

誤差項を含む 1 変数多項式の根の誤差上界

筑波大学大学院数学研究科 照井 章 (Akira Terui)

筑波大学数学系 佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki)

Abstract. 与えられた 1 変数多項式の係数が誤差を含む場合、根の存在範囲を確定することは、近似的代数計算の中でも重要な計算の 1 つである。本論では、数値解析の分野においてよく知られている Smith の定理を用いることにより、誤差を含む係数をもつ 1 変数多項式の根の存在範囲の上界を決定する方法を提案する。

1. はじめに

本論では、与えられた 1 変数多項式がその係数にある大きさの誤差をもつときに、その多項式の根の存在範囲を決定する方法を提案する。

従来、数式処理で多項式に対して行われる様々な代数計算は、与えられた多項式が正確な係数を持ち、演算も正確に行われることを前提としてきた。しかし、工学等の応用分野においては多項式の係数が誤差を含む場合が不可避であり、そのような場合にはこれまで考案されてきた代数的算法はほとんど役に立たないため、従来の代数計算を根本から見直す必要が生じた。近似的代数計算 [Sas88] は、こうした背景の下に生まれた全く新しい代数計算の手法であり、今後大きな発展が期待される分野である。近似的代数計算の算法としてこれまでに考案されたものには近似無平方分解、近似 GCD 計算、近似因数分解などがあり、さらにこれらの近似的代数計算の誤差解析も進められている。

さて、近似的に代数計算を進める上で基本的に重要なことの一つに、「誤差を含む係数をもつ 1 変数多項式の根の存在範囲の決定」がある。たとえば、多項式の係数が浮動小数で与えられた場合、係数には不可避免的に計算機イプシロン程度の誤差が入り込む。また、多変数代数関数の特異点の位置を数値計算で求める場合 [TS97] などでは、多変数多項式のいくつかの変数に浮動小数値を代入するが、得られる多項式の係数精度はかなり低下する。同様に、浮動小数係数多項式の剰余列などの計算では頻繁に係数の桁落ちが生じ、計算機イプシロンよりはるかに大きな誤差項が結果式に入り込む。このような誤差項を含む 1 変数多項式に対しては、いくら高精度に根を求めても無意味である。必要なことは、誤差項の存在によって根の存在範囲がどのように広がるのか、その範囲の上限を実用に耐えうる精度で、かつ簡潔な方法で決定することである。

もちろん、このような研究は数値計算の分野で昔から行われてきた。しかし、それらの研究は誤差項 Δ_P が非常に小さいとして、 Δ_P の存在による根の「ゆらぎ」の程度をみることが主眼であった。一方、本論では Δ_P が非常に小さいとは仮定せず、根の存在範囲の厳密な上限を与えることを目的とする。この目的のため、我々は 1 変数多項式の数値根の誤差解析において非常に有名かつ有用な Smith の定理を利用する。

本論では以下の内容を述べる。**2.**では問題設定と Smith の定理を記述する。**3.**では単根に対する誤差上界を与え、**4.**では重根・近接根の場合の誤差上界の計算方法を提案する。さらに**5.**では、これらの結果を近似剰余列に応用して、近似 GCD 計算や近似無平方分解での近似重根の計算における誤差項の影響について議論する。

2. 問題設定と Smith の定理

本論では、次の問題を考察する。

問題設定 既知の n 次 1 変数多項式 $P(x)$ により、未知の多項式 $\tilde{P}(x)$ が次のように与えられるとする。

$$\tilde{P}(x) = P(x) + \Delta_P(x), \quad \deg(\Delta_P) < \deg(P). \quad (2.1)$$

ただし、 $\Delta_P(x)$ は誤差項を表す多項式で未知だが、

$$\Delta_P(x) = \delta_{n-1}x^{n-1} + \delta_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \delta_0 \quad (2.2)$$

と表すとき、既知の微小正数 $\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \dots, \varepsilon_0$ に対して

$$|\delta_i| < \varepsilon_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0 \quad (2.3)$$

であることはわかっているとする。このとき、既知方程式 $P(x) = 0$ の近似根を用いて、未知方程式 $\tilde{P}(x) = 0$ の根の存在範囲の上限を決定すること。 $\square$

Smith の定理 [Smi70] とは次の定理である。(詳細は文献を参照されたい。)

定理 1 $P(x)$ を n 次 1 変数多項式とする。複素平面上の n 個の異なる点を $z_1, \dots, z_n$ とするとき、方程式 $P(x) = 0$ のすべての根は、中心が z_i ($i = 1, \dots, n$) で半径が

$$r_i = n \cdot \frac{|P(z_i)|}{\left| a_n \prod_{j=1, j \neq i}^n (z_i - z_j) \right|}, \quad a_n = \text{lc}(P) \quad (2.4)$$

の閉円盤 D_i の合併の中に存在する。さらに m 個の閉円盤が連結成分をなし、かつその他の閉円盤と連結でないならば、その連結成分の中に m 個の根が存在する。 $\square$

定理 1 において $z_1, \dots, z_n$ は任意に選んだ点であることに注意されたい。これらの点が真の根に近ければ、Smith の定理は根の存在範囲をかなりよく（と言っても「数倍の範囲で」という程度だが）決定することがわかっている。しかし、これらの点を下手に選ぶと全然意味ある結果を与えない（たとえば $z_1 = \dots = z_n$ としたり、 $z_1 \simeq \infty$ とした場合がそうである）。したがって、Smith の定理を用いる場合には $z_1, \dots, z_n$ をいかに上手に与えるかが根の存在範囲決定の鍵になる。

3. 単根の場合

簡単のため、 $P(x)$ と $\tilde{P}(x)$ はともにモニックとし、 $P(x) = 0$ と $\tilde{P}(x) = 0$ の根をそれぞれ $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ および $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_n$ とする。

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \zeta_1)(x - \zeta_2) \cdots (x - \zeta_n), \\ \tilde{P}(x) &= (x - \tilde{\zeta}_1)(x - \tilde{\zeta}_2) \cdots (x - \tilde{\zeta}_n). \end{aligned}$$

本章では一般性を失うことなく、根 ζ_1 が単根でその近傍に他の根はないものとする。さらに $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ の近似値として $z_1, \dots, z_n$ が得られているものとする。 $(z_1, \dots, z_n$ は方程式 $P(x) = 0$ を数値解法で解いて得られる近似解とすればよい。) 数値 $z_1, \dots, z_n$ を用いれば、未知多項式 $\tilde{P}(x)$ の根 $\tilde{\zeta}_1$ の存在範囲が形式的に求められる。すなわち、

$$R_1 = n \cdot \frac{|\tilde{P}(z_1)|}{\left| \prod_{j=2}^n (z_1 - z_j) \right|} \quad (3.1)$$

とするとき、複素平面上で中心が z_1 で半径が R_1 の円盤内がその存在範囲である。誤差項 $\Delta_P(x)$ が未知ゆえ $\tilde{P}(z_1)$ も計算できないが、

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(z_1)| &\leq |P(z_1)| + |\Delta_P(z_1)| \\ &\leq |P(z_1)| + \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j |z_1|^j \end{aligned}$$

ゆえ、 R_1 の上界は次式のように計算できる。

$$R_1 \leq n \cdot \frac{|P(z_1)| + \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j |z_1|^j}{\left| \prod_{j=2}^n (z_1 - z_j) \right|}. \quad (3.2)$$

数値計算での通常の誤差上界の決定は、上式で $\varepsilon_j = 0$ として行われるが、それは実用に耐えうるかなりよい上界となっている。このことを考えれば、上述の決定法は実用的な方法であると期待できる。

4. 重根・近接根の場合

一般性を失うことなく $\zeta_1 \simeq \cdots \simeq \zeta_m$ ($m \leq n$) とし、 $P(x)$ の $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ 以外の根はこれらから十分に離れているものとする。

前章の議論によると、 $P(x) = 0$ を数値的に解いて $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ の近似値 $z_1, \dots, z_n$ を求め、これらを Smith の定理に代入して、公式 (3.1) により $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_n$ の存在範囲を決定すればよさそうに思える。しかし、近似根 $z_1, \dots, z_n$ は精度限界まで計算するとき $P(z_i) = O(\varepsilon_M)$ (ε_M は計算機イプシロン) となるように決定されるので、 $|\Delta_P(z_i)| \gg \varepsilon_M$ のとき、式 (3.1) に基づく存在範囲は広くなりすぎて、実用には適さないことが多いと考えられる。

そこで我々は $z_1, \dots, z_m$ を以下のように定める。まず、

$$P(x) = (x - \zeta_1) \cdots (x - \zeta_m) \cdot Q(x) \quad (4.1)$$

とおく。仮定より

$$Q(z_1) = \prod_{j=m+1}^n (z_1 - \zeta_j) \simeq \prod_{j=m+1}^n (z_1 - z_j) \quad (4.2)$$

ゆえ、式 (3.1) で定められる R_1 は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} R_1 &= n \cdot \frac{\left| \prod_{j=1}^n (z_1 - \zeta_j) + \Delta_P(z_1) \right|}{\left| \prod_{j=2}^n (z_1 - z_j) \right|} \\ &\simeq n \cdot \frac{\left| \prod_{j=1}^m (z_1 - \zeta_j) + \Delta_P(z_1)/Q(z_1) \right|}{\left| \prod_{j=2}^m (z_1 - z_j) \right|}. \end{aligned}$$

$z_1, \dots, z_m$ を $(\zeta_1 + \dots + \zeta_m)/m$ を中心とする半径 r の円周上に均等に分布させるとするならば、

$$\left| \prod_{j=1}^m (z_1 - \zeta_j) \right| \approx r^m, \quad \left| \prod_{j=2}^m (z_1 - z_j) \right| = mr^{m-1} \quad (4.3)$$

と評価できる。これらの評価により、式 (4.3) は

$$R_1 \simeq n \cdot \frac{r^m + C}{mr^{m-1}}, \quad C = |\Delta_P(z_1)/Q(z_1)| \quad (4.4)$$

となる。ここで、 R_1 が最小になるように r を決めると次式を得る。

$$r = \sqrt[m]{(m-1)C}. \quad (4.5)$$

このとき $R_1 \approx n/(m-1) \cdot \sqrt[m]{C}$ である。もちろん、 R_1 の上限値は式 (4.3) で厳密に定める必要がある。

5. 近似剰余列による近似重根について

1 変数多項式の剰余列は代数計算において、1) Sturm 列として実根の個数を求める、2) GCD を計算する、3) 無平方分解に用いて重根因子を分離する、など種々の重要な利用法がある。しかし、係数が浮動小数である場合、剰余列の終了判定が厳密でなくなることがある。すなわち、多項式剰余列の計算においては、剰余列 $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1})$ を適当に規格化して計算し（剰余列の規格化については後述）、 $\|P_{k+1}\|/\|P_k\| = \varepsilon \ll 1$ となった時点で剰余列計算を終了させるのであるが、このとき、正確に計算した場合に $P_{k+1} = 0$ になるのか、あるいは P_{k+1} は 0 でない微小な係数をもつ多項式であるのか、区別がつかないことがある。

このような場合、 P_{k+1} は 0 でない微小な係数をもつような未知の多項式であるとして、 P_k から得られる性質が P_{k+1} の存在によりどの程度あいまいになるか、そのあいまいさの上界を厳密に見積もっておけば、近似剰余列を安心して使うことができる。

我々は、剰余列の規格化に佐々木・佐々木 [SS97] の方法を用いる。多項式 P_1, P_2 から生成される剰余列 $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1})$ の要素 P_i ($i = 3, 4, \dots, k+1$) に対し、

$$\begin{aligned} A_i P_1 + B_i P_2 &= P_i = \gamma_i \bar{P}_i \\ \begin{cases} \deg(A_i) < \deg(P_2) - \deg(P_i) \\ \deg(B_i) < \deg(P_1) - \deg(P_i) \end{cases}, & \gamma_i = \max\{\|A_i\|, \|B_i\|\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

を満たす多項式 $A_i, B_i, \bar{P}_i$ が一意的に定まる。このとき、多項式の列 $(P_1, P_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_k, \bar{P}_{k+1})$ を新たに $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1})$ とおき、これを P_1, P_2 から生成される規格化剰余列とする。このとき、次式が成立する [SS97]。

$$\begin{cases} \alpha_i P_1 &= -B_{i+1} P_i + B_i P_{i+1}, \\ \alpha_i P_2 &= A_{i+1} P_i - B_i P_{i+1}, \\ \alpha_i &= A_{i+1} B_i - A_i B_{i+1}. \end{cases} \quad (5.2)$$

したがって、 $B_k P_{k+1}$ が誤差項であるとみなせば、すなわち式 (2.1) において

$$\tilde{P} = \alpha_k P_1, \quad P = -B_{k+1} P_k, \quad \Delta_P = B_k P_{k+1} \quad (5.3)$$

とおけば、前章までの議論が直ちに適用できる。

たとえば、2つの1変数浮動小数係数多項式 F と G (ただし $\deg(G) \leq \deg(F)$) の精度 ε 以下の近似 GCD を計算する場合は、 $P_1 = F, P_2 = G$ とおいて上の規格化剰余列を計算することにより、

$$\begin{cases} F = D\tilde{F} + \Delta_F \\ G = D\tilde{G} + \Delta_G \end{cases}, \quad \|\Delta_F\| = \|\Delta_G\| < \varepsilon \ll 1 \quad (5.4)$$

を満たす D を計算する。このとき、 D の根 (の近似値) の一つを z_1 として、上述の方法で z_1 に対応する F と G の根がそれぞれ Δ_F と Δ_G によりどれほど変動するか、その上界を決めれば、 F と G の近接根の近接度の上界を決めることができる。また、1変数浮動小数係数多項式 $P(x)$ の精度 ε 以下の近似無平方分解を行う場合には、 $P_1 = P(x), P_2 = \frac{d}{dx}P(x)$ として規格化剰余列を計算するが、このときも同様にして $P(x)$ の近似重根の近接度の上界を定めることができる。

6. 今後の課題

本論では、与えられた1変数多項式がその係数にある大きさの誤差をもつときに、Smith の定理を用いてその多項式の根の存在範囲を決定する方法を提案した。今後は、まず上述の誤差上界の評価式を実際的な問題に適用して、それらが実用に耐えうるかどうかを調べる必要がある。これがうまくいくようなら、2. の問題設定と同様な設定の下、近似 Sturm 列の計算による近似実根の判定などの解析を行っていきたいと考えている。

参 考 文 献

- [Sas88] 佐々木建昭, 近似的代数計算. 数理解析研究所講究録 676 (1988), 京都大学数理解析研究所, 307–319.
- [Smi70] B. T. Smith, Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based Upon Gerschgorin's Theorems. *J. ACM*, **17** (1970), 661–674.
- [SS97] T. Sasaki and M. Sasaki, Polynomial Remainder Sequence and Approximate GCD. *SIGSAM Bulletin*, **31**, 3 (1997), 4–10.
- [TS97] 照井章, 佐々木建昭, 近似計算による代数関数の実特異点の検出について. 数理解析研究所講究録 986 (1997), 京都大学数理解析研究所, 92–99.