

Random hyperfunction に ついて.

九 大 工 渡 邊 壽 夫

Random hyperfunction の概念は岡部 [1], 大内 [2] 等に導入された。 (Ω, B, P) との確率変数の族 $X(z, \omega)$ が random hyperfunction であるとは, 確率 1 で $X(z, \omega) \in \mathcal{O}(C^1 - R^1)$ が成り立つことであるとする。 $L^2(\Omega, B, P)$ (P は測度, L^2 平方可積分) の φ, ψ の全体の作る Hilbert space) の Norm は測度 $\varphi \in C^1 - R^1$ の L^2 連続性があること。 L^2 -連続であること。定常性は, $\forall h \in R^1$

$$E(X_{z_1+h}, \overline{X_{z_2+h}}) = E(X_{z_1}, \overline{X_{z_2}}) \quad \forall z_1 \in C^1, \forall z_2 \in C^1 \quad \text{で定義される。}$$

Example 1. $X(\omega); (\Omega, B, P)$ との random variable. $\varphi(z)$ を non random hyperfunction とする。 $X(\omega) \cdot \varphi(z)$ は random hyperfunction である。

ある意味での random hyperfunction は $E(X(z, \omega), \overline{X(z', \omega)})$
 $= \rho(z, z')$ が (z, z') の 2 変数の関数として, hyperfunction である
 ことに, 注意を要する。Belyaev [3] によると, Gaussian

であるとき，両方の定義は一致する。

Example 2. 任意の弱定常過程 $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ に対して， $\gamma \geq 0$ ， $E(X^2(t)) = 1$ ， $E(X(t)) = 0$ なる実，平均連続性 $(-\infty < t < \infty)$ 上，確率過程 $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ に対して， $\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$ ，を相関関数， $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\zeta(\lambda)$ を λ の関数と表現する。

$$X(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{iz\lambda} d\zeta(\lambda) & \text{if } z > 0 \\ -\int_{-\infty}^0 e^{iz\lambda} d\zeta(\lambda) & \text{if } z < 0 \end{cases}$$

と定義すると， $X(z)$ は random hyperfunction である。

これは一般に，

Example 3. $d\zeta(\lambda)$ は $(-\infty, \infty)$ 上の正交増大測度で， $E(|d\zeta(\lambda)|^2) = d\mu(\lambda)$ となるように， $\gamma \geq 0$ の $\varepsilon > 0$ に対して， $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda|} d\mu(\lambda) < \infty$ を満たすとき，

$$X(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{iz\lambda} d\zeta(\lambda) & \text{if } z < 0 \\ -\int_{-\infty}^0 e^{iz\lambda} d\zeta(\lambda) & \text{if } z > 0 \end{cases}$$

は random hyperfunction である。大田 [2] によれば，任意の

L^2 -値平均連続定常 random hyperfunction はこの形で表

示されることがある。

Example 4

$B(s)$ を 1 次元 Brownian motion とする。

$$\hat{B}(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{izs} B(s) ds, & \text{Im } z > 0 \\ - \int_{-\infty}^0 e^{izs} B(s) ds, & \text{Im } z < 0 \end{cases}$$

12.5.2, Brownian motion の Fourier 変換を定義される。

$B(s) = O(\sqrt{s \log \log s})$ ($s \rightarrow \infty$) であるから、 $\hat{B}$ は well defined である。

。 $\hat{B}(z)$ は random hyperfunction である。

Distribution 1.2 の Brownian motion の Fourier 変換は次のように
意味づけられる。 $\forall \varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \hat{B}(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{B}(t+i\varepsilon) - \hat{B}(t-i\varepsilon)) \varphi(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^\infty e^{its-\varepsilon s} B(s) ds + \int_{-\infty}^0 e^{its} e^{\varepsilon s} B(s) ds \right) \varphi(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{its} e^{-\varepsilon|s|} B(s) ds \right) \varphi(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|s|} B(s) \hat{\varphi}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} B(s) \hat{\varphi}(s) ds \\ &= B(\hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Example 5.

次は white noise の random hyperfunction 表現を考へる。

$e^{iz\lambda} \in \mathcal{S}$ であるから、 $\int_0^\infty e^{iz\lambda} \hat{B}(\lambda) d\lambda$ は $\hat{B}(e^{iz\lambda})$ である。

定義可能である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(\lambda)|^2 e^{-\varepsilon|\lambda|} d\mu(\lambda) < \infty$$

をみたすものとする。この C は linear operator の gain である。

このように出来た $X(z)$ は random hyperfunction である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = Q(z) \quad \text{と} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |Q(i\lambda)|^2 e^{-\varepsilon|\lambda|} d\mu(\lambda) < \infty$$

をみたす。 $C(\lambda) = Q(i\lambda)$ は $X(z)$ に對する linear operation $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^n}{dz^n}$ に對する gain である。

今、

$$X(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{iz\lambda} H(i\lambda) d\bar{B}(\lambda), & \operatorname{Im} z > 0 \\ - \int_{-\infty}^0 e^{iz\lambda} H(i\lambda) d\bar{B}(\lambda), & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

で定義される $X(z)$ に対して、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda|} |H(i\lambda)|^2 d\lambda < \infty$

かつ $\varepsilon > 0$ であるとする。 $H(i\lambda) = \frac{1}{Q(i\lambda)}$ ($Q(i\lambda)$ の real root

を除外する) であるとして、方程式

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^{(n)}(z) = B'(z) \quad (B'(z) \neq 0)$$

をみたすことを示す。 (2) の解の列の表示を求めよう。

形式上の (1) の Laplace 変換を求めよう。

$z = t + i\delta$, $\delta > 0$, $t \geq 0$ とし、

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda t} \frac{d^n}{dt^n} X^{(n)}(t+i\delta) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B'(t+i\delta) dt$$

$$\S \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} X(t+i\delta) dt = \bar{X}_{\delta}(\lambda) \quad \text{と} \quad \text{する。}$$

前と同様にして, $\varrho(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ であり, $\varrho(\lambda) + 0 \underbrace{(\lambda > 0)}_{\delta} < \infty$

$$\bar{X}_\delta(\lambda) = \frac{1}{\varrho(\lambda)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X^{(n-k)}(i\delta) + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B'(t+i\delta) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\varrho(\lambda)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1} \lambda^j \right\} X^{(k)}(i\delta) \right\} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B'(t+i\delta) dt \Big\}$$

$$\frac{1}{\varrho(\lambda)} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1} \lambda^j = \frac{1}{\lambda^{k+1}} - \frac{1}{\varrho(\lambda)} \sum_{j=0}^k c_j \frac{1}{\lambda^{k+1-j}} \quad \text{である。}$$

$$\frac{1}{h(\lambda)} = \varrho(-i\lambda) \quad \text{である。} \quad \frac{1}{\varrho(\lambda)} = h(-i\lambda) = \int_0^{\infty} \bar{h}(s) e^{-s\lambda} ds$$

$$\text{である。} \quad \therefore \quad \bar{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} h(\lambda) d\lambda \quad \text{である。}$$

したがって,

$$X(t+i\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{t^k}{k!} - \sum_{i=0}^k c_i \int_0^t \bar{h}(t-u) \frac{u^{k-i}}{(k-i)!} du \right\} X^{(k)}(i\delta) + \int_0^{\infty} e^{-\delta|s|} d\bar{B}(s) \left(\int_0^t \bar{h}(t-u) e^{i\delta u} du \right)$$

より表示される。同様にして, $\delta > 0$ である。

$$X(t-i\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{t^k}{k!} - \sum_{i=0}^k c_i \int_0^t \bar{h}(t-u) \frac{u^{k-i}}{(k-i)!} du \right\} X^{(k)}(-i\delta) + \int_{-\infty}^0 e^{+\delta s} d\bar{B}(s) \left(\int_0^t \bar{h}(t-u) e^{i\delta u} du \right)$$

$$g(t) = \frac{t^k}{k!} - \sum_{i=0}^k c_i \int_0^t \bar{h}(t-u) \frac{u^{k-i}}{(k-i)!} du \quad \text{である。}$$

$$X(t+i\delta) - X(t-i\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) (X^{(k)}(i\delta) - X^{(k)}(-i\delta)) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta|s|} \left(\int_0^t \tilde{g}(t-u) e^{i u s} du \right) d\tilde{B}(s)$$

$$X(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{X(t+i\delta) - X(t-i\delta)\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) (X^{(k)}(i\delta) - X^{(k)}(-i\delta)) \\ + \int_0^t \tilde{g}(t-u) dB(u)$$

とある。右辺の第1項は $\{X^{(k)}(0), k=0, 1, 2, \dots\}$ に対して 2^{∞} 個の項がある。

事実は期待通りである。Justification is as follows.

[1]. 岡部靖寛: On the Gaussian process with the Markovian property and the hyperfunction of M. Sato

[2]. 大内忠: Some applications of hyperfunctions to the abstract Cauchy problem and stationary random processes.

[3]. Belyaev, Yu. K.; Analytic random processes. Theory of prob. and its appl. 4, 402-409 (1959).