

On Cylinder Homomorphisms

東大理 島田 伊知朗
(Ichiro Shimada)

§1. General Hodge Conjecture.

X を非特異射影多様体 / $\mathbb{C}$ とする. Grothendieck の定式化による General Hodge Conjecture とは次のようなものである (cf. [6]).

GHC (X, m, p) $H^m(X)$ の任意の Hodge substructure V of Hodge level $\leq m-2p$ に対して, X の Zariski 開部分集合 T で $\text{codim.} \geq p$ なるものが存在し,

$$V \subset \ker (H^m(X) \rightarrow H^m(X \setminus T))$$

となる.

ここで Hodge 構造 V の Hodge level とは, $V \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=m} V^{p,q}$ を Hodge 分解と取るとき, $\max \{ |p-q| \mid$

$V^{p,q} \neq 0$ により定義される整数である. 通常の Hodge Conjecture は, $\text{GHC}(X, 2k, k)$ に他ならない.

例えば, X を $\mathbb{P}^{n+d}$ の中の n 次元 $(a_1, \dots, a_d)$ 次 Fano 完全交叉とし, $-K_X = \mathcal{O}(f)|_X$ とする. つまり, $f = n + d + 1 - \sum a_i$. このとき, $H^n(X)$ の Hodge level は, k を $k < (f / \max(a_i)) + 1$ なる最大の整数とすると, $n - 2k$ により与えられる. (SGA 7 II Exposé XI). もし GHC が正しいならば, codimension が k 以上の X の Zariski 閉部分集合 T が存在して, $H^n(X) \rightarrow H^n(X \setminus T)$ が zero map となるはずである. すなわち, $H^n(X)$ の任意の元は T 上に support をもつ n 次元 topological cycle で represent されるはずである.

この報告では, cylinder homomorphism を用いての GHC への approach について述べる. Fano 完全交叉のいくつかの class に対して, 上の予想が正しいことが実際に確かめられる.

§2. Cylinder homomorphism.

X を非特異な n 次元射影多様体 $/\mathbb{C}$ とし, $\{S_u\}_{u \in F}$ を非特異射影多様体 F により parametrize された, X の k 次元

closed subschemes の algebraic family とする. 例えば F として, X の Chow variety のある component の resolution をとればよい. このような algebraic family に付随して cylinder homomorphism

$$\begin{aligned} \psi: H_{m-2k}(F, \mathbb{Z}) &\rightarrow H_m(X, \mathbb{Z}) \\ [r] &\mapsto \left[\bigcup_{u \in r} S_u \right] \end{aligned}$$

が定義される.

Lemma. (Steenbrink [9])

もし $\psi \otimes \otimes: H_{m-2k}(F, \mathbb{Q}) \rightarrow H_m(X, \mathbb{Q})$ が全射なら $H^{2n-m}(X)$ の Hodge level は $m-2k$ 以下であり, $GHC(X, 2n-m, n-m+k)$ が成立する.

証明. Lefschetz の定理により, 必要ならば F をその hyperplane section でとりかえることによって, $\dim F \leq m-2k$ であるとしてよい. $T = \bigcup_{u \in F} S_u$ とおけば $\dim T \leq m-k$ によって $\operatorname{codim} T \text{ in } X \geq n-m+k$. 一方, $\psi \otimes \otimes$ の全射性により $H_m(T) \rightarrow H_m(X)$ は全射. よって $H^m(X) \rightarrow H^m(X \setminus T)$ は zero map. $\square$

§1 の例にもじると、次の問題が解ければ、 $GHC(X, n, k)$ がたしかめられたことになる。

問題. n 次元 Fano 完全交叉 X で、 $H^n(X)$ が Hodge level $n-2k$ であるものに対し、 X 上の k 次元 closed subschemes の algebraic family で、付随する cylinder homomorphism が全射になるものを見つけること。

現在までに次のような結果が得られている。 n 次元完全交叉 X に対し、 $V_n(X, \mathbb{Z})$ により vanishing cycles の空間 $\ker(H_n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{P}^{n+d}, \mathbb{Z}))$ をあらわす。

Proposition 1. X を general な d 個の 2 次超曲面^{の完全交叉} とし、 $\dim X = n$, Hodge level of $H^n(X) = n-2k$ とする。 $k > 0$ と仮定する。このとき、 X 内に含まれる k 次元 $(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$ 次の完全交叉 (ただし 1 が $n+1-k$ 個, 2 が $d-1$ 個) の family に付随した cylinder homomorphism の image は $V_n(X, \mathbb{Z})$ を含む。

Corollary. X を non-singular n 次元 $(2, \dots, 2)$ 次の

完全交叉とし, $H^n(X)$ の Hodge level が $n-2k$ ($k>0$) であるとする. このとき $GHC(X, n, k)$ が成立.

Proposition. 2 次元 n , 次数 $(a_1, \dots, a_d)$ を固定したとき, general な完全交叉 X がその上にのっている k -planes でおおわれているとする. $\mathcal{L}_k(X)$ を the variety of k -planes on X とする. このとき cylinder homomorphism

$$\psi: H_{n-2k}(\mathcal{L}_k(X), \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z})$$

の image は $V_n(X, \mathbb{Z})$ を含む.

実は Proposition 2 の cylinder homomorphism については, より強い次のことがいえる.

Proposition. 3 Prop. 2 の状況において, $\psi \otimes \mathbb{Q}$ の kernel は, 自然な写像 $H_{n-2k+2\delta}(\text{Grass}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^{n+d}), \mathbb{Q}) \rightarrow H_{n-2k}(\mathcal{L}_k(X), \mathbb{Q})$ の image に含まれる. ここで $\delta = \text{codimension of } \mathcal{L}_k(X) \text{ in } \text{Grass}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^{n+d})$. 特に n が奇数なら, ψ は isomorphism modulo torsion になる.

Remark 1. Proposition 1 の statement は general な X に対してのものであるが, Corollary はすべての non-singular な X に対して成立することに注意. これは次の Lemma による. 証明は容易なので略.

Lemma. $\pi: \mathcal{X} \rightarrow S$ を既約な curve S 上の射影多様体の smooth な family とする. generic member X_η が codim p の subvariety $Y_\eta \subset X_\eta$ で,

$$H_m(Y_\eta, \mathbb{Q}) \rightarrow H_m(X_\eta, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{m, \text{prim}}(X_\eta, \mathbb{Q})$$

が全射となるものをもっているとする. このときに, 任意の closed point $\Delta \in S$ に対して, $X = \pi^{-1}(\Delta)$ は codim p の subvariety $Y_\Delta \subset X_\Delta$ で,

$$H_m(Y_\Delta, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{m, \text{prim}}(X_\Delta, \mathbb{Q})$$

が全射となるものをもつ.

Remark 2. 次数 $(a_1, \dots, a_d)$ と k を固定したとき, 次元 n を十分大きくすれば Proposition 2 の仮定はみたされる. しかし このとき一般には, $H^n(X)$ の Hodge level は $n - 2k$ よりもっと小さくなってしまふ.

Remark 3. Proposition 3 は, $k = 1$ で X が 3 次

元 3 次超曲面のときは, 有名な Clemens - Griffiths の定理 (cf. [4]) に他ならない.

Proposition 1, 2 は, 次のように述べる Theorem から, 簡単な dimension counting と infinitesimal calculation により導かれる. Proposition 3 は, 次の claim から Clemens - Letizia argument (cf. [7]) を用いて証明される.

Claim. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$ を, Proposition 2 における Fano 完全交叉を member とする general な Letschetz pencil とする. このとき general な $t \in \mathbb{P}^1$ に對しては, $L_k(X_t)$ は non-singular であり, 任意の $t \in \mathbb{P}^1$ について $L_k(X_t)$ の singular locus は, $L_k(X_t)$ の中で $\text{codim} \geq n - 2k$ である. $\text{codim} = n - 2k$ となるのは, X_t が node θ をもつ場合であり, このとき, $\text{codim } n - 2k$ の singular locus は $L_k(X_t, \theta) := \{ \mathbb{P}^k \subset L_k(X_t) \mid \theta \in \mathbb{P}^k \}$ と一致する. さらに $L_k(X_t, \theta)$ は non-singular, connected.

Clemens - Letizia の方法を簡単に説明する. $t = t_1, \dots, t_M$ のとき X_t が node $\mathcal{O}_t$ をもち, $t \in D^0 := \mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_M, t_{M+1}, \dots, t_{M+N}\}$ に対して $L_{\mathbb{R}}(X_t)$ は non-singular であるとする. $H_{n-2k}(L_{\mathbb{R}}(X_t))$ の中の vanishing cycles は $t = t_i$ ($i=1, \dots, M$) における singular locus $L_{\mathbb{R}}(X_{t_i}, \mathcal{O}_{t_i})$ に対応するものしかない. (つまり $t = t_{M+1}, \dots, t_{M+N}$ における local monodromy は trivial.) ψ の image は $V_n(X, \mathbb{Z})$ を含むから $t = t_i$ ($i=1, \dots, M$) における vanishing cycle は, ψ によって node $\mathcal{O}_{t_i} \in X_{t_i}$ に対応する vanishing cycle にうつされる. 特にその image は non-trivial. よって $\ker \psi \otimes \mathbb{Q}$ の元は, $\pi_1(D^0)$ の monodromy action に対して invariant. 一方, $\pi_1(D^0)$ の action に対する invariant cycles の space が, $H_{n-2k+2\delta}(\text{Grass}) \rightarrow H_{n-2k}(L_{\mathbb{R}}(X))$ の image であることが, d についての induction と, invariant cycle theorem を用いることにより証明される.

§3. Cylinder homomorphism の surjectivity について

この § では, 一般の cylinder homomorphism に対して

その全射性を与える簡単な十分条件について述べる. この結果は, §2 で述べた問題をより一般的にいろいろな X に対して考えていくときにも役立つであろうと考えている.

V を $n+1$ 次元非特異射影多様体, L と L' を V 上の very ample line bundles とする. $P = |L|$, $P' = |L'|$ を complete linear systems とし, $\mathcal{C} \subset P \times P'$ で complete intersections of members of $|L|$ and $|L'|$ のなす open subset をあらわす. $\{S_u\}_{u \in F}$ を V 上の k -dimensional subvarieties の algebraic family とする. V の subvariety W に対して

$$F(W) = \{u \in F \mid S_u \subset W\}$$

とおき, 対応する cylinder homomorphism を

$$\psi_{m,W} : H_{m-2k}(F(W), \mathbb{Z}) \rightarrow H_m(W, \mathbb{Z})$$

であらわす. 次のような記号を導入する.

$$\begin{aligned} V \times P &\ni x \rightarrow P && \text{the universal family of } P \\ V \times \mathcal{C} &\ni y \rightarrow \mathcal{C} && \text{the universal family of } \mathcal{C} \end{aligned}$$

$$F_P := \{ (X, u) \in \mathcal{P} \times F \mid S_u \subset X \}$$

$$F_e := \{ (Y, u) \in \mathcal{C} \times F \mid S_u \subset Y \}$$

$$\Omega_P := \{ (P, X, u) \in V \times \mathcal{P} \times F \mid P \in S_u \subset X \}$$

$$\Omega_e := \{ (P, Y, u) \in V \times \mathcal{C} \times F \mid P \in S_u \subset Y \}$$

このとき次のような可換図式が定まる.

$$\begin{array}{ccc} & \Omega_P & \\ \pi_P \swarrow & & \searrow A_P \\ F_P & & X \\ f_P \searrow & & \swarrow \\ & P & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \Omega_e & \\ \pi_e \swarrow & & \searrow A_e \\ F_e & & Y \\ f_e \searrow & & \swarrow \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

general な $X \in \mathcal{P}$ 及び $Y = X \cap H \in \mathcal{C}$ ($H \in \mathcal{P}'$)
に對して,

$$V_n(X, \mathbb{Z}) := \ker (H_n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(V, \mathbb{Z}))$$

$$V_{n-1}(Y, \mathbb{Z}) := \ker (H_{n-1}(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(X, \mathbb{Z}))$$

と定義する. $V_n(X, \mathbb{Z}) \neq 0$ なら, singular members
のなす locus $P_{\text{sing}} \subset P$ は, of codim 1 であ
り, P_{sing} の general な member は 高々 node
をもつにあむなり. 同様のことが Y 及び $\mathcal{C}_{\text{sing}}$

に対しても成立する。以下, $V_n(X, \mathbb{Z}) \neq 0$, $V_{n+1}(Y, \mathbb{Z}) \neq 0$ と仮定する。

Theorem n は偶数とする。

(1) general な singular member $X_0 \in P_{\text{sing}}$ with a node $\mathfrak{s}$ に対して, 次の諸条件を満たす $S_a \subset X_0$ が存在すると仮定する。

(a) $\mathfrak{s} \in S_a$ であり, S_a は $\mathfrak{s}$ で non-singular.

(b) F_p は (X_0, a) で non-singular

(c) f_p は (X_0, a) において locally surjective.

(d) $(\mathfrak{s}, X_0, a)$ において, $A_p^{-1}(\mathfrak{s}, X_0)$ は reduced non-singular, of dimension $\dim F(X_0) - \dim X_0 + 2k$.

このとき, general な $X \in P$ に対して $\psi_{n,X}$ の image は $V_n(X, \mathbb{Z})$ を含む。

(2) X_0 及び $\mathfrak{s}$ は上の通りとする。 $\mathfrak{s} \in H$ なる $H \in P'$ を general にとって, $Y_0 := X_0 \cap H$ とおく。このとき $S_a \subset Y_0$ で上の条件 (a), (b), (c), (d) をみたし $\mathfrak{s}$ に次の条件をみたすものが存在するとする。

(b') F_e は (Y_0, a) で non-singular

(c') f_e は (Y_0, a) において locally surjective

(d') $(\mathfrak{s}, Y_0, a)$ において, $A_e^{-1}(\mathfrak{s}, Y_0)$ は reduced

non-singular, of dimension $\dim F(Y_0) - \dim Y_0 + 2k$.
 このとき general な $Y \in \mathcal{C}$ に対して $\psi_{n-1, Y}$ の
 image は $V_{n-1}(Y, \mathbb{Z})$ を含む.

$k=1$ と $n=3$ の場合には Clemens [3] が同様の結果を
 おでに証明している. しかし [3] においては, Pring の
monodromy が, $X_0 \ni \theta$ の resolution の exceptional
 locus 上の 2つの rulings の上に non-trivial に作
 用するといった global な条件も仮定している. 又 [3]
 を用いた [1], [2], [5], [7] においても, nodal
 curve $F(X_0, \theta) = \{u \in F(X_0) \mid \theta \in S_u\}$ が
 irreducible であるといった global な条件を証明
 せねばならず, そのためにたとえば infinitesimal Abel-
 Jacobi map を用いて, ψ が non-trivial であるこ
 とを示さねばならない.

我々の定理は, 任意の次元 k 及び n (or $n-1$)
 に対して適用できるのみならず, 与えられた条件が (a, X_0, θ)
 における local なものであるという利点をもつ.

以下, 証明の outline を述べる. Step 1. X_0 (resp.
 Y_0) を含む general な pencil $\{X_t\}$ (resp. $\{Y_t\}$)

をとる. a において, $A_p^{-1}(X_0, \theta) \cong F(X_0, \theta) := \{u \in F(X_0) \mid \theta \in S_u\}$ (resp. $A_e^{-1}(Y_0, \theta) \cong F(Y_0, \theta)$) が $F(X_0)$ (resp. $F(Y_0)$) の中で $\text{codim } n-2k$ (resp. $(n-1)-2k$) の *quadratic singularity* になっていることを示す. ここで *quadratic singularity of codimension p* とは, $\{(z_0, \dots, z_n) \mid z_0^2 + \dots + z_p^2 = 0\}$ の *singular locus* $\{z_0 = \dots = z_p = 0\}$ と *local* に同型になっている *singularity* のことである.

従って $\varepsilon \neq 0$ を十分小さい数としたとき, $F(X_\varepsilon)$ (resp. $F(Y_\varepsilon)$) には $n-2k$ 次元 (resp. $(n-1)-2k$ 次元) の *vanishing cycle* $[\sigma_\varepsilon] \in H_{n-2k}(F(X_\varepsilon), \mathbb{Z})$ (resp. $[\lambda_\varepsilon] \in H_{n-1-2k}(F(Y_\varepsilon), \mathbb{Z})$) が存在する. $[\Sigma_\varepsilon] \in H_n(X_\varepsilon, \mathbb{Z})$ (resp. $[S_\varepsilon] \in H_{n-1}(Y_\varepsilon, \mathbb{Z})$) を *node* θ に対応する *vanishing cycle* とする.

cylinder homomorphism と *specialization* は可換だから $\psi_{n, X_\varepsilon}([\sigma_\varepsilon]) = m \cdot [\Sigma_\varepsilon]$ (resp. $\psi_{n-1, Y_\varepsilon}([\lambda_\varepsilon]) = m' \cdot [S_\varepsilon]$) となる $m, m' \in \mathbb{Z}$ が存在する. $m = m' = \pm 1$ を示せばよい. Step. 2 $\psi_{n, X_\varepsilon}([\sigma_\varepsilon]) \cdot [\Sigma_\varepsilon] = \pm 2$ を示す. $[\Sigma_\varepsilon] \cdot [\Sigma_\varepsilon] = \pm 2$ であるから $m = \pm 1$ がいえる. ここで n が偶数という仮定が使われる. Step. 3 $m = \pm m'$ を示す. そのために次のような *trick* を用

いる. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ を P, P' の pencils で,
 $0 \in X_0$, $0 \in H_0$, $0 \in X_0$ は node, H_0 は non-singular
 なものとする. これらの pencils を general にえらば
 0 近傍の V の局所座標系 $(z_0, \dots, z_n)$ で,

$$X_t = \{z_0^2 + \dots + z_n^2 = t\}$$

$$H_\lambda = \{h(z_0) = \lambda\} \quad h \text{ は一変数正則関数, } h'(0) \neq 0$$

となるものがとれる. $Y_{t,\lambda} = X_t \cap H_\lambda$ とおく. ε を
 positive real にとる. n -sphere

$$\Sigma_\varepsilon = \{z_0^2 + \dots + z_n^2 = \varepsilon, z_i \in \mathbb{R}\} \subset X_\varepsilon$$

が $[\Sigma_\varepsilon]$ を represent する. $Y_{\varepsilon h(\sqrt{\varepsilon})}$ 及び $Y_{\varepsilon h(-\sqrt{\varepsilon})}$
 は node 0_+ , 0_- をもつ. v を $-\sqrt{\varepsilon} < v < \sqrt{\varepsilon}$ なる
 実数とすると, $H_{h(v)}(Y_{\varepsilon h(v)})$ の中の, $0_\pm$ に対応
 する vanishing cycle は $(n-1)$ -sphere

$$S_v = \{z_0 = v, z_1^2 + \dots + z_n^2 = \varepsilon - v^2, z_i \in \mathbb{R}\}$$

によって represent される. $\Sigma_\varepsilon = \{0_+\} \cup \bigcup_v S_v \cup \{0_-\}$
 であることに注意. つまり, X_ε の vanishing cycle Σ_ε
 を slice することにより, $Y_{\varepsilon h(v)}$ の vanishing cycle
 が得られている. 同様の構成が, $H(X_\varepsilon)$ の vanishing

cycle $[\sigma_\varepsilon]$ に對してもできる. つまり, $[\sigma_\varepsilon]$ は $(n-2k)$ -sphere σ_ε によつて represent され, $F(Y_{\varepsilon, \mathbb{R}(0)})$ に含まれる $(n-2k-1)$ -sphere A_0 が存在して, $[A_0]$ が $F(Y_{\varepsilon, \mathbb{R}(\pm\sqrt{\varepsilon})})$ の singular locus に對する vanishing cycle となり, かつ

$$\sigma_\varepsilon = \{r_+\} \cup \cup A_0 \cup \{r_-\}$$

が成立する. ここで $r_\pm$ は $F(Y_{\varepsilon, \mathbb{R}(\pm\sqrt{\varepsilon})})$ の singular locus 上の点. この構成により,

$$\psi_{n-1, Y_{\varepsilon, \mathbb{R}(0)}}([A_0]) = m' \cdot [S_0] \Rightarrow \psi_{n, X_\varepsilon}([\sigma_\varepsilon]) = m' \cdot [\sigma_\varepsilon]$$

がわかる. これより $m = m'$ //

Remark. 上の議論においては

$$\text{im } \psi_{n, X} \supset V_n(X) \Rightarrow \text{im } \psi_{n-1, Y} \supset V_{n-1}(Y)$$

を示している. [8] においては, $\mathbb{Q}$ -係数 homology 群の vanishing cycle に對して, 同様の trick により

$$\text{im } \psi_{n-1, Y} \supset V_{n-1}(Y) \Rightarrow \text{im } \psi_{n, X} \supset V_n(X)$$

を示している. (ここでは n : 偶数 という仮定はしていない.)

References.

- [1] L.P.Botta, On the intersection of three quadrics, J. reine angew. Math., **399** (1989), 188-207.
- [2] G.Ceresa and A.Verra, The Abel-Jacobi isomorphism for the sextic double solid, Pacific J. Math., **124** (1986), 85-105.
- [3] C.H.Clemens, On the surjectivity of Abel-Jacobi mappings, Ann. of Math., **117** (1983), 71-76.
- [4] C.H.Clemens and P.A.Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math., **95** (1972), 281-356.
- [5] A.Collino, The Abel-Jacobi isomorphism for the cubic fivefold, Pacific J. Math., **122** (1986), 43-55.
- [6] A.Grothendieck, Hodge's general conjecture is false for trivial reasons, Topology, **8** (1969), 299-303.
- [7] M.Letizia, The Abel-Jacobi mapping for the quartic threefold, Invent. Math., **75** (1984), 477-492.
- [8] I.Shimada, On the cylinder homomorphisms of Fano complete intersections, J. Math. Soc. Japan, **42** (1990), 719-738.
- [9] J.H.M.Steenbrink, Some remarks about the Hodge conjecture, Lecture Notes in Math., **1246**, pp. 165-175, Springer, 1985.
- SGA 7II. Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Lecture Notes in Math., **340**, Springer, 1973.