

ある種の正規数

山梨大学 中井喜信 Yoshinobu Nakai
(Y-N. Nakai)

慶応大学 塩川宇賢 Ikeda Shiohawa

§ 1. $r \geq 2$ を与えられた整数, $\theta = 0.a_1a_2a_3\cdots =$
 $= a_1r^{-1} + a_2r^{-2} + \cdots$ を実数 $\theta (0 < \theta < 1)$ の r 進展開とする。

θ が r 進正規数 (normal number) とは, 任意の $r-1 > b_1 \cdots b_k$
 $\in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}^k$ に対して

$$\frac{1}{n} N_r(\theta; b_1 \cdots b_k; n) = r^{-k} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことである。但し, $N_r(\theta; b_1 \cdots b_k; n)$ は $a_1a_2\cdots a_n$ 中
に現れる $b_1 \cdots b_k$ の度数とする。正規数は無理数である。逆は
必ずしも成り立たない。ほとんどすべての実数は r 進正規数
である。しかし, 正規な代数的数の存在は不明である。また
 $\pi, e, \log 2, \sqrt{2}$ などの自然な数で正規であることがわかって
いるものは一つもない。他方, 正規数と人工的に構成する
方法は数多く知られている。したがって, 今後等しいことは極めて
複雑かつ非明示的で, 出来上, べき数としての自然な数である
かと簡単に書き下すことはできない。正規数の単純かつ明示

的な構成法として次の3通りのものが知られている。

第1の方法は, Copeland - Erdős [1] による組合せ論的ものである。

0. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ...

0. 2 3 5 7 11 13 17 19 ... (素数列)

これが10進正規数であることが示される。この数列は[9]に詳しい。

第2の方法は, Davenport - Erdős [2] による。彼等は $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ かつ $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) とするとき

0. $f(1) f(2) f(3) \dots$ が10進正規数であることが示された。但し各 $f(n)$ は10進法で表わされておき、 $f(1)$ の digits の次に $f(2)$ の digits と並んでいくのを見える。例之は

0. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ...

0. 1 4 9 16 25 36 49 ... (平方数)

など。

第3の方法は, Stoneham [10] が永年にならり研究して来たもので、例之は、 p が奇素数で、 r が $\text{mod } p^2$ の原始根ならば、

$$(p-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-1} r^{-(np^{n+1} - (n+1)p^n + 1)/(p-1)}$$

は r 進正規数である。同様の例として、G. Wagner によれば、次の5進正規数 (かつ10進正規数でも数) がある。

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{4^n - n} 10^{-4^n}.$$

なお正視数の歴史的ノート, 文献の [5] の中にある.

本論文において, 我々は才 2 の方法に基づき, 新しい正視数のクラスを構成する.

§ 2. この後に "擬多項式 (pseudo polynomial)" と呼ぶ次のように $g(y)$

$$g(y) = \alpha y^{\beta} + \alpha_1 y^{\beta_1} + \dots + \alpha_d y^{\beta_d}$$

$$\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_d \text{ 実数 } (\neq 0)$$

$$\beta > \beta_1 > \dots > \beta_d \geq 0 \text{ 実数}$$

を考え. 以下簡単のため, 上記のような $g(y)$ の全体のなす環を $R[y^{\wedge} R_+]$ (R -係数, R_+ -冪の一元数擬多項式環) と記そう. $R[y^{\wedge} R_+] \supset R[y] (= R[y^{\wedge} N])$ である. 自然数 r (≥ 2) と一対固定 (一つの $g(y) \in R[y^{\wedge} R_+]$ (ただし $\beta > 0$) に対して $y > 0$ のとき $g(y) > 0$ である) のについて

$$\theta_r = 0, [g(\omega)] [g(\omega)] \dots [g(\omega)] \dots$$

を考える. ところで $[g(\omega)]$ は $g(\omega)$ の整数部分で, それを r 進展開した "digit" 連を上のようにべりて並べて一つの r 進小数 θ_r と見るわけである. こゝで $N_r(m; b_1, \dots, b_e)$ で自然数 m の r 進展開に $b_1, \dots, b_e$ という r の e 個の数字が現れた回数 e を表す

[定理 1] $r, l, b_1, \dots, b_l$ は正整数で $g(y)$ は $g(y) \in \mathbb{R}[y^{\wedge} \mathbb{R}_+] \setminus \mathbb{R}[y]$ とし $(\gamma, \beta) = \beta, \beta_1, \dots, \beta_d$ $\alpha < 1 - \gamma$ $\notin \mathbb{N}$ (> 0) とし (γ)

$$\sum_{n \leq x} N_r([g(n)]; b_1, \dots, b_l) = \frac{1}{r^l} x \cdot \log_r g(x) + O_{r, l, \gamma} (x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

とす. ([7])

[定理 2] 同様に $g(y) \in \mathbb{R}[y]$ とし (γ)

$$\sum_{n \leq x} N_r([g(n)]; b_1, \dots, b_l) = \frac{1}{r^l} x \cdot \log_r g(x) + O_{r, l, \gamma} (x \log_r g(x)) \quad (x \rightarrow \infty)$$

とす. ([7'])

ここで, $n = [x]$ のときの $[g(n)][g(n)] \dots [g(n)]$ は r 進表と見たときの“桁数”は $[x] \cdot \log_r g(x) + O(1) = x \log_r g(x) + O(1)$ であるから $\mathcal{O}_r$ について

[系 1] 定理 1 の条件下に

$$\frac{1}{n} N_r(\mathcal{O}_r; b_1, \dots, b_l; n) = \frac{1}{r^l} + O\left(\frac{1}{\log^n}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

[系 2] 定理 2 の条件下に

$$\frac{1}{n} N_r(\mathcal{O}_r; b_1, \dots, b_l; n) = \frac{1}{r^l} + O\left(\frac{\log \log n}{\log^n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

を得るので, $g(y) \in \mathbb{R}[y^{\wedge} \mathbb{R}_+]$ について $\mathcal{O}_r$ は r -進正規数となる.

例として, 任意の $\alpha > 0, \beta > 0$ について

$$\mathcal{O}_r = 0. [\alpha] [\alpha \cdot 2^\beta] [\alpha \cdot 3^\beta] [\alpha \cdot 4^\beta] \dots$$

は r -進正規数である.

特に $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ のときは Schiffer [8] は

$$\sum_{n \leq x} N_n([g(y)]; b, \dots, s_l) = \frac{1}{r^l} \lambda \log_r g(x) + O_{r, l, g}(x)$$

を得ている。より簡単に Minsky [6] ($l=1$) の

$$\sum_{n < r^k + r^{k-1}} N_n(n; 1) = \frac{1}{r} (kr^k + (k-1)r^{k-1}) + r^{k-1}$$

より定理の error-term は一般には $\dots + o(x)$ ではないことがわかった。

残された問題は

[?1] 定理 2 で $g(y) \in \mathbb{R}[y] \setminus \mathbb{Q}[y]$ について, 誤差項を $\dots + O(x)$ とせよ。

[?2] 誤差項が $\dots + o(x)$ となるような $g(y)$ (の subclass) はあるか。

§3. Lemma 2

I. M. Vinogradov の指数和に関する評価 ([11], Lemma 6.12) をやり直して

[Lemma 1] $k, Q, N \in \mathbb{N}$; $k \geq 2$, $Q \geq 2$, $Q \geq N \geq 1$; $P \in \mathbb{Z}$

および $\lambda, \sigma \in$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \lambda < \frac{1}{2C_0(k+1)} \\ \lambda \leq \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t) \leq C_0 \lambda \quad (P+1 \leq t \leq P+Q) \\ 0 < \sigma \leq k \\ Q^{-(k+1-\sigma)} \leq \lambda \leq Q^{-\sigma} \quad (C_0 \text{ 正定数}) \end{array} \right.$$

5

と得る。

$$\left| \sum_{n=p+1}^{p+N} e(f(n)) \right| \ll_{(c, k, \delta)} Q^{1-p}$$

を得る。ここで $e(\frac{z}{2}) = e^{2\pi i \frac{z}{2}}$ であり、また

$$\begin{cases} R = 1 + \left[\log(\delta^{-1} k(n+1)^2) / \log(1 - \frac{1}{n}) \right], \\ L = 1 + \left[\frac{1}{4} k(n+1) + kR \right], \\ \rho = \delta / 16 L(n+1) \end{cases}$$

とある。

および Weyl 和の評価として

[Lemma 2] $f(t) = A \cdot t^b + \dots \in \mathbb{R}[t]$ ($A \neq 0$, $A t^b$ 最高次項)

$$\frac{a}{b} \text{ 既約分数}, \quad \left| A - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{b^2}$$

$$V \text{ 実数} \geq 1$$

について, $b \geq 2$ とする

$$\left| \sum_{n=1}^Q e(f(n)) \right| \ll_{\text{abs.}} Q^{\epsilon} \left(\frac{1}{Q} + \frac{(\log Q)^B}{V} + V \cdot \left(\frac{1}{Q} + \frac{\log Q}{Q} + \frac{1}{Q^{b-1}} + \frac{\log Q}{Q^b} \right) \right)^{\delta}$$

を得る。ここで, $\delta = \frac{1}{2^{b-1}}$ であり, B は $\sum_{n \leq x} (\tau_{b-1}(n))^2 \ll x \cdot (\log x)^B$

($\text{as } x \rightarrow \infty$) を満たす正定数 (例として $B = (b-1)^2 - 1$) である。

[系] Lemma 2 において $b \geq 1$, および

$$(\log Q)^H \ll 1 \ll Q^b \cdot (\log Q)^{-B}$$

とすれば

$$\left| \sum_{n=1}^Q e(f(n)) \right| \ll Q \cdot (\log Q)^{-G}$$

を得る. したがって $H = B + 2^{i-1} \cdot 2G + 1$ である.

§4. 定理達の証明方針.

自然数 j ($\geq j_0 \gg 1$) について, 自然数 n_j (21) と

$$r^{j-2} \leq g(n_j) < r^{j-1} \leq g(n_{j+1}) < r^j$$

と選ぶことにする. したがって

$$n_j < n \leq n_{j+1} \Rightarrow [g(n)] \text{ は } r \text{ 進 } j \text{ 桁}$$

$$(r^{j-1} \leq g(n) < r^j)$$

と仮定する. ところで r は素数であるから

$$n_j \approx r^{j/\beta}$$

$$n_{j+1} - n_j \approx r^{j/\beta}$$

である. $x \rightarrow \infty$ にあたりに $J \in \mathbb{N}$ と $n_j < x \leq n_{j+1}$

($J = \log_r g(n) + O(1)$) とする. すると $X_j = n_{j+1} - n_j$

($j < J$) に対して $X_J = x - n_J$ とおくと $N_r(g(n)) =$
 $= N_r([g(n)]; b_1, \dots, b_\ell)$ である.

$$\sum_{n \leq x} N(g(n)) = \sum_{j=j_0}^J \sum_{n: n_j < n \leq n_j + X_j} N(g(n)) + O(1)$$

である. 周期 1 の $\frac{1}{r^m}$ 級

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k}{r^k} \leq t - [t] \leq \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k}{r^k} + \frac{1}{r^\ell} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を使う.

$$\sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} N(g(n)) = \sum_{m=0}^{J-j} \sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} I\left(\frac{g(n)}{r^m}\right)$$

と表して, 次に, $I(t) \leq I_-(t) \leq I(t) \leq I_+(t)$,

$$I_{\pm}(t) = \frac{1}{r^l} \pm \frac{j}{j} + \sum_{\nu=-\infty, \nu \neq 0}^{\infty} A_{\pm}(\nu) \cdot e(\nu t),$$

$$|A_{\pm}(\nu)| \ll \min\left(\frac{1}{|\nu|}, \frac{j}{|\nu|^2}\right)$$

にあてがえて

$$\sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} N(g(n)) = \frac{j}{r^l} X_j + O(X_j) +$$

$$+ O\left(\sum_{m=l}^j \sum_{\nu=1}^{j^2} \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{j}{\nu^2}\right) \cdot \left| \sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} e\left(\frac{\nu}{r^m} g(n)\right) \right|\right)$$

とある。以下

$$S(j, m, \nu) = \sum_{n=n_j+1}^{n_j+X_j} e\left(\frac{\nu}{r^m} g(n)\right)$$

とある。

定理 1 についてはい次のように細く場合分けして、右辺最後 $o \dots + O(\dots)$ の $\dots + O(X_j)$ であることを示す (証明) とする。

以下 $\delta = 0+$ (正定数, δ 分小) と表す δ とする。

(Case 1) $\beta \notin \mathbb{N}$ (> 0) $\alpha \in \mathbb{Z}$ 。

($2 \leq$) $m \leq \frac{j}{\beta}(\beta - \delta)$ とし Lemma 1 と $f(t) = \frac{\nu}{r^m} g(t)$ と

$k = [\beta] + 2$ に適用して

$$|S(j, m, \nu)| \ll r^{\frac{j}{\beta}(1-\delta)}$$

とある。ここで $\frac{j}{\beta}(\beta - \delta) \leq m (\leq j)$ とし f' に ν と α van der

Corput の Lemma ([11], Lemma 4.8 と 4.2) を使う

$$|S(j, m, \nu)| \ll \frac{1}{\nu} r^{\frac{j}{\beta} + m - j}$$

を得た。以下 δ とする。

δ

(Case 2) $\beta, \beta_1, \dots, \beta_{b-1} \in \mathbb{N}$, $\beta_b \notin \mathbb{N} (>0)$ ($b \geq 1$) $\alpha \in \mathbb{R}$.
 従って $b = \beta \in \mathbb{N}$, $r = \beta_b (>0)$ とおいて

(1) $m \leq \frac{j}{b}(r-\delta)$ ならば Lemma 1 に適用して

$$|\mathcal{S}(j, m, v)| \ll v^{\frac{j}{b}(1-\delta)}$$

と 2. 従って $\frac{j}{b}(b-1+\delta) < m$ ($\leq j$) ならば, f' に関する $v.d.$ Copart の Lemma に従って

$$|\mathcal{S}(j, m, v)| \ll \frac{1}{v} \cdot v^{\frac{j}{b} + m - \delta}$$

と 2. 更に $b \geq 2$ として $\frac{j}{b}(b-2+\delta) \leq m$ ($\leq \frac{j}{b}(b-1+\delta)$) ならば, f'' に関する $v.d.$ Copart の Lemma ([1], Lemma 8.7c & 8.4) に従って

$$|\mathcal{S}(j, m, v)| \ll \frac{1}{v} \cdot v^{\frac{j}{b} + \frac{1}{2}(m-j)} + v^{\frac{j}{b}(1-\frac{\delta}{2})}$$

と 2. 更に $b \geq 3$ として $\frac{j}{b}(r-\delta) \leq m \leq \frac{j}{b}(b-2+\delta)$ ならば Lemma 1 の証明を直接 $\mathcal{S}(j, m, v)$ に適用して ($k=b-1$)

$$|\mathcal{S}(j, m, v)| \ll (v^{\frac{r}{b}})^{1-\delta}$$

を得るので之で定理 1 は了る.

定理 2 については, 次の (A) のように (m, v) 以外に Lemma 2 の系に適用すればよい. 今 $g(t) = \alpha \cdot t^b + \dots$ とおいて

$$(*) \quad (v, m); \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{v}{v^m} \alpha \text{ は有理数に近似的に } \frac{a}{q} \text{ で} \\ (a, q) = 1, \quad \left| \frac{v}{v^m} \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2} \\ (\log X_j)^H < q \leq X_j^b \cdot (\log X_j)^{-H} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ is } j \text{ of the form } (1) \end{array} \right.$$

γ いう条件について, こういふ (v, m) は $\text{order } X_j^b (\log X_j)^{-H}$ の Farey 近似分数を考えたば, 十分大なる正定数 C_1 により

$$(j \geq) \quad m > j - C_1 \log j$$

より

$$C_1 \log j > m \quad (j \geq j_0)$$

γ は j を与えらるゝので, 関数 $I(t)$ を利用 (1) 段階で, γ いう m を自明な評価にて $\dots + O(X_j \log j) = \dots + O(X_j \log \log X_j)$ として除くことにより証明を終了.

$g(t)$ かつ $g \in R[t] \setminus Q[t]$ のとき, 係数に於いて条件とすれば [?] は示せる. 条件を (2) 示す事は考察中である.

REFERENCES

- [1] A.H.Copeland and P.Erdős, Note on normal numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 52(1946), 857-860.
- [2] H.Davenport and P.Erdős, Note on normal decimals, Canadian J. Math., 4 (1952), 58-63.
- [3] L.-K. Hua, Additive Theory of Prime Numbers, Translations of Mathematical Monographs, Vol.13(1965), American Math. Soc., Providence, Rhode Island.
- [4] A.A.Karatuba, Foundations of Analytic Number Theory, Second Edition, Nauka(1983), (in Russian).
- [5] L.Kuipers and H.Niederreiter, Uniform Distribution of Sequences, John Wiley and Sons(1974), New York.

- [6] L.Mirsky, A Theorem on representations of integers in the scale of r ,
Scripta Math., 15(1947), 11-12.
- [7] Y.-N.Nakai and I.Shiokawa, A class of normal numbers, to appear.
- [7'] " " " " " II, to appear.
- [8] J.Schiffer, Discrepancy of normal numbers, Acta Arith., 47(1986), 175-186.
- [9] I.Shiokawa, Asymptotic distributions of digits in integers, to appear.
- [10] R.C.Stoneham, A general arithmetic construction of transcendental non-Liouville normal numbers from rational fractions, Acta Arith., 16(1970), 239-253.
- [11] E.C.Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford Univ.Press (1951).
- [12] R.C.Vaughan, The Hardy-Littlewood Method, Cambridge Tracts in Mathematics, 80(1981), Cambridge Univ. Press, London.