

バーガース系の実験

The Experiments of Burgers system

横国大工 浦田静 (Shizuka URATA)、渡辺慎介(Shinsuke WATANABE)

Faculty of Engineering, Yokohama National University

はじめに

Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\nu \geq 0)$$

は、乱流現象のモデル方程式として、バーガース(1939)により提案された。この方程式は波形を急峻化させる非線形項と、波を拡散させる散逸項をあわせ持つ最も簡単な方程式で、バランスして定常な波を形成することが可能である。

Burgers 方程式の著しい特徴は、それが Hopf(1950)および Cole(1951)によって提案された変換

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \phi$$

によって $\phi(\xi, \tau)$ に対する熱伝導方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}$$

に帰着されることである。

熱伝道方程式の一般解は

$$\phi(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \exp\left\{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\nu\tau}\right\} d\eta$$

であり、Burgers 方程式の一般解はこれを使って直ちに求められる。

非線形波動は、非線形性以外に分散性や散逸性を有している。分散系の代表的な波動として“ソリトン”については、非線形性による突っ立ちを分散性により波を広げることによって不連続面の形成を防ぎ、釣鐘型の安定な波形で伝播する。

また、散逸系の代表的な波動として“衝撃波”については、波の突っ立ちにおいてエネルギーの散逸が生じ、その急峻な立ち上がりには、やはり不連続面を形成することがない。よって理論的には、どちらの場合も急峻であるが滑らかな波面を形成するため、安定な波形を保ったまま伝播することになる。ソリトンの実験で知られる戸田格子と等価な回路として非線形 LC はしご型回路に、散逸を加えることによりバーガース系の波を実現することが可能である。今回の実験は Burgers 方程式の基本的な性質を実験的に調べ、検証する事を目的としている。

理論

戸田格子と等価な非線形 LC 回路において図 1 のように非線形キャパシタと直列に抵抗を挿入して回路方程式を立てる。

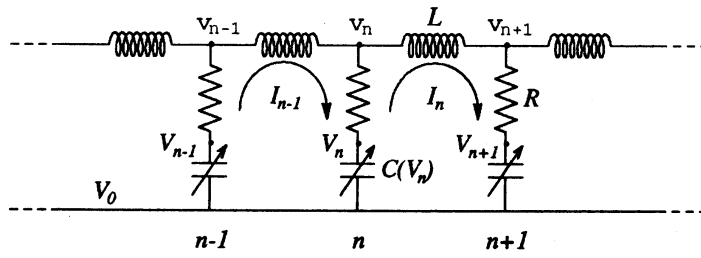


図 1 散逸のある非線形 LC はしご型回路

$$L \frac{dI_n}{dt} = v_n - v_{n+1} \quad (1)$$

$$\frac{dq_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \quad (2)$$

$$v_n = V_0 + V_n + R(I_{n-1} - I_n) \quad (3)$$

ここで、回路素子 L は線形インダクタンス、 $C(V_n)$ を非線形キャパシタンス、 R を抵抗としている。 I_n は n 番目のコイルに流れる電流、 v_n は抵抗にかかる交流電圧、 V_n はキャパシタにかかるシグナル電圧である。

電荷 q_n は、電圧 V に依存する非線形キャパシタの容量 $C(V)$ を積分することによって求められる。

$$q_n = q_0 + C(V_0)F(V_0) \ln \left(1 + \frac{V_n}{F(V_0)} \right) \quad (4)$$

(1),(2),(3)から

$$L \frac{d^2 q_n}{dt^2} = v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}$$

(4)を代入して

$$\begin{aligned} LCF \frac{d^2}{dt^2} \ln \left(1 + \frac{V_n}{F(V_0)} \right) &= V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \\ &+ RC(V_0)F(V_0) \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left(1 + \frac{V_{n+1}}{F(V_0)} \right) - 2 \ln \left(1 + \frac{V_n}{F(V_0)} \right) + \ln \left(1 + \frac{V_{n-1}}{F(V_0)} \right) \right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{V_n}{F(V_0)} = u_n, \quad t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{LC(V_0)}}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C(V_0)}}, \quad v = \frac{R}{R_0}$$

と規格化すると

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln(1+u_n) = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + v \frac{d}{dt} \{ \ln(1+u_{n+1}) - 2 \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1}) \} \quad (5)$$

連続体近似

$$u_{n\pm 1} = u \pm \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \dots$$

小振幅近似 ($u \leq 1$ と仮定する。)

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2!} u^2 \dots$$

(5)は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} \right) \quad (6)$$

次に通減摂動法を用いて

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \varepsilon^4 u_4 + \dots$$

と微量 ε で展開し

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon(x-t) \\ \tau = \varepsilon^2 x \end{cases}$$

と変数変換する。

ε^4 のオーダーをとると

$$2u_\tau + uu_\xi = vu_{\xi\xi}$$

バーガス方程式が導出された。 $u \leq 1$ の範囲でバーガス系回路とみなすことができる。バーガス方程式に境界条件 $\xi \rightarrow +\infty, u = A$ 、 $\xi \rightarrow -\infty, u = 0$ を与えると、

$$u = \frac{A}{2} \left\{ 1 - \tanh \frac{A}{4v} \left(\xi - \frac{A}{4} \tau \right) \right\}$$

という定常解を得る。速度 $A/4$ 、幅 $16v/A^2$ となる衝撃波が安定に伝播する。三角波の振幅は距離の $-1/2$ 乗に比例して減少し、幅は $1/2$ 乗に比例して増大する。

$|\xi| \rightarrow 0$ と仮定すると方程式から

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-uu_x + vu_{xx}) dx = 0 \quad \leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot dx = \text{const}$$

となり一次の量は保存される。二次の量は

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{2} dx = -v \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \leq 0$$

となり時間とともに減少し保存されない。

拡散方程式は線形なので 解の足し合わせができるので

$$\varphi = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{ここで} \quad \varphi_i = e^{-2\theta_i}, \quad \theta_i = \frac{A_i}{4v} \left(\xi - \frac{A_i}{4} \tau \right), \quad i = 1, 2$$

をコール・ホップ変換すると

$$u = \frac{A_1 e^{-2\theta_1} + A_2 e^{-2\theta_2}}{1 + e^{-2\theta_1} + e^{-2\theta_2}}$$

この解は $\xi-\tau$ 空間で3つの領域 $u \equiv 0, u \equiv A_1, u \equiv A_2$ にわけられる。各領域では、分かりやすいように v が小さいときを考えると二つの衝撃波が存在する領域がある。

しかしある時間からは $u \equiv 0$ と $u \equiv A_2$ の領域しかなく、つまり $u \equiv A_1$ が存在する領域がなくなる。したがってその時間から2つの衝撃波は融合し1つの衝撃波となって進行する。また、ある場所からもひとつの衝撃波しか存在しないことがわかる。

実験方法

今回の実験では、①三角波の振幅と幅の測定、②保存量、③三角波の融合、④衝撃波の伝搬、⑤衝撃波の融合を観察した。散逸のある非線形LC回路は78段で構成され、直列につながったインダクタ(手巻き)の間に抵抗と非線形キャパシタが挿入されている。また、反射波をできるだけ抑えるために回路の最後に可変抵抗を取り付けている。回路の端にパルスジェネレーターから波形を入力し、オシロスコープで伝播を観察した。回路素子はインダクタのインダクタンスは $1.5(\mu H)$ 、非線形キャパシタは可変容量ダイオード $C(V_0)=0.327(nF)$ 、特性電圧 $F(V_0)=2.73(V)$ 、抵抗はカーボン抵抗 $100(\Omega)$ のものを使用した。

結果および考察

①三角波の振幅と幅の測定

図2は初期振幅0.4(V)の三角波を入力した場合の空間変化である。左図は、時間-振幅のグラフで左から0,10,20,...70段と10段ごとの空間変化である。右の二つの図は、段数-最大振幅、段数-幅のグラフで両対数表示にしてある。ここで幅は最大振幅の50%のところとした。その測定値にそった接線の傾きの絶対値はともに1/1.9であった。

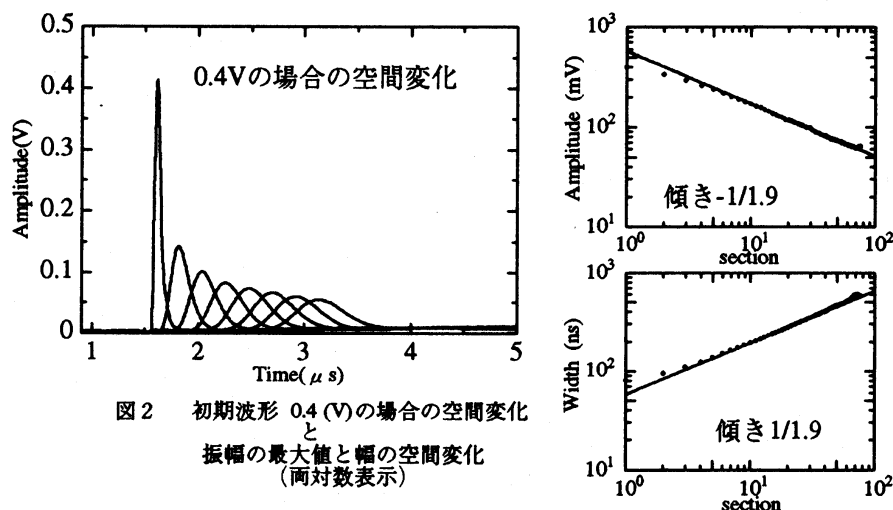


図2 初期波形 0.4 (V) の場合の空間変化
と
振幅の最大値と幅の空間変化
(両対数表示)

この他に初期振幅 1(V), 2(V), 4(V), 6(V) の三角波を観察した。1(V), 2(V), 4(V) の場合は 0.4(V) の場合とほぼ同様の結果になった。

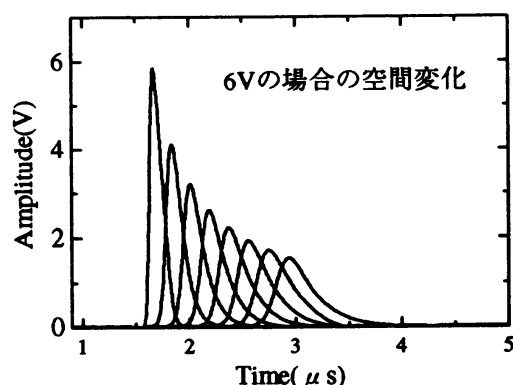


図3 6(V)の場合の空間変化

図3は6(V)の場合である。振幅、幅はそれぞれ距離の $1/1.7$ 、 $1/1.7$ に比例して減少、増加した。波形は振幅の増大とともに左右対称となる。

振幅が大きくなるとバーガース系の波といえなくなる。これは小振幅近似を用いた事に起因する。バーガース方程式の導出において対数関数のテーラー展開を用いた。この場合

$$u \leq 1, \quad \frac{V}{F(V_0)} \leq 1 \quad \text{より} \quad V \leq F(V_0) = 2.73$$

と仮定している。つまり2.73(V)以上の波形はバーガース系の波ではない。

②保存量

つぎに三角波の一次の量と二次の量の空間変化を計算したものが図4である。一次の量はほぼ一定を保ち、二次の量は減少することが確かめられた。

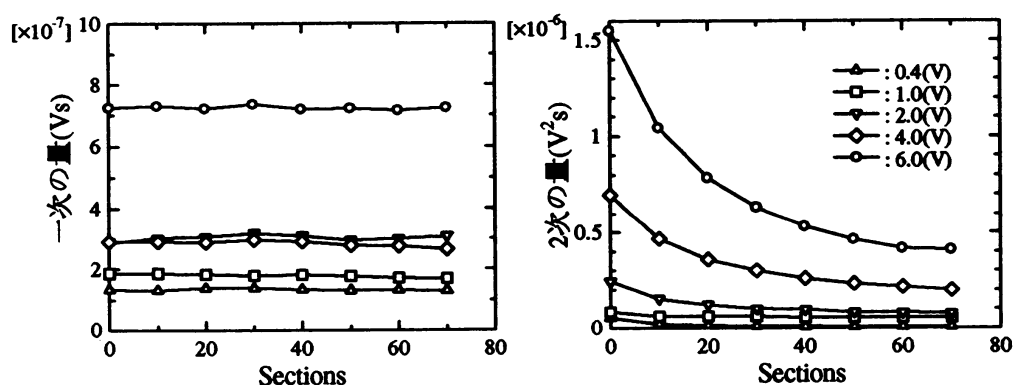


図4 三角波の一次の保存量と2次の量

③三角波の融合

図5はA:1(V),B:6(V), A:3(V),B:5(V)の三角波の融合である。前方の波形の初期振幅をA、後方の振幅をBとしている。

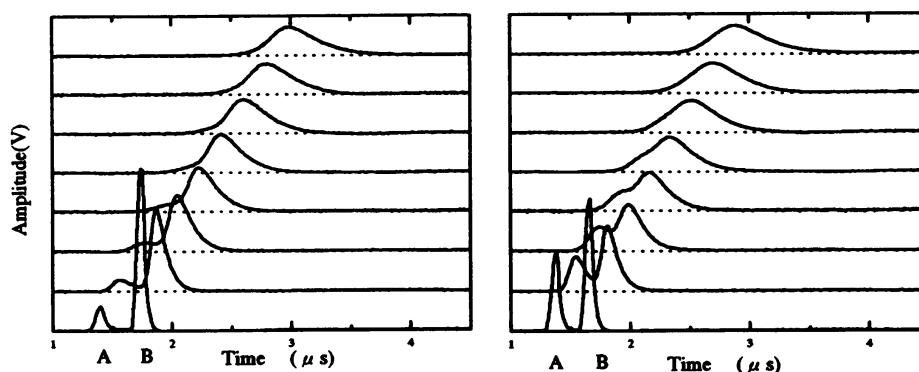


図5 三角波の融合
A: 1 (V)+B: 6 (V) 、 A: 3 (V)+B: 5 (V)

非線形波動は、振幅の大きな波ほど伝播速度が速い。したがって伝播方向前方に振幅の小さな波をおき、後方に振幅の大きな波をおけば、後方の波は前方の波に追いつくことになる。その他の場合でも振幅の差にかかわらず、どれも後方の波が前方の波に追いつき次第に融合することが確かめられた。

④衝撃波の伝播

様々な振幅の衝撃波を回路に入力してその空間変化を観測した。ここでは振幅 0.4(V) と 6.0(V) を図 6 に示す。

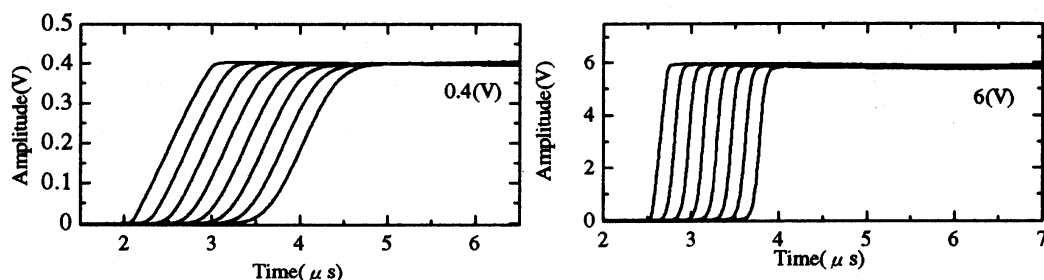


図6 衝撃波の伝播
初期振幅 0.4(V), 6(V)

時間的、空間的な振幅の減少はなく安定に伝播した。振幅が大きくなるほど速度が速くなり傾きは急になることが読み取れた。また幅も振幅の増加にともなって狭くなる。これは理論的に正しい。また、振幅が小振幅近似の条件 2.73(V) を超えても同じ結果が見られた。

⑤衝撃波の融合

衝撃波の融合の様子を図 7 に示す。前方の衝撃波の振幅 A に対して後方の衝撃波の振幅 B とした。A+B が 0.8(V) と 5.0(V) の場合である。初めに後方の衝撃波は前方の衝撃波より時間差を与えてある。徐々に後方の波が追いついてきて前方の波を吸収し融合することが分かる。他の振幅の違いでも同じ結果が得られ、振幅が大きくなっても融合はされる。融合後の振幅の減衰もない。

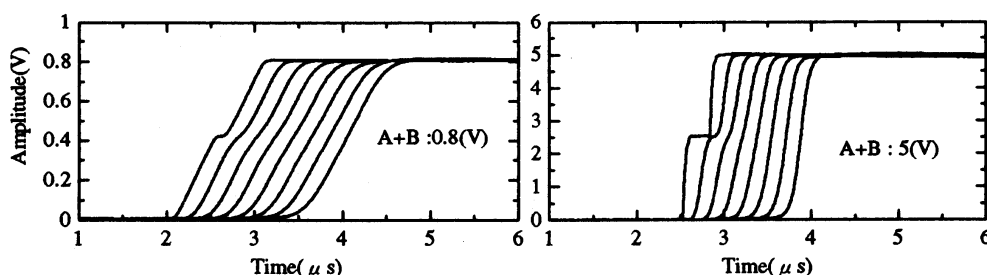


図7 衝撃波の融合

結論

三角波の振幅は距離の $1/1.9 \sim 1/1.7$ に比例して減少し、幅は距離の $1/1.9 \sim 1/1.7$ に比例して増大した。理論値と極めて近い値が得られた。

二つの三角波を伝播させると振幅の大きな波が小さな波に追いつきやがて融合する。

保存量については一次の量は保存され二次の量は保存されず減少する。

衝撃波はこれまでの実験ではインダクタに抵抗が多く含まれていて振幅が時間とともに減衰していたが、今回の実験では衝撃波は振幅が変わることなく安定に伝播する様子が観察できた。

二つの衝撃波の場合は後方の衝撃波が前方の衝撃波に追いつき一つの衝撃波を形成し融合後分裂はしない。また融合後の振幅の減衰も見られない。

参考文献

- 1) S. Watanabe, S. Ishiwata, K. Kawamura and H.G. Oh: J. Phys. Soc. Jpn. **66**(1997)1231
- 2) N. Takabatake, S. Ishiwata, O. Ishihara and S. Watababe: J. Phys. Soc. Jpn. **69**(2000)1999