{E}}$
を用いた $L^2(N)$ の分解は次の通りである.

定理 6. $L^2(N) \cong \sum_{\eta \in \mathbb{R}} \int_{G(0)}^{\oplus} B_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V)) \delta(g) dg$
 ただし, $\delta(g) = (\det_n \text{Ad} g)^{-1}$ ($g \in G(0)$) と dg は $G(0)$ の左 Haar 測度.

注意. $\mathcal{F}_{g,\eta}$ が一般には V 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して直交変換ではなくなる故, $\text{model}(U_{g,\eta}, \mathcal{F}_{g,\eta}(V))_{g \in G(0), \eta \in \mathbb{R}}$ を用いてコホモロジー空間 H^0 を直接解析することは困難である.

各 $g_0 \in G(0)$ と V 上の函数 F に対して

$$R(g_0)F(v) = (\det_v \text{Ad} g_0)^{-1/2} F((\text{Ad} g_0)^{-1}v)$$

とおく. 関係式(9)を用いて次の補題が示される.

補題 4. (i) 任意の $g, g_0 \in G(0)$ と $\eta \in \mathbb{R}$ に対して $R(g_0)$ は $\mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ から $\mathcal{F}_{g_0g,\eta}(V)$ の上への $\mathbb{C}$ -タリな写像である.

$$(ii) \quad R(g_0)U_{g,\eta}(n(g_0^{-1} \cdot a, g_0^{-1} \cdot b)) = U_{g_0g,\eta}(n(a, b))R(g_0)$$

§7. この節ではつねに $\lambda = g \cdot \lambda_\eta$ ($g \in G(0)$, $\eta \in \mathbb{R}$) とおく. $\mathbb{C}$ -タリ同値な N の $\mathbb{C}$ -タリの既約 $\mathbb{C}$ -タリ表現 $(U_\lambda, \mathcal{F}_\lambda(V))$ と $(U_{g,\eta}, \mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ との間の intertwining operator を構成しよう. これは丁度 positive polarization のとりかえ $\sigma_\lambda \rightarrow \sigma_{g,\eta}$ に対応する intertwining operator である (Mazneron [3] 参照).

我々の場合, $\mathcal{U}_\lambda$ も $\mathcal{U}_{g,\eta}$ も共に totally complex なので議論は単純明快である. まず $\mathcal{U}_\lambda$ 及び $\mathcal{U}_{g,\eta}$ が通常の誘導表現 $\text{Ind}_{G(u)}^G \chi_\lambda$ の空間 $L^2(N; \lambda)$ の閉部分空間であったことを思い起こそう. このとき,

$$\mathcal{U}_\lambda \xrightarrow{\text{injection}} L^2(N; \lambda) \xrightarrow{\text{直交射影}} \mathcal{U}_{g,\eta}$$

を得られる作用素 $\mathcal{U}_\lambda \rightarrow \mathcal{U}_{g,\eta}$ が unitary intertwining operator と与えることは明らかである. これを $\mathcal{F}_\lambda(V)$ から $\mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ への作用素として表すと次の様になる:

$$(II) \quad I_{g,\eta} F(v_0) = \int_V F(v) \exp[Q_\lambda(v, v) + Q_{g,\eta}(v, v) - 2Q_{g,\eta}(v_0, v)] dv$$

とおくと, 正の定数 $C_{g,\eta}$ が存在して, $C_{g,\eta} I_{g,\eta}$ は $\mathcal{F}_\lambda(V)$ から $\mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ ^(の上)へのユニタリな写像を $U_{g,\eta}(n) = I_{g,\eta} U_\lambda(n) (I_{g,\eta})^{-1}$ ($\forall n \in N$) が成り立つ. 勿論この intertwining relation を直接確かめることも容易である ($\text{Im } Q_\lambda = \text{Im } Q_{g,\eta}$ に注意).

(III) の右辺が $\forall F \in \mathcal{F}_\lambda(V)$ に対して絶対収束していることも注意しておく. なお, この積分変換は, N が Heisenberg 群のとき ($\text{rank } g = 1$ のときがそうである) すでに Satake [10] に現れたものである.

注意. $\lambda \in \mathbb{C}_n$ のとき, $\mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{u}_{g,\eta} = \mathfrak{u}$ であるから, 2つの model $(U_\lambda, \mathcal{F}_\lambda(V))$ と $(U_{g,\eta}, \mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ は同一である. このときは, (III)

は、函数 $\exp -2Q_{\lambda}(z, w)$ の正の定数倍が再生核ということから、確かに恒等作用素の正の定数倍になっている。

補題 5. $\psi_{g,\eta}(v) = \exp \frac{1}{2} (Q_{\lambda}(v, v) - Q_{g,\eta}(v, v) - i \operatorname{Re} Q_{g,\eta}(v, j_{\lambda} v))$ とおくと、 $\psi_{g,\eta} \in \mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ であって、 $I_{g,\eta} \mathbb{1} \in \mathbb{C} \psi_{g,\eta}$ 。

§8. $B_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ に属する作用素 T の値域 $\operatorname{Range} T$ が一次元部分空間 $\mathbb{C} \psi_{g,\eta}$ に含まれるものの全体を $\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ で表すと $\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ は Hilbert 空間 $B_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ の閉部分空間、従って $\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ 自身 Hilbert 空間である。さて、

$$\int_{\oplus} B_2(\mathcal{F}_{\lambda}(V)) Pf(\lambda \circ A) d\lambda \ni F \mapsto \tilde{F} \in \sum_{\eta \in \mathcal{X}} \int_{G(0)}^{\oplus} B_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V)) \delta(g) dg$$

$$\tilde{F}_{g,\eta} = I_{g,\eta} F_{g,\lambda_{\eta}} (I_{g,\eta})^{-1}$$

は上への等長写像であり、次の Hilbert 空間としての同型を引き起こす。

$$\int_{\oplus 0_{\eta}} A(\mathcal{F}_{\lambda}(V)) Pf(\lambda \circ A) d\lambda \cong \int_{G(0)}^{\oplus} \mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V)) \delta(g) dg \quad (\forall \eta \in \mathcal{X})$$

$\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V)) \cong \mathcal{F}_{g,\eta}(V)^{\dagger} \cong \mathcal{F}_{g,-\eta}(V)$ であるから、定理 5, 6 と上の議論から次の定理を得る。

定理 7. $H^0 \cong \sum \int_{G(0)}^{\oplus} \mathcal{F}_{g,-\eta}(V) \delta(g) dg$, 凡て $\sum$ は $O_\eta \subset \mathbb{E}_g$ となる $g \in \mathcal{G}$ すべてに対する和.

定理 7 の右辺は補題 4 (i) によって容易に unitary G -module とすることが出来るから, H^0 に G のユニタリ表現 σ_g が定義できたことになる. ここでは $\int_{G(0)}^{\oplus} \mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V)) \delta(g) dg$ のユニタリ表現 π_η を書き下しておく. $e_{g,\eta} = \psi_{g,\eta} / \|\psi_{g,\eta}\|_{g,\eta}$ とし, 各 $x, y \in G(0)$ と $g \in \mathcal{G}$ に対して, 部分的等長写像 $P_{y,x}^g: \mathcal{F}_{x,\eta}(V) \rightarrow \mathcal{F}_{y,\eta}(V)$ を次のように定義する:

$$P_{y,x}^g = (\cdot, e_{x,\eta}) e_{y,\eta}$$

このとき, 容易に $P_{z,y}^g P_{y,x}^g = P_{z,x}^g$ が成り立つことがわかる.

そして π_η の表現作用素は

$$(12) \quad \pi_\eta(g) F(x) = \delta(g)^{-1/2} P_{x,g^{-1}x}^g F(g^{-1}x) R(g^{-1}) \quad (g \in G(0))$$

$$\pi_\eta(n) F(x) = F(x) U_{x,\eta}(n)^{-1} \quad (n \in N)$$

$$(F \in \int_{G(0)}^{\oplus} \mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V)) \delta(g) dg)$$

補題 6. $\rho: \mathcal{G}^*/G \rightarrow \hat{G}$ と Kirillov - Bernat 対応とすると, $\pi_\eta \cong \rho(\theta_\eta)$

定理 8. $\sigma_g \cong \sum \rho(\theta_\eta)$, 凡て $\sum$ は $O_\eta \subset \mathbb{E}_{n-g}$ となる $g \in \mathcal{G}$ すべてについての和で, $\theta_\eta = \mathcal{G}(0)^* + \mathcal{G}(1/2)^* + O_\eta$ である.

注意. 定理 8 で $q=0$ のときが定理 2 である. $0_\eta \in \Xi_n$ となる様な $\eta \in \mathfrak{g}$ に対しては, $j_\lambda = j_{q,\eta} = j$ であるから, $\psi_{q,\eta} = 1$ であることに注意. 従ってその様な $\eta \in \mathfrak{g}$ に対しては, (12) の表示 $\pi_\eta(q)$ ($q \in G(0)$) において, $P_{x,q^{1/2}}^\eta$ の部分を $R(q)$ としてもよく, また恒等作用素におきかえてもよい. しかし, 一般の $\eta \in \mathfrak{g}$ に対しては, $R(q_0)\psi_{q,\eta} \in \mathbb{C}\psi_{q_0,\eta}$ であるからそういう訳にはいかない.

かくして, $\sum_{g=0}^n \sigma_g \cong \sum_{\eta \in \mathfrak{g}} f(\sigma_\eta)$ とはり, G の Plancherel 公式に現れる G の既約ユニタリ表現が丁度一回ずつ全部並ぶ表現を部分群 N の CR 構造と関連づけて得ることができた.

なお ^(具体的な) L^2 -対応の形での G の Plancherel 公式については稿を改めて報告する予定である.

References

- [1] J.Dixmier, Von Neumann algebras, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [2] S.J.Greenfield, Cauchy-Riemann equations in several complex variables, Ann. Scuola Norm. Pisa, 22 (1968), 275-314.
- [3] B.Magneron, Spineurs symplectiques purs et indice de Maslov de plans lagrangiens positifs, J. Funct. Anal., 59 (1984), 90-122.
- [4] R.D.Ogden and S.Vagi, Harmonic analysis of a nilpotent group and function theory on Siegel domains of type II, Adv. Math., 33 (1979), 31-92.

- [5] H.Ozeki and M.Wakimoto, On polarizations of certain homogeneous spaces, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 445-482.
- [6] I.I.Pyatetskii-Shapiro, Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [7] H.Rossi and M.Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the applications to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Funct. Anal., 13 (1973), 324-389.
- [8] _____, Equations de Cauchy-Riemann tangentielles associées à un domaine de Siegel, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 9 (1976), 31-80.
- [9] _____, Group representations on Hilbert spaces defined in terms of $\bar{\partial}_b$ -cohomology on the Silov boundary of a Siegel domain, Pacific J. Math., 65 (1976), 193-207.
- [10] I.Satake, Factors of automorphy and Fock representations, Adv. Math., 7 (1971), 83-110.