

Un produit de composition des fonctions sur des espaces symétriques  
semi-simples

par Shigeru Sano (佐野 茂)

(The Institute of Vocational Training)  
職業訓練大学校

## §0. Introduction

Dans le groupe localement compact, un produit de composition des fonctions est une notion fondamentale. Le produit de composition a rapport à la théorie de représentation du groupe. Dans le cas particulier du groupe abélien, la transformation de Fourier garde ce produit, c'est-à-dire,  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ . D'autre part, dans l'espace symétrique riemannien  $G/K$ , le produit de composition est défini pour des fonctions  $K$ -biinvariantes.

On veut donner le produit de composition dans un espace symétrique semi-simple  $G/H$ . On généralise la décomposition de Cartan associée à  $(G, H)$  (Corollaire 1.2). D'après cette décomposition, on définit le produit de compositions qui coïncide avec celui du groupe et de l'espace symétrique riemannien (Définition 1.1).

Harish-Chandra a montré le théorème de récurrence associée à le produit de composition dans le groupe de Lie semi-simple pour étudier les distributions propres invariantes (Théorème 1 [2(2)]). On généralise ce théorème dans l'espace symétrique semi-simple  $G/H$  (Théorème 1.1).

### §1. Un produit de composition

Dans ce paragraphe, on étudie un produit de composition des fonctions mesurables sur des espaces symétriques semi-simples. Le produit de composition est utile à l'analyse harmonique sur les espaces symétriques comme dans le cas des groupes de Lie.

Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple connexe muni d'une involution  $\sigma$ , et  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$  l'algèbre de Lie symétrique associée. Soit  $H_0$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ ,  $G_\sigma$  le sous-groupe des points fixes de  $\sigma$  dans  $G$  et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  compris entre  $H_0$  et  $G_\sigma$ . On considère une involution de Cartan  $\theta$  de  $\mathfrak{g}$  qui commute à  $\sigma$ . Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  (resp.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ ) la décomposition de  $\mathfrak{g}$  correspondant aux valeurs propres  $+1$  et  $-1$  pour  $\sigma$  (resp.  $\theta$ ). Soit  $K$  le sous-groupe analytique de  $G$  associé à  $\mathfrak{k}$ .

Soit  $\mathcal{Z}$  un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}$  et  $B$  un sous-groupe analytique de  $G$  associé. La décomposition suivante de  $G$  est donnée par (Corollaire I.4.[3]).

Proposition 1.1. Le groupe  $G$  admet la décomposition suivante :

$$G = KBH.$$

De plus  $k_1 b_1 H = k_2 b_2 H$  si, et seulement si, il existe un élément  $l$  de  $K \cap H$  tel que  $k_1 = k_2 l$  et  $b_1 = l^{-1} b_2 l$ .

Soit  $\mathcal{Z}_0$  un sous-espace abélien de  $\mathfrak{p}$ .  $\mathcal{Z}_0$  s'appelle un espace  $\mathfrak{g}$ -déployé s'il satisfait aux conditions: 1)  $\mathcal{Z} = \{X - \sigma X : X \in \mathcal{Z}_0\}$  est un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}$ , 2) l'application linéaire  $X \mapsto X - \sigma X$ , de  $\mathcal{Z}_0$  sur  $\mathcal{Z}$  est bijective, 3)  $N_{K \cap H}(\mathcal{Z}_0) = N_{K \cap H}(\mathcal{Z})$

où  $N_{K/H}(\Omega)$  est le normalisateur de  $\Omega$  dans  $K/H$ . Tout sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$  est  $\mathfrak{q}$ -déployé. On généralise la proposition 1.1 à l'aide de la notion ci-dessus.

Corollaire 1.2. Soit  $\mathcal{Z}_0$  un sous-espace abélien  $\mathfrak{q}$ -déployé de  $\mathfrak{p}$  et  $B_0$  le sous-groupe analytique de  $G$  associé. On a alors la décomposition

$$G = KB_0H.$$

De plus  $k b_0 H = k' b'_0 H$  ( $k, k' \in K$ ,  $b_0, b'_0 \in B_0$ ) si, et seulement si, il existe un élément  $l$  de  $K/H$  tel que  $k = k'l$  et  $b_0 = l^{-1} b'_0 l$ .

Démonstration. Soit  $\mathcal{Z} = \{X - \alpha X : X \in \mathcal{Z}_0\}$  et  $B$  le sous-groupe analytique de  $G$  associé. Alors d'après la décomposition  $G = KBH$  de la proposition 1.1 et les conditions de  $\mathcal{Z}_0$ , on a l'assertion du corollaire.

Q.E.D.

Soit  $A_g$  ( $g \in G$ ) l'action de  $G$  sur  $G/H$  définie par  $A_g(xH) = gxH$ .

L'involution  $\sigma$  induit un difféomorphisme sur  $G/H$  par  $\sigma(xH) = \sigma(x)H$  ( $xH \in G/H$ ). Alors  $\sigma A_g = A_{\sigma g} \sigma$  ( $g \in G$ ). Soit  $dx_H$  une forme  $G$ -invariante positive sur  $G/H$ . On pose  $d(\sigma x)_H = \sigma^* dx_H$ .

Lemme 1.3.

$$d(\sigma x)_H = (-1)^{\dim \mathfrak{q}} dx_H$$

Démonstration. D'après

$$\begin{aligned} A_g^* d\alpha|_H &= (\sigma A_g)^* dx_H \\ &= (A_{\sigma g}, \sigma)^* dx_H \\ &= d\alpha|_H \end{aligned}$$

$d\alpha|_H$  est une forme  $G$ -invariante sur  $G/H$ , alors proportionnelle à  $dx_H$ . Mais évidemment  $d\alpha|_H|_H = (-1)^{\dim \mathfrak{g}} dx_H|_H$ , par conséquent, le lemme est vérifié. Q.E.D.

Soit  $\mathfrak{z}_0$  un sous-espace abélien  $\mathfrak{g}$ -fendu de  $\mathfrak{p}$  et  $B_0$  le sous-groupe analytique de  $G$  associé. Soit  $C(G/H)$  (resp.  $C_c(G/H)$ ) l'ensemble des fonctions continues (resp. continues à support compact) sur  $G/H$ . D'après le corollaire 1.2, on définit un produit de composition des fonctions:

Définition 1.1. Soit  $f \in C(G/H)$  et soit  $\alpha \in C_c(G/H)$  telle que  $\alpha(lxH) = \alpha(xH)$  pour tout  $l \in K \cap H$  et  $x \in H$ . On définit un produit de composition des fonctions  $f$  et  $\alpha$  en posant

$$f \otimes \alpha(xH) = \int_{G/H} f(xyH) \alpha(\sigma(y)H) dy_H \quad (x \in KB_0).$$

Remarque. 1) D'après le lemme 1.3 et l'orientation de  $G/H$ , le produit de composition est encore égal à

$$f \otimes \alpha(xH) = \int_{G/H} f(\sigma(y)H) \alpha(\sigma(x)^{-1}yH) dy_H.$$

2) Soit  $G/K$  un espace symétrique riemannien du type non-compact et soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  la décomposition de l'algèbre de Lie associée. Soit  $dg$  une mesure de Haar sur  $G$ . Supposons que le centre de  $G$  soit fini. Soit  $dk$  la mesure de Haar sur  $K$  normalisée par  $\int_K dk = 1$ . Soit  $dg_K$  la mesure  $G$ -invariante sur  $G/K$  telle que  $dg = dg_K dk$ . Soit  $\mathfrak{n}$  un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}$  et soit  $A$  le sous-groupe analytique de  $G$  associé. Si  $f$  et  $\alpha$  sont deux fonctions continues sur  $G$  telles que  $f(gk) = f(g)$  et  $\alpha(kgk') = \alpha(g)$  pour  $k, k' \in K$  et  $g \in G$ , on a

$$\begin{aligned} f \otimes \alpha(gK) &= \int_{G/K} f(ghK) \alpha(o(h)K) d\mathfrak{h}_K \\ &= \int_G f(gh) \alpha(h^{-1}) dh \quad (g \in KA). \end{aligned}$$

Ainsi le produit de composition coïncide avec le produit de composition de l'espace symétrique  $G/K$  (cf. [1] p316).

3) Soit  $G'$  un groupe de Lie semi-simple connexe. L'espace symétrique  $G/H = G' \times G' / d(G')$  s'identifie à  $G'$  par l'isomorphisme analytique  $\varphi: (g, g_1) d(G') \mapsto g, g_1^{-1}$ . Soit  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + \mathfrak{p}'$  la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de  $G'$ . Soit  $K'$  le sous-groupe de  $G'$  associée à  $\mathfrak{k}'$ . Soit  $\mathfrak{n}'$  un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}'$  et soit  $A'$  le sous-groupe analytique de  $G'$  associé. On pose  $\mathfrak{z}_0 = \{X, 0\} : X \in \mathfrak{n}'\}$ .  $\mathfrak{z}_0$  est un sous-espace abélien  $\mathfrak{g}$ -déployé de  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \times \mathfrak{p}'$ .

Soit  $B_0$  et  $K$  les sous-groupes analytiques de  $G$  associé à  $\mathcal{Z}_0$  et  $k' \times k'$  respectivement. On définit le produit de composition par la décomposition  $G = KB_0H$ . On associe une mesure  $G$ -invariante  $dg_H$  sur  $G/H$  à la mesure de Haar  $dg$  sur  $G'$  par le difféomorphisme  $\varphi$ . Soit  $f \in C_c(G/H)$  et soit  $\alpha \in C_c(G/H)$  telle que  $\alpha(lxH) = \alpha(xH)$  pour tout  $l \in K \cap H$  et  $xH \in G/H$ . On définit deux fonctions sur  $G'$  en posant  $f' = f \circ \varphi^{-1}$  et  $\alpha' = \alpha \circ \varphi^{-1}$ . Alors  $\alpha'(kak') = \alpha'(a)$  ( $k \in K', a \in G'$ ). On a

$$\begin{aligned} f \otimes \alpha(xH) &= \int_{G/H} f(xyH) \alpha(yH) dy_H \\ &= \int_{G'} f'(k_1 a k_2 g) \alpha'(g^{-1}) dg \end{aligned}$$

où  $x = kb_0 \in KB_0$ ,  $k = (k_1, k_2) \in K = K' \times K'$ ,  $b_0 = (a, 1) \in B_0 = A' \times \{1\}$ . Ainsi le produit de composition du  $G/H$  coïncide avec celui du groupe  $G'$ .

Supposons que le centre de  $G$  soit fini. Une suite de fonctions  $\{\alpha_j\}$  de  $C_c^\infty(G/H)$  s'appelle une suite de Dirac si elle satisfait aux conditions : 1)  $\alpha_j \geq 0$  et

$$\int_{G/H} \alpha_j(xH) dx_H = 1 ;$$

2) Pour tout voisinage  $U$  de  $H$  dans  $G/H$ ,  $\text{supp } \alpha_j \subset U$  pour tout  $j$  sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Il est clair qu'il existe toujours une suite de Dirac telle que  $\alpha_j(lxH) = \alpha_j(xH)$  ( $l \in K \cap H$ ,  $xH \in G/H$ ).

Lemme 1.4. Soit  $\{\alpha_j\}$  une suite de Dirac telle que  $\alpha_j(lxH) = \alpha_j(xH)$  ( $l \in K \cap H$ ,  $xH \in G/H$ ). On a alors

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f \otimes \alpha_j = f \quad \text{dans } C^\infty(G/H)$$

pour tout  $f \in C^\infty(G/H)$ .

Démonstration. Soit  $\{\mu\}$  un système de pseudonormes de  $C^\infty(G/H)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $U$  de  $H$ ,  $\sigma$ -invariant dans  $G/H$  tel que

$$\mu(f(xyH) - f(xH)) < \varepsilon$$

pour tout  $yH \in U$ .

On a

$$\begin{aligned} & f \otimes \alpha_j(xH) - f(xH) \\ &= \int_{G/H} \{f(xyH) - f(xH)\} \alpha_j(\sigma(y)H) dy_H, \end{aligned}$$

d'où  $\mu(f \otimes \alpha_j(xH) - f(xH)) < \varepsilon$  si  $\text{supp } \alpha_j(\sigma(y)H) \subset U$ .

Q.E.D.

Soit  $dl$  une mesure de Haar sur  $K \cap H$ . On définit pour  $\alpha \in C(K \cap H)$  et  $f \in C(G/H)$

$$\alpha * f(xH) = \int_{K \cap H} \alpha(l^{-1}) f(lxH) dl.$$

A l'aide de la convolution ci-dessus et la définition 1.1 on a le lemme suivant :

Lemme 1.5. Soit  $\alpha \in C(KnH)$  et soit  $\beta \in C(G/H)$  telle que  $\beta(l\alpha H) = \beta(\alpha H)$  pour tout  $l \in KnH$  et  $\alpha H \in G/H$ . On a alors, pour toute fonction  $f \in C(G/H)$

$$\alpha * (f \otimes \beta) = (\alpha * f) \otimes \beta.$$

Soit  $\mathcal{U}$  l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie et  $\mathcal{Z}$  le centre  $\mathcal{U}$ . Soit  $\mathcal{B}$  la sous-algèbre engendrée par 1 et  $\mathcal{K}$

Théorème 1.1. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  sur  $G/H$  à valeurs dans  $V$  telle que  $\dim \{zf : z \in \mathcal{Z}\mathcal{B}\} < \infty$ . Soit  $U$  un voisinage de  $H$  dans  $G/H$ . On pose  $K(U) = \{ \alpha \in C(G/H) : \text{supp } \alpha \subset U, \alpha(l\alpha H) = \alpha(\alpha H) \text{ pour tout } \alpha H \in G/H \text{ et } l \in KnH \}$ . Alors, il existe une fonction  $d$  de  $K(U)$  telle que  $f \otimes d = f$ .

Démonstration. Soit  $R$  la représentation régulière de  $G$  dans  $C^\infty(G/H, V)$  définie par  $[R_g f](\alpha H) = f(g^{-1}\alpha H)$ . Si on identifie  $C^\infty(G/H, V)$  et  $C(G/H) \otimes V$ ,  $R$  opère trivialement sur  $V$ . On pose  $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{Z}\mathcal{B} : u f = 0\}$ . Alors  $\mathcal{U}$  est un idéal à gauche et  $\dim \mathcal{Z}\mathcal{B}/\mathcal{U} < \infty$ . Soit  $W$  est le plus petit sous-espace fermé  $R_G$ -invariant de  $C(G/H) \otimes V$  contenant  $f$ . On pose  $W_0 = R_{\mathcal{B}} f$ . On veut montrer que  $W = \overline{W_0}$ . Supposons que  $W_0 \subsetneq W$ . Alors d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonction linéaire continue non nulle  $\beta$  de  $W$  telle

que  $\beta = 0$  sur  $W_0$ . On pose

$$F(g) = \beta(R_g f) \quad (g \in G).$$

Alors  $F \in \widehat{C}(G)$  car  $f$  est dérivable sous  $R$ . On a

$$F(g; s) = \beta(R_g R_s f) \quad (s \in \mathcal{B}).$$

Alors  $uF = 0$  ( $u \in \mathcal{U}$ ).  $F$  est une fonction analytique car  $\mathcal{U}$  contient des opérations elliptiques. D'autre part, on a

$$F(1; u) = \beta(R_u f) = 0 \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{U}$$

car  $\beta = 0$  sur  $W_0$ . Par conséquent  $F = 0$  sur  $G$  et  $\beta = 0$  sur  $W$ . Cette contradiction montre que  $W = \overline{W_0}$ .

Si on pose  $W_1 = R_B f$ , on a  $\dim W_1 < \infty$ . D'après une discussion analogue,  $R_{K \cap H} f \in W_1$ .  $W_1$  est un espace  $R_{K \cap H}$ -invariant. Il existe un ensemble fini  $F \subset \widehat{K \cap H}$  tel que  $\alpha_F^* f = f$  car  $f \in W_1$ . On pose  $P_F = \sum_{\delta \in F} P_\delta$  et  $W_F = P_F W$ . On réclame  $\dim W_F < \infty$ . La représentation naturelle de  $B$  sur  $\mathcal{B}/\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$  est finie car  $W$  est réductible complètement sous  $R_B$ . Ensuite d'après  $\dim \mathcal{B}/\mathcal{U} < \infty$ , le théorème 1 de Harish-Chandra [2(1)], on a  $W_0 = \sum_{\delta \in \widehat{K \cap H}} P_\delta W_0$  et  $\dim P_\delta W_0 < \infty$  pour tout  $\delta \in \widehat{K \cap H}$ . D'ailleurs, le sous-espace  $W_0$  est dense dans  $W$  et alors  $P_\delta W_0$  est dense dans  $P_\delta W$ . Par conséquent  $P_\delta W_0 = P_\delta W$  et on a alors  $\dim P_\delta W < \infty$ .

Soit  $\{\alpha_j\}$  une suite de Dirac telle que  $\alpha_j \in K(V)$  pour tout  $j$ .

D'après le lemme 1.4, on a  $\lim_{j \rightarrow \infty} f \otimes \alpha_j = f$ . On pose  $W_2 = \{ f \otimes \alpha \in W : \alpha \in K(W) \}$ .  
 D'après le lemme 1.5, on a  $\alpha_F^*(f \otimes \alpha) = f \otimes \alpha$ . Alors  $W_2 \subset W_F$  et

$\dim W_2 < \infty$ . Par conséquent  $W_2$  est fermé dans  $W$  et donc

$$f = \lim_{j \rightarrow \infty} f \otimes \alpha_j \in W_2.$$

Q.E.D.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.Clerc, P. Eymard, J.Faraut, M.Rais et R.Takahashi,  
"Analyse Harmonique", C.I.M.P.A., Nice, 1982.
- [2] Harish-Chandra, (1) Representations of semi-simple Lie  
groups I, Trans.Amer.Math.Soc., vol.75(1953), PP.185-243.  
(2) Discrete series for semi-simple Lie groups II,  
Acta Math., vol.116(1966), pp.1-111.
- [3] M.Flensted-Jensen, "Analysis on non-Riemannian symmetric  
spaces", Conf.Board Math.Sci.Series, No.61, American  
Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.
- [4] M.Sugiura, "Unitary Representations and Harmonic Analysis",  
Wiley, New York, 1975.