

A. Connes の最近の結果

東北大医短大 洲之内長一郎

1975 年 7 月 28 日から 8 月 15 日まで Kingston でおこなわれた " Symposium on Ergodic Theory and Operator Algebras " は, A. Connes 及び W. Krieger の最近の仕事, 結果についての講演, そして「Groupoid」に関する講演が主なものであった。

この報告では, A. Connes の最近の仕事の概略を述べる。
詳細は, A. Connes: Classification of Injective factors.
(preprint) にある。

以下 M は type II_1 -factor とする。

J. T. Schwartz は M が hyperfinite であることより,
 M は Property P (i.e. $\forall x \in B(\mathcal{H}), \widetilde{co}^w \{uxu^*; u \in M_u\} \cap M' \neq \emptyset$)
をみたすことを示した。さらに Hakeda, Tomiyama によって
上の性質より Property E (i.e. $\exists$ projection of norm
one of $B(\mathcal{H})$ onto M) が導かれることを示した。

Arveson の仕事の後, C^* -tensor product の研究から,

Effros, Lance は Property E は Injectivity (i.e. $\forall B, B_1 : C^*\text{-algebra}, B \subset B_1, \forall \varphi : B \rightarrow A ; \text{morphism}, \exists \psi : B_1 \rightarrow A ; \text{morphism, which extend } \varphi$) と同値であることを示した。

Choi, Effros による injectivity と同値な次の条件は A. Connes の paper に使用される。

i.e. $\forall \sigma : \text{self-adjoint } n \times n\text{-matrix (その全体を } F_n \text{ とする),}$

$\forall S : \text{self-adjoint element of } M \otimes F_n ; b \otimes \sigma \leq S$

for some self-adjoint element b of $B(\mathcal{H})$,

$\exists x : \text{self-adjoint element of } M ; x \otimes \sigma \leq S.$

Effros, Lance はさらに C^* -tensor product の研究から, semi-discreteness の概念を導入した。

(M が semi-discrete であるとは, the identity map on M が simple weak* convergence topology で finite rank の normal morphisms で近似出来る時に言う。

これは, 次の2つの条件と同値である。

$$\textcircled{1} \quad \gamma : M \otimes M' \longrightarrow B(\mathcal{H}) ; \gamma(x \otimes y) = xy$$

が isometric である。

$$\textcircled{2} \quad C^*(M, M') \text{ が simple である。}$$

そして semi-discreteness から injectivity が出ることを示した。

A. Connes は実は 上の性質は全て equivalent であることを示した。

その過程は、まず次のことを示す。

$$C^*(M, M') \supset \{ \text{compact operators of } M \}$$

$\Leftrightarrow M$ は property Γ をみたさなり。

さらに、このことは、先に A. Connes によって $\text{Int } M$ が $\text{closed in Aut } M$ と同値であることが示されている。

次に $\text{Int } M$ の closure をしらべている。

$$\text{つまり, } \theta \in \overline{\text{Int } M} \Leftrightarrow \left\| \sum_{i=1}^n \theta(a_i) b_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right\|$$

for $\{a_i\}_{i=1}^n \subset M, \{b_i\}_{i=1}^n \subset M'$.

このことを使い、hyperfiniteness は S. Sakai による symmetry $\mathcal{G}_M$ (i.e. $\mathcal{G}_M \in \text{Aut}(M \otimes M); \mathcal{G}_M(x \otimes y) = y \otimes x$) が $\overline{\text{Int}(M \otimes M)}$ に入ることと同値であることを示すことによって話を進めている。

これらの議論, 結果から, hyperfinite II_∞ -factor は unique であること, all subfactors of the hyperfinite factor は又 hyperfinite であること, III₁ case を除いて, type III injective factor は Krieger's factor であること等の重要な結果を得ている。

(1975. 9. 30)