

# Schlesinger 方程式における $\tau$ 函数

京大数理研 三輪哲二

森川先生のシンポジウム「幾何学における大域的解析学」の解説記事[1]に対する補足として、一次元の Fuchs-Schlesinger 型の変形理論における  $\tau$  函数について説明します。Holonomic Quantum Fields II. [2] として詳しい論文が出版の予定なので、証明は省きます。

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  上に  $n+1$  個の点  $a_0 = \infty, a_1, \dots, a_n$  を取り対応して  $n+1$  個の  $m \times m$  行列  $L_{\infty}, L_1, \dots, L_n$  を次の条件を満たすように選ぶ。

$$(i) \quad e^{2\pi i L_1} \dots e^{2\pi i L_n} e^{2\pi i L_{\infty}} = 1$$

$$(ii) \quad \text{trace}(L_1 + \dots + L_n + L_{\infty}) = 0$$

精密化された意味でのリーマンの問題とは、 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  上の多価解析  $m \times m$  行列  $Y(y; x; a_1, \dots, a_n)$  で次の性質を持つものを構成する事である。以下、 $y, a_1, \dots, a_n$  はパラメタと考え簡単に  $Y(x)$  と書く。

$$(iii) \quad x \neq a_0, \dots, a_n \text{ で } Y(x) \text{ は正則かつ invertible}$$

$$(iv) \quad Y(y) = 1.$$

(V)  $a_\nu$  ( $\nu=1, \dots, n$ ) の近傍では  $\det \Phi_\nu(a_\nu) \neq 0$  なる正則行列により  $Y(x) = \Phi_\nu(x)(x-a_\nu)^{-L_\nu}$

(VI)  $\infty$  の近傍でも  $\det \Phi_\infty(\infty) \neq 0$  なる正則行列により  $Y(x) = \Phi_\infty(x)x^{L_\infty}$

注意 固有値の整数差の問題 ([3]) は考えない。さらに強く、以下では、 $L_1, \dots, L_n, L_\infty$  は十分 0 に近い時のみ考える。

$a_1, \dots, a_n$  が実軸上に  $a_1 < \dots < a_n$  の順に並んでいる時には、上記のリーマン問題の解は、オペレーターの真空期待値を使って

$$(1) Y(y; x; a_1, \dots, a_n)_{jk} = \frac{-2\pi i (y-x) \langle \psi^{(j)}(y) \psi^{*(k)}(x) \varphi(a_1; L_1) \dots \varphi(a_n; L_n) \rangle}{\langle \varphi(a_1; L_1) \dots \varphi(a_n; L_n) \rangle}$$

の形に書ける。 $\psi^{(j)}(y)$ ,  $\psi^{*(k)}(x)$ ,  $\varphi(a_\nu; L_\nu)$  及び  $\langle \quad \rangle$  の説明は [1] を見られたい。(1) の右辺の分母、分子それぞれは、オペレーターの積公式を使って計算すると無限大の発散を示すが、これは有限で、収束する無限級数表示に書く事もできる。ここで函数と呼んでいるのは  $\langle \varphi(a_1; L_1) \dots \varphi(a_n; L_n) \rangle$  の事であって、これ自身は今述べたように発散しているがパラメータ  $a_1, \dots, a_n$  についての外微分を考えると

$$(2) \quad d \log \langle \varphi(a_1; L_1) \cdots \varphi(a_n; L_n) \rangle$$

は収束する表示を持つ。実は、次に述べるように、Schlesinger 方程式の解を使って表わされる。

(1) の函数  $Y$  は、次の Fuchs 型方程式を満たす。

$$(3) \quad dY = \left( \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} d \log \frac{x-a_{\nu}}{y-a_{\nu}} \right) Y$$

ここで  $A_{\nu}$  は  $x$  に依らない、 $y$  と  $a_1, \dots, a_n$  だけの函数からなる  $m \times m$  行列である。(3) の可解条件として次の Schlesinger の方程式を得る。

$$(4) \quad dA_{\nu} = - \sum_{\mu \neq \nu} [A_{\nu}, A_{\mu}] d \log \frac{a_{\nu} - a_{\mu}}{y - a_{\mu}}$$

定理 1.

$$d \log \langle \varphi(a_1; L_1) \cdots \varphi(a_n; L_n) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu} \text{trace} A_{\mu} A_{\nu} d \log (q_{\mu} - q_{\nu})$$

注意  $\text{trace} A_{\mu}(y; a) A_{\nu}(y; a)$  は  $y$  に依らない。なぜなら、 $y$  を変えても  $A_{\mu}(y; a)$  は一斉に内部自己同型で変換される。また、右辺は、 $L_1, \dots, L_n$  に対応しているような (4) の解に限らず、closed 1-form となる。

定理の右辺の closed 1-form を積分して得られる函数

を  $\tau(a_1, \dots, a_n)$  と書く。  $\tau$  は定数倍は不定である。

$$(5) \quad d \log \tau(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu} \text{trace} A_\mu A_\nu d \log(a_\mu - a_\nu)$$

無限遠点  $\infty$  は特異点でない ( $\sum_{\nu=1}^n A_\nu = 0$ ) とすると  $\tau(a_1, \dots, a_n)$  は 射影変換  $h \in SL(2, \mathbb{C})$  に対して次の変換性を持つ。

定理 2.  $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  として

$$(6) \quad \frac{\tau(h(a_1), \dots, h(a_n))}{\tau(a_1, \dots, a_n)} = \prod_{\mu=1}^n (\gamma a_\mu + \delta)^{\text{trace} A_\mu^2}$$

注意  $\text{trace} A_\mu^2$  は (4) の解に対して定数となる。  $L_1, \dots, L_n$  から来ている場合は  $\text{trace} L_\mu^2$  に等しい。 (6) の両辺は  $h$  を変数として多価であり、  $h = 1$  の近傍からの解析接続として等号が成り立つ。  $\sum_{\nu=1}^n A_\nu \neq 0$  の時も  $\gamma = 0$  とすれば正しい。

$\tau(a_1, \dots, a_n)$  は、  $a_\mu \neq a_\nu$  で多価解析的であるが、分岐点のいくつかが一一致する時は、(4) の方程式の動かし難い特異点に対応しているため、複雑な挙動を示す。しかし、  $n$  個の点が一斉に例えば 0 に近づく時の挙動は定理 2 から

$$(7) \quad \frac{\tau(ta_1, \dots, ta_n)}{\tau(a_1, \dots, a_n)} = t^{-\frac{1}{2}(\sum_{\mu} \text{trace} A_\mu^2 - \text{trace} A_\infty^2)}$$

となる。(  $A_\infty + \sum_{\mu=1}^n A_\mu = 0$  ) さらに, Briot-Bouquet 型の特異点を調べる事により, 少なくとも小さな  $L_1, \dots, L_n, L_\infty$  に対応しているような場合には, 次の事が言える。

定理 3.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \varphi(ta_1; L_1) \cdots \varphi(ta_k; L_k) \varphi(a_{k+1}; L_{k+1}) \cdots \varphi(a_n; L_n) \rangle}{\langle \varphi(ta_1; L_1) \cdots \varphi(ta_k; L_k) \rangle}$$

$$= \langle \varphi(0; L') \varphi(a_{k+1}; L_{k+1}) \cdots \varphi(a_n; L_n) \rangle$$

$$\text{但し } L' \text{ は } e^{2\pi i L_1} \cdots e^{2\pi i L_k} = e^{2\pi i L'}$$

を満たす 0 に近い行列である。

注意 ここでは, モノドロミーを保つ, たまたま点を合流させているので, 不確定点は現われない。

[1] Studies on Holonomic Quantum Fields

— 線型微分方程式の変形理論 — 数理解講究録

[2] Holonomic Quantum Fields II. 数理解講究録 (予定)

以上は by Sato, Miwa and Jimbo

[3] Matrix theory; by Gantmacher, (Chelsea)