

変形の実例

東京大学 教養学部 伊 勢 幹 夫
中央大学 理工学部 金 行 壮 二 (記)

§ 0. まえがき

記号 : S^i : i 次元球面

$T^i(\mathbb{C})$: i 次元複素トーラス

$P^i(\mathbb{C})$: i 次元複素射影空間

Θ : 考えている多様体の解析的ベクトル場の芽の層

直積多様体 $S^1 \times S^{2p+1}$ は, $P^p(\mathbb{C})$ 上の fibre $T^1(\mathbb{C})$ の解析的バンドルの構造をもつことが知られている. $S^1 \times S^{2p+1}$ にこれにより, 複素構造を入れたものを "Hopf 多様体" といひ X_p で表わす. (但し $p \geq 1$). 更にもつと一般に奇数次元の球面の直積 $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ は, $P^p(\mathbb{C}) \times P^q(\mathbb{C})$ 上のファイバー $T^1(\mathbb{C})$ の解析的バンドルの構造が入る. 従つて, $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ は, 複素構造をもつ. こうしてえられた複素多様体を, "Calabi-Eckmann 多様体" といひ $X_{p,q}$ で表わす.

さて,

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} H^1(X_p, \Theta) = (p+1)^2 \\ \dim_{\mathbb{C}} H^2(X_p, \Theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} H^1(X_{p,q}, \Theta) = (p^2 + q^2 + 2p + 2q) + 1 \\ \dim_{\mathbb{C}} H^2(X_{p,q}, \Theta) = 0 \end{cases}$$

が知られている。故に、 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\cdot, \theta)$ だけの parametre をもつ変形が存在する。

また $S^2 = P^1(\mathbb{C})$ の直積 $S^2 \times S^2 = X$ には自然な複素構造がある。そして、 $H^1(X, \theta) = 0$ である。しかし、 $S^2 \times S^2$ には、可算無限個のことなる複素構造が入ることが知られている。これらはすべて $P^1(\mathbb{C})$ 上のファイバー $P^1(\mathbb{C})$ の解析的バンドルの全空間としてえられる。この多様体を Σ_n ($n=1, 2, \dots$) とかき、"Hirzebruch 多様体" という。Hirzebruch 多様体に対して $H^1(\Sigma_n, \theta) = 0$ が知られている。以上のことは Brieskorn [10] により $P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^{n-1}(\mathbb{C})$ をファイバーとするバンドルの全空間の場合に拡張されている。

§ 1. コンパクト・複素多様体の例

イ) 閉リーマン面 X

X の種数を g とすると

$$g = 0 \quad \text{ナラバ} \quad X = P^1(\mathbb{C})$$

$$g = 1 \quad \text{ナラバ} \quad X = T^1(\mathbb{C})$$

$$g \geq 2 \quad \text{ナラバ} \quad X = \Gamma \backslash D.$$

ここに、 $D = \{|Z| < 1\}$ かつ Γ は D に働く不連続群である。

ロ) 単連結 コンパクト均質複素多様体 (Wang 多様体, C-多様体)

これは Kähler 構造をもつものと、もたないものにわかれる。前者の例として、 $P^n(\mathbb{C})$, 複素グラスマン多様体, 旗多様体, 後者の例として、Calabi-Eckmann 多様体がある。Wang 多様体の "不変" 複素構造は数えられている。

ハ) コンパクト複素 parallisable 多様体

これは、複素リー群 G の discrete 部分群 Γ による商空間 G/Γ として表わされる。複素トーラス $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 以外のこの種が多様体はあまり性質がよくわかっていない。

ニ) 解析的 fibre bundle

底空間又は、ファイバーが (ロ) 又は (ハ) であるもの。例えば、Hopf 多様体など。一般に、コンパクト均質複素多様体は (ロ) を底、(ハ) をファイバーとする fibre bundle の全空間となる。

ホ) 対称領域の不連続群による商多様体

ヘ) よく性質のわかっている多様体の divisor となつてゐるもの (ロ), (ハ), (ホ) は夫々リーマン面の $g=0, 1, \geq 2$, の場合の高次元への一般化である。

§ 2. Wang 多様体

定理 (Bott) X を Kähler Wang 多様体とすると

$$H^q(X, \mathbb{C}) = 0, \quad q \geq 1.$$

特に、 X の複素構造の small deformation は trivial である。 X の homogeneous でない複素構造については何も知られていない。global deformation については、次の二つのこと以外はわかっていない。

定理 (Hirzebruch-Kodaira) X を $P^n(\mathbb{C})$ と C^∞ -同型なコンパクト Kähler 多様体としよう。もし、 n が奇数ならば X は、 $P^n(\mathbb{C})$ と解析的に同型である。

定理 (Brieskorn[9]) X を complex quadric $Q_n(\mathbb{C}) = SO(n+2)/SO(n) \times SO(2)$ と C^∞ -同型なコンパクト Kähler 多様体としよう。 n が奇数ならば、 X は $Q_n(\mathbb{C})$ と解析的に同型である。

なお, Kähler Wang 多様体の複素構造の任意の deformation は trivial であることが予想される.

non-Kähler Wang 多様体 X (即ち, Kähler 構造の入らない Wang 多様体) は, Kähler Wang 多様体 Y 上の複素トーラス・バンドルの構造をもつ. ファイバーの複素トーラス T が r 次元だとする.

$$H^1(X, \theta) = H^1(T, \theta_T) \oplus H^0(Y, \theta_Y) \otimes H^1(T, 0)$$

が成立つ. そして, $H^1(T, \theta_T) = H^1(T, 0) \otimes \mathbb{C}^n$ である. 但し, 0 は, 解析関数の芽の層を表わす. $H^1(T, \theta_T)$ はトーラスの複素構造の変形を表わすが, $H^0(Y, \theta_Y) \otimes H^1(T, 0)$ は X のどの様な変形に対応しているか不明である. なお, $H^2(X, \theta)$ は一般にはゼロでない. $q > r$ ならば $H^q(X, \theta) = 0$ が成立つ. 故に, $r=1$ のときは $H^2(X, \theta) = 0$ である.

§ 3. 複素トーラス

複素トーラス X は, $\mathbb{C}^n / \Gamma$ と表わされる. 但し, Γ は, $\{\omega_1, \dots, \omega_{2n}\}$ で生成される lattice である. X の複素構造の変形の族の具体的な構成は次の様にしてなされる.

$$M = \{t = (t_{\beta}^{\alpha}); n \text{ 次正方形行列} \mid \det(\operatorname{Im} t) > 0\}$$

とする.

$$\omega_j^{\alpha}(t) = \begin{cases} \delta_j^{\alpha} & 1 \leq j \leq n \\ t_{\beta}^{\alpha} & j = n + \beta, \quad 1 \leq \beta \leq n \end{cases}$$

とおき、行 vector $\omega_j(t) = (\omega_j^1(t), \dots, \omega_j^n(t)) \quad 1 \leq j \leq m$

を考える.

$\mathbb{C}^n \times M$ 上の変換 $g_j (1 \leq j \leq 2n)$ を次の様に定義しよう.

$$g_j : (z, t) \rightarrow (z + \omega_j(t), t)$$

そして $\{g_1, \dots, g_{2n}\}$ で生成された $\mathbb{C}^n \times M$ 上の不連続変換群を G とす

る. そして、商多様体 $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n \times M / G$ を考えると、 $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ は、 $X = \mathbb{C}^n / \Gamma$ の変形の族である. 射影 π は、 $(z, t) \rightarrow t$ で定義すればよい.

$$\pi^{-1}(t) = V_t = \mathbb{C}^n \times \{t\} / G = \mathbb{C}^n / \Gamma_t$$

である. 但し、 Γ_t は G の $\mathbb{C}^n \times \{t\}$ 上への制限を表わす.

定理 (Kodaira-Spencer[36][37]) 上で構成した族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ は complete かつ, effectively parametrized である. 即ち、写像

$\rho_t : (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \theta_t)$ が上への同型である. 更に任意の複素トーラスに対してそれを含む complete かつ effectively parametrized な holomorphic family が存在する.

"global" deformation については、次のことが知られている.

定理 (Andreotti-Stoll[2]) 複素トーラスの任意の変形はまた 1 つの複素トーラスである.

なお実トーラスに複素構造を任意に入れたものが複素トーラスに限るかどうかは不明である.

§ 4. 対称有界領域の商空間

この時は、small deformation については次の結果がある.

定理 (Calabi-Vesentini[12])

D を対称領域とし、その既約成分の次元はすべて1 より大とする、 Γ を D に解析的にかつ、不動点なく働く不連続群で、商多様体 $X = \Gamma/D$ は compact としよう。この時 $H^1(X, \theta) = 0$ 。

この場合も global deformation については不明である。 Γ の変形については、Weil [64] を参照されたい。

§ 5. コンパクト Kähler 均質多様体

コンパクト Kähler 均質多様体 X は、Kähler Wang 多様体 Y と複素トーラス $T^q(\mathbb{C})$ の直積になる。 Y の解析的自己同型群は、複素半単純リー群である。それを G とし、そのリー代数を $\mathfrak{g}$ で表わす。この時、

$$H^1(X, \theta) = H^1(T^q, \theta_T) \oplus \mathfrak{g} \otimes H^1(T^q, 0) \quad (\text{直和})$$

が成立つ。

$H^1(X, \theta)$ の中には、通常のベクトル場のブラケットから、自然にブラケット演算が定義される。(詳しくは、Kodaira-Spencer [34] を見られたい。)

さて、 X を member にもつ複素構造の変形の微分可能な任意の族 $\mathcal{V} \ni M$ を考えよう。この時、 ρ -map $\rho_0; (T_M)_0 \rightarrow H^1(X, \theta) \quad (\rho^{-1}(0)=X)$ が定義されるが、 $\text{Im } \rho_0$ は $H^1(X, \theta)$ の中でブラケット演算に関して可換な部分空間をなす。この部分空間を infinitesimal deformation space という。これは X を member にもつ変形の族に対応してきまるわけであるが、これらの infinitesimal deformation space の中で極大なものを deformation space という。一方 $H^1(X, \theta)$ の可換部分空間は

$$H^1(T^q, \theta_T) \oplus \mathfrak{g}' \otimes H^1(T^q, 0)$$

なる形であることがわかる．ここに $\mathcal{S}'$ は $\mathcal{S}$ の可換な複素部分代数である．

定理 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{G}$ の極大可換複素部分代数としよう．この時，可換部分空間

$$D(\mathcal{S}) = H^1(T^q, \theta_T) \oplus \mathcal{S} \otimes H^1(T^q, 0)$$

は deformation space である．

証明 $X = T^q \times Y$ であり，トーラス $T^q = \mathbb{C}^q / \Gamma$ に対しては，

$H^1(T^q, \theta_T)$ だけの変形が実際存在する．故に $\mathcal{S} \otimes H^1(T^q, 0)$ に対応する変形の族をつくれればよい．

格子 Γ の generator を $\{\omega_1, \dots, \omega_{2q}\}$ としよう． $\omega_i = (\omega_{i1}, \dots, \omega_{iq}) \in \mathbb{C}^q$ である．この時，次のような可換な diagram が成立つ；

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_e(\mathbb{C}^q, \mathcal{S}) & \xrightarrow{r} & \text{Hom}(\Gamma, \mathcal{S}) \quad (\text{exact}) \\ \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_h(\mathbb{C}^q, H) & \xrightarrow{r} & \text{Hom}(\Gamma, H) \quad (\text{exact}) \end{array}$$

ここに， Hom_e ， Hom_h ， Hom はそれぞれ linear homomorphism, holomorphic homom. アーベル群としての homomorphism を表わす． H は $\mathcal{S}$ が G で生成する analytic group, r は制限写像とする． $\text{Hom}_a(\mathbb{C}^q, \mathcal{S})$ は， $\mathbb{C}^q$ から $\mathcal{S}$ への additive function σ で， $\sigma(\lambda z) = \bar{\lambda} \sigma(z)$ $\lambda \in \mathbb{C}$ を充すもの全体から成る集合とする．この σ の定義域を Γ に制限することによつてえられる準同型の全体を $\text{Hom}_a(\Gamma, \mathcal{S})$ で示す．この時， $\text{Hom}_a(\Gamma, \mathcal{S}) = \{\sigma ; \sigma(z_i) = \sum_{j=1}^q \bar{\omega}_{ij} \varphi_j, \varphi_j \in \mathcal{S}\}$ が成立つ．これより $\text{Hom}_a(\Gamma, \mathcal{S}) \cong \mathcal{S} \otimes H^1(T, 0)$ がわかる． $M = \mathcal{S} \otimes \mathbb{C}^q$ とおく．この時 $M \cong \text{Hom}_a(\Gamma, \mathcal{S})$ である．直積 $\mathbb{C}^q \times Y \times M$ 上の $\gamma \in \Gamma$ の作用を

$$\gamma \cdot (z, y, t) = (z + \gamma, \exp \sigma_t^{-1}(\gamma) y, t)$$

で定義する. 商多様体 $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^q \times Y \times M) / \Gamma$ を考える. この時 $\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} M$ は求める変形の族である. ここに $\sim$ は $[(z, u, t)] \rightarrow t$ で定義する. この時,

$V_t = \mathcal{V}^{-1}(t) = (\mathbb{C}^q \times Y) / \Gamma$ でこれはトーラス $\mathbb{C}^q / \Gamma$ 上のファイバー Y の解析的バンドルの全空間がある. さて, 族 $\mathcal{V} \rightarrow M$ に対応する ρ -map.

$\rho_0 : (T_M)_0 \rightarrow H^1(v_0, \theta_0)$ ($V_0 = X$ である) は 1 対 1 である. そして $(T_M)_0$ を M と同一視するとき $M \cong \text{Hom}_a(\Gamma, \mathcal{L}) \ni \sigma_t$ に対して

$$\rho_0(\sigma_t) = \sum_{j=1}^q \varphi_j d\bar{z}_j$$

となるから ρ_0 は, $(T_M)_0$ から $\mathcal{L} \otimes H^1(T, 0)$ の上への同型である.

§6. $P^n(\mathbb{C})$ の hypersurface

X を Kähler Wang 多様体としよう. $X = G/U$ と coset space で表わせる. ここに G は複素半単純リー群, U はその複素閉部分群である. この時, 次の同型が成立つ.

$$H^1(X, 0^*) \stackrel{\delta}{\cong} H^2(X, \mathbb{Z}) = (\mathcal{L}_{\mathbb{Z}})^*$$

ここに, 0^* は X 上の non-vanishing な解析関数の芽の層, $(\mathcal{L}_{\mathbb{Z}})^*$ は G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathcal{H}$ の integral part の dual

である. $(\mathcal{L}_{\mathbb{Z}})^* \ni \lambda$ への同型で対応する複素直線 bundle を

$F_\lambda \in H^1(X, 0^*)$ としよう. $\mathbb{F}_\lambda$ を F_λ の解析的切断面の芽の層とする.

そして, $H^0(X, \mathbb{F}_\lambda)$ に対応する完全一次系を $|F_\lambda|$ で表わす ($|F_\lambda|$ は

$H^0(X, \mathbb{F}_\lambda)$ の dual space に associate した複素射影空間のこと).

$|F_\lambda| = P^N(\mathbb{C})$ としよう. λ に関する適当な条件の下で, F_λ は ample となる. そしてこの時, 各 $x \in X$ に対して $H^0(X, F_\lambda) \rightarrow F_x$ は onto. よつてその kernel を F_x' とすると,

$$0 \rightarrow F_x' \rightarrow H^0(X, F_\lambda) \rightarrow F_x \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が各点 $x \in X$ で成立つ. ここに F_x は F_λ の x 上の fibre である. そして $f_\lambda; x \rightarrow F_x' \in P^N(\mathbb{C})$ は X から $P^N(\mathbb{C})$ への解析的 injection であることがわかる.

今, $\mathcal{G}$ を reducible 又は singular な $P^N(\mathbb{C})$ の hypersurface の和集合とし, $M = P^N(\mathbb{C}) - \mathcal{G}$ とおく.

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(x, t) \in X \times M; \langle f_\lambda(x), t \rangle = 0\}$$

とおくと, これは complex manifold である. 但し, $\langle, \rangle$ は次のいみとする. $f_\lambda(x)$ の $P^N(\mathbb{C})$ での斉次座標を $(\xi_0(x), \dots, \xi_N(x))$ とし, t の斉次座標を $(t_0, \dots, t_n)$ とすると,

$$\langle f_\lambda(x), t \rangle = \sum_{i=0}^N t_i \xi_i(x)$$

とする.

$\mathcal{V}_\lambda \xrightarrow{\pi} M$ は, X の hypersurface を member とする変形の族である. ここに, π は $(x, t) \rightarrow t$ で定義する.

$$V_t = \pi^{-1}(t) = \{(\xi_0, \dots, \xi_N) \in P^N(\mathbb{C}); \sum t_i \xi_i = 0\} \cap f_\lambda(X)$$

は, X の hypersurface とみられる.

Def X を member とする変形の解析的族 $\mathcal{V} \rightarrow M$ が complete

かつ effectively parametrized のとき $\dim_{\mathbb{C}} M$ を X の moduli とい
い $m(X)$ で表わす.

X が射影空間の時, Kodaira- Spencer による次の定理が知られている.

定理 $X = P^{n+1}(\mathbb{C})$ で次の二つの場合を除外する.

$$\begin{cases} n = 1 \text{ で hypersurface の次数} \geq 4 \\ n = 2 \text{ で hypersurface の次数} = 4 \end{cases}$$

この時, $\mathcal{V}_{\lambda} \rightarrow M$ は complete な変形の解析的族で, 更に M のある複素
部分多様体 N に制限した族 $\mathcal{V}|_N \rightarrow N$ は effectively parametrized に
なる. そして, $m(V_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(V_t, \theta_t) = \dim |F_{\lambda}| - \dim G = N - \dim G$
が成立つ.

証明 後半だけを示そう. Ξ を X 上の解析的 vector 場の芽の層
 $\Xi|_{V_t} = \Xi_t$ とする. θ_t は V_t 上の解析的 vector 場の芽の層
この時,

$$0 \rightarrow \theta_t \rightarrow \Xi_t \rightarrow F_{\lambda,t} \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が V_t 上で成立つ. ここに $F_{\lambda,t} = F_{\lambda}|_{V_t}$ である. また

$$0 \rightarrow \Xi \otimes F_{\lambda}^* \rightarrow \Xi \rightarrow \tilde{\Xi}_t \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が X 上で成立つ. ここに F_{λ}^* は F_{λ} の dual bundle F_{λ}^* の解析的切断
面の芽の層であり, $\tilde{\Xi}_t$ は Ξ_t の X 上への natural extension を表わす.

$$H^q(X, \Xi \otimes F_{\lambda}^*) = 0 \quad q = 0, 1, 2$$

が成立つ. これは X が射影空間であることから出る. また Bott により

$$H^1(X, \Xi) = 0$$

これらを用いて次の可換な diagram をうる:

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \uparrow & & \uparrow & & & \\
0 \rightarrow & H^0(V_t, \Xi_t) & \rightarrow & H^0(V_t, F_{\lambda, t}) & \rightarrow & H^1(V_t, \theta_t) & \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\
& \uparrow & & \uparrow & \nearrow & & \\
& H^0(X, \Xi) & \rightarrow & (T_M)_t & \xrightarrow{\rho_t} & & \\
& \uparrow & & \uparrow & & & \\
& 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

たての矢は exact である. $H^0(X, \Xi) = \mathcal{L}$ (= G のリー代数),

$\dim(T_M)_t = \dim|F_{\lambda}|$. これより直ちに定理の後半がわかる.