

応力分布をパラメータとする自由曲面構造の形状設計

中嶋 拓

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	先行研究	2
1.2.1	自由曲面シェルに関連する先行研究	2
1.2.2	図式力学やシェルの膜理論に基づく形状設計に関連する先行研究	3
1.2.3	圧縮と引張の混在するシェルの形状設計手法に関連する先行研究	5
1.2.4	離散微分幾何学と可展面の設計に関連する先行研究	5
1.3	本研究の目的と概要	6
1.4	本論文の構成	8
第 2 章	連続体シェル構造の釣合い方程式と偏微分方程式	11
2.1	連続体シェルの膜理論による釣合い方程式	11
2.1.1	直交座標系におけるシェルの釣合い方程式	12
2.1.2	曲線の境界形状をもつシェルの釣合い方程式への拡張	13
2.1.3	有限差分法による釣合い方程式の離散化	15
2.2	偏微分方程式	18
2.2.1	2 階線形偏微分方程式の分類と標準形	18
2.2.2	特性曲線	20
第 3 章	水平投影応力分布を設計パラメータとするシェルの形状設計	23
3.1	はじめに	23
3.2	釣合い方程式に基づくシェルの形状設計	24
3.2.1	シェルの釣合い方程式と設計パラメータとしての水平投影応力	24
3.2.2	有限差分法による離散化	25
3.2.3	シェルの釣合い方程式に基づく形状設計法のフロー	27
3.3	シェルの水平投影応力分布一様化のための形状補正手法	28
3.4	数値解析例	31
3.4.1	既往の手法との比較による提案手法の検証	31
3.4.2	せん断応力分布をパラメータ表示したシェルの曲面形状設計	34

3.4.3	自由境界を有するシェル曲面の設計への適用	35
3.4.4	せん断応力を設計パラメータとしたパラメトリックスタディ	37
3.4.5	有限要素解析による鉄筋コンクリートシェルとしての応力分布	41
3.4.6	シェルの水平投影応力分布一様化のための形状補正手法の検証	41
3.4.7	提案手法により得られた自由曲面シェルの力学的特性の分析	44
3.4.8	応力一様化手法の適用範囲についての考察	47
3.5	3 章の結論	48
第 4 章	圧縮引張混在型シェルの形状設計	51
4.1	はじめに	51
4.2	双曲型偏微分方程式と波動方程式	52
4.2.1	偏微分方程式の分類	52
4.2.2	波動方程式の初期値境界値問題	52
4.2.3	直交する 2 つの境界条件を指定した双曲型偏微分方程式の境界値問題	55
4.2.4	波動方程式の陽解法	56
4.2.5	境界値問題としてのシェルの形状設計	58
4.3	圧縮引張混在型シェルの形状設計	58
4.3.1	釣合い方程式の差分近似	58
4.3.2	解の不定性に対する正則化項の導入	60
4.3.3	解形状の平滑化のためのスムージング項の導入	60
4.3.4	荷重項をシェルの自重とする場合の解法	62
4.3.5	区分的に滑らかな圧縮引張混在型シェルの形状設計	62
4.4	数値例題	63
4.4.1	波動方程式の陽解法との比較による妥当性確認	63
4.4.2	解の存在と不定性についての検証	66
4.4.3	重ね合わせの原理についての検証	69
4.4.4	荷重項をシェルの自重とする場合の検討	70
4.4.5	区分的に滑らかな圧縮引張混在型シェル曲面の形状設計	71
4.5	4 章の結論	73
第 5 章	区分的可展面の形状設計	77
5.1	はじめに	77
5.2	シェルの釣合い方程式を利用した可展面の生成法	78
5.2.1	シェルの釣合い方程式と目標形状の導入	78
5.2.2	水平投影応力の主応力方向と曲面形状	79
5.2.3	可展面形状と形状生成における設計パラメータ	81
5.2.4	離散曲面のガウス曲率	82

5.2.5	最適化手法を用いた可展面の形状設計	84
5.3	可展面の展開図の作成	85
5.4	数値例題	86
5.4.1	一様な水平投影応力と一様な分布荷重による柱面の生成	87
5.4.2	荷重分布と曲面形状のパラメトリックスタディ	89
5.4.3	最適化手法を利用した区分的可展面の設計	91
5.4.4	可展面の展開図作成による可展性の検証	97
5.5	5 章の結論	99
第 6 章	結論	103
6.1	研究の成果	103
6.2	今後の展望	106
参考文献		109
付録 A	1 次元波動方程式の初期値境界値問題	116
発表論文リスト		119

図リスト

2.1	シェルの微小要素に作用する力の釣合い	13
2.2	有限差分法による離散化	16
3.1	水平投影応力におけるモールの応力円	25
3.2	$i = 1$ の境界上の格子点 (i, j) における偏導関数の導出	26
3.3	シェルの釣合い方程式に基づく形状設計法のフローチャート	27
3.4	形状補正における応力の誤差評価範囲の模式図	29
3.5	水平投影応力の指定値 $\sigma_x^{(l)}$, 目標値 σ_x^* と $\bar{\sigma}_x^{(l)}$ の関係	30
3.6	シェルの形状補正手法のフローチャート	30
3.7	モデル EL1, EL2: 平面形状	32
3.8	モデル EL1: 釣合い形状	33
3.9	モデル EL2: 釣合い形状	33
3.10	モデル EL2: 形状生成における各格子点での $h_{i,j}$ の変化の総和 ε の履歴	33
3.11	モデル EL3, EL4: 平面形状	34
3.12	モデル EL3: 水平投影応力分布	35
3.13	モデル EL3: 釣合い形状	35
3.14	モデル EL4: 水平投影応力分布	36
3.15	モデル EL4: 釣合い形状	37
3.16	モデル EL5, EL6: 平面形状	38
3.17	モデル EL5: 主応力方向と釣合い形状	39
3.18	モデル EL6: 主応力方向と釣合い形状	40
3.19	モデル EL1: 有限要素解析における水平投影応力分布	42
3.20	モデル EL2: 有限要素解析における水平投影応力分布	42
3.21	モデル EL1, 2: 有限要素解析における境界 $u = 0$ の水平投影応力分布	43
3.22	モデル EL2: 水平投影応力 σ_x に対するシェルの面内応力 s_x の比率の分布	43
3.23	モデル EL1 (収束解): 有限要素解析における水平投影応力分布	44
3.24	モデル EL2 (収束解): 有限要素解析における水平投影応力分布	44
3.25	モデル EL1, 2 (収束解): 有限要素解析における境界 $u = 0$ の水平投影応力分布	45
3.26	モデル EL2: パラメータ $\zeta_x^{(l)}$ の履歴	45

3.27	モデル EL2: 境界 $(u, v) = (0, 0.5)$ における無次元化した水平投影応力の履歴	45
3.28	モデル EL2 (収束解) : 面外曲げモーメント M_y の分布	46
3.29	モデル EL2 (収束解) : 有限要素解析におけるシェル断面の縁応力 σ_{bx} の分布 . . .	47
4.1	波動方程式における特性曲線	53
4.2	PDE-1, 2, 3 の解形状	57
4.3	シェルの平面投影領域と境界およびその外側の仮想節点	59
4.4	$i = 1$ の境界上の格子点 (i, j) における偏導関数の導出	59
4.5	各領域の境界形状の関係	63
4.6	モデル HY1~4 : 平面形状	64
4.7	モデル HY1: 解形状	65
4.8	モデル HY1: 解形状の特性曲線の向き	65
4.9	モデル HY2, 2a: 解形状	67
4.10	モデル HY2b, c: 解形状	67
4.11	モデル HY2d: 解形状 (不能)	68
4.12	モデル HY2d: 誤差の分布	68
4.13	モデル HY3: 解形状	70
4.14	モデル HY3: 解形状の特性曲線の向き	71
4.15	モデル HY4: 解形状	72
4.16	モデル HY5: シェルの平面領域	73
4.17	モデル HY5: 解形状	74
4.18	モデル HY5: 主応力方向と主曲率方向	74
5.1	可展面 (柱面, 錐面, 接線曲面)	78
5.2	水平投影応力におけるモールの応力円	80
5.3	主応力方向と柱面	81
5.4	三角形分割した離散曲面上の格子点 v における角度 $\theta_{v,i}$ とボロノイ領域 Ω_v	83
5.5	三角形メッシュの形状に応じた面積 A_v の定義	83
5.6	パラメータ t と設計変数 X_i による水平投影応力の定義	84
5.7	モデル DS1~6 : 平面形状	87
5.8	モデル DS1, 2, 3: 曲面形状 (直交投影)	89
5.9	モデル DS1, 2, 3: ガウス曲率分布	90
5.10	モデル DS1 と DS1a の導線形状の比較	90
5.11	モデル DS3a: 曲面形状 (直交投影), ガウス曲率分布	91
5.12	モデル DS3 におけるパラメトリックスタディ	91
5.13	モデル DS4, 5, 6: 適用荷重分布とパラメータ t の定義	92
5.14	モデル DS4, 5, 6: 曲面形状 (直交投影)	93

5.15	モデル DS4, 5, 6: ガウス曲率分布	94
5.16	モデル DS6: 分布荷重 $\bar{f}^S$ 分布	95
5.17	モデル DS4, 5, 6: 可展面の導線方向の最大主曲率の分布	97
5.18	モデル DS4, 5, 6: 可展面の母線方向分布	98
5.19	モデル DS4, 5, 6: 展開図を作成する領域と制約条件	99
5.20	モデル DS4, 5, 6: 展開図	100

表リスト

3.1	モデル EL5, 6: 主応力方向 α と, 各水平投影応力成分	38
3.2	モデル EL1, 2 (収束解): 有限要素解析における最大鉛直変位とひずみエネルギー	46
4.1	モデル HY1~4: 水平投影応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) と分布荷重 f	64
4.2	モデル HY2~2e: 釣合い方程式を離散化した線形連立方程式のパラメータ比較	69
4.3	モデル HY5: 各領域における水平投影応力	73
5.1	モデル DS1,2,3: 水平投影応力と荷重	88
5.2	モデル DS4, 5, 6 の水平投影応力と荷重	92
5.3	モデル DS4, 5, 6: 初期解と最適解の目的関数, 設計変数, 反復計算回数の比較	96
5.4	モデル DS4, 5, 6: 最適化の結果得られた展開図の誤差指標	99

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

スタジアムやドームのように、建築の大空間を覆う構造を空間構造という [1]. 空間構造には、コンクリートや組積造によるシェル構造、鉄骨部材や木材などの線材によるトラス構造、膜やケーブルを用いた張力構造など、様々な構造形式がある [2].

工学分野では一般に、薄肉の曲面の板をシェルと呼ぶ [3,4]. 空間構造の 1 つであるシェル構造は、構造体の形状を表す寸法のうち 1 方向の寸法（厚み）が他の寸法（スパンや曲率半径）に対して十分小さい曲面構造である [5,6]. シェルと同様に厚みが他の寸法に対して小さい構造として平板構造がある. 曲率を持たない平板構造が面に垂直な方向の外力に対して主に曲げ応力で抵抗するのに対して、シェル構造は曲率を有することで主に膜応力（面内力）で抵抗することができる. よって、シェルの構造体としての性能は、曲面形状（曲率）と板厚に依存する. 曲面形状の設計はシェル構造の構造計画において非常に重要な要素であり、設計者は無数の可能性の中から適切な曲面形状を選択する必要がある.

空間構造の曲面形状と力学的性能には強い相関があり、その形状設計手法は *form-finding* と呼ばれる [5]. 特に、引張力を負担することができないコンクリート造や組積造のシェル構造の設計において、主にシェル面内の圧縮力により外力に抵抗することのできる形状を設計することは重要である. シェルに生じる面外曲げモーメントを小さくすること、および膜応力を圧縮力のみとすることが求められる.

17 世紀の科学者 Robert Hook は、懸垂線がアーチ構造の合理的な形状として利用できることを指摘した [7]. 自重を受けて垂れ下がったケーブルの形状を反転させることで、アーチ構造の形状を設計する方法は、*form-finding* の最も単純な例といえる. より複雑な例として、Antoni Gaudí はグエル公園やサグラダ・ファミリアの設計において、鎖と錘からなる模型を建築の形状決定に利用した [8,9]. また Heinz Isler は、逆さ吊り模型を用いた実験に基づくコンクリートシェル構造の設計手法を提案した [10]. これらの実験に基づく設計手法で得られた形状のように、面外方向の変形に関する曲げモーメントとせん断力は考慮せずに、自重に対して軸方向力もしくは膜応力のみで抵抗する構造は *funicular structure* と呼ばれ、特にシェル構造については *membrane shell* [11] また

は funicular shell [12] と呼ばれる。

2000 年以降、数値計算技術の発展に伴い、模型や実験によらず数値解析によって曲面構造を形状設計する手法が多く提案されている [13]。また、図式力学 (graphic statics) に基づく数値計算によって funicular structure を設計する手法が提案されている [14]。形と力の双対関係を幾何学的に表現する図式力学を利用することで、応力を指定して形状を設計することが可能となる。

シェル構造の中でも円筒形や球形、円錐形のような古典的な形状ではない複雑な形状を有するものを自由曲面シェル構造 [2] という。自由曲面は古典的な曲面と比べて複雑な曲面形状を実現できることから、様々な空間構造やファサードデザインに利用されている [15]。一方で、複雑な形状は製作性・施工性において課題となるため、これらの合理化のために幾何学の理論を用いた曲面形状の合理化が求められる。離散微分幾何学は、なめらか (微分可能) な曲線や曲面を対象として空間や図形の性質を微分法を用いて表す微分幾何学に対して、ジオメトリの特徴量を微分法を用いることなく離散化された曲面 (離散曲面あるいは多面体曲面) によって表す数学の研究分野である。この離散微分幾何学の理論を利用することにより、曲面設計の自由度と製作・施工合理性を両立する設計手法が提案されている [16, 17]。

本論文は、シェルの膜応力の釣合い方程式に基づく曲面の形状設計について論じる。連続体シェルの応力と形状の関係を整理するとともに、荷重条件や境界条件が形状に与える影響を考察する。2 階の偏微分方程式として表される鉛直方向の釣合い方程式に着目し、パラメトリック曲面を用いた手法に比べて自由度の高い、応力分布をパラメータとする曲面構造の新たな設計手法を提案する。

1.2 先行研究

本節では、本研究で対象とする曲面構造の形状設計における既往の先行研究を引用し、既往の手法における課題を明確にする。

1.2.1 自由曲面シェルに関連する先行研究

力学的合理性に優れた自由曲面シェルの設計手法として、構造解析と最適化手法を組み合わせ、シェル構造の形状を設計変数として自重作用時の剛性の指標であるひずみエネルギーを最小化する手法が提案されている [18, 19]。藤田・大崎 [20] はパラメトリック曲面の代数的不変量を用いて、意匠性や施工性に関する制約の下で力学的合理性に優れたシェルを設計する手法を示した。曲面の代数的不変量に関する制約条件の下でシェルのひずみエネルギーを最小化することで、局所的及び大域的特性を指定した形状生成手法が提案されている。永田・本間 [21] は群知能による優良解探索手法を用いて、ベジエ曲面として定義した自由曲面シェルのひずみエネルギー最小化と重量最小化の多目的最適化問題を解くことで、シェル形状を設計する手法を提案した。

またシェル構造の設計において、剛性だけでなく、シェルに生じる応力が想定する材料に応じた許容値の範囲内であることも重要である。下田ら [22] は、シェルに生じる最大応力を最小化することで、自由曲面シェルに生じる応力を一様分布とする手法を提案した。大山・諸岡 [23] は球形シェ

ルを対象に、シェル厚さを変数として、シェルに生じる応力を一様化する手法を提案した。

力学的合理性に優れたシェル構造の形状設計において、外力に対して膜応力が卓越し、面外曲げモーメントの小さい形状とすることが望ましい。Gabriele ら [24] は、膜応力により外力に抵抗するシェル構造の設計のために、シェルに生じる膜応力と面外曲げモーメントに基づく R-Funicularity という指標を提案した。面外曲げモーメントの膜応力に対する比率に基づいて定義された R-Funicularity を小さくすることで、主として膜応力で外力に抵抗する形状が得られる。塩見・山本 [25] は、シェルのスラストに相当する外力と板厚を設計変数とし、有限要素解析を用いて釣合い条件を満たすシェルの水平投影応力分布を導出することで、膜応力の鉛直方向成分が自重と釣合うシェル形状を求める手法を提案した。塩見・山本 [26] は、シェルに生じる曲げモーメントを膜応力で除して得られる偏心距離を用いて曲面形状を修正することで、自重に対して膜応力のみで釣合うシェル形状を求める手法を提案した。この手法は有限要素解析を利用して釣合い条件を満たす応力分布を容易に得られるという利点を有する。また、打樋・山本 [27] は、シェルの面外曲げ応力によるひずみエネルギーの外力により生じるひずみエネルギーに対する比率を用いて、膜応力が卓越する形状を探索する方法を提案した。

これらの既往の手法は、外力に対して膜応力が卓越するシェル形状が得られ、応力の一様化や面外曲げモーメントの低減が可能であるが、シェル内部の応力分布を詳細に制御することは難しい。また、解析的に（数式によって）定式化することの難しい自由曲面シェル構造の形状は NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) 曲面 [28] などのパラメトリック曲面を用いて設計されることが多い。パラメトリック曲面は、制御点座標を設計変数とすることで少ない変数で形状を決定することができるという利点を有するが、一方でパラメトリック曲面による形状の定義は、シェル曲面の取りうる形状を限定することになる。

1.2.2 図式力学やシェルの膜理論に基づく形状設計に関連する先行研究

図式力学 (graphic statics) は、構造体の形状と力の釣合いを、構造部材の配置を表すダイアグラムと力の釣合いを表すダイアグラムの、2つの双対となるダイアグラムでグラフィカルに表現する手法である [29–31]。2000 年以降、3 次元コンピュータグラフィックス (3 Dimensional Computer Graphics, 3DCG) 技術の発展に伴い、図式力学に基づいて外力に対して軸力・膜応力のみで抵抗する構造を設計する手法が、多く提案されている [32–35]。例えば Lu ら [36] は、多面体を用いて 3 次元に拡張した図式力学により構造体の形状と生じる応力の双対関係を定式化し、線材からなる骨組構造の形状設計手法を示した。

連続体シェル構造についても、Thrust Network Analysis (TNA) により、図式力学を用いて、外力に対して膜応力のみで抵抗する形状と膜応力との関係を離散的な双対関係として表現する手法が提案されている [14, 37]。Panozzo ら [38] は、設計者の指定した初期形状をもとに、最適化手法と TNA を用いて膜応力で外力に抵抗する形状を生成する手法を提案した。しかし、TNA を連続体シェルに適用する際に形状をパラメトリックな形式で定義する必要がある。

曲面の高さを水平座標の関数として表すグラフ曲面としてシェルを定義したとき、シェルに生

じる膜応力の釣合いはその水平投影成分を用いて Pucher's formulation [39,40] により記述される。この定式化を利用して形状と応力の関係を双対関係として表現することで、力学的合理性に優れた membrane shell としての曲面形状を設計する手法が提案されている [41]。Miki ら [42] は、Airy の応力関数 [43,44] により水平投影応力を定義することで、自重作用時のシェル曲面形状を NURBS 曲面により設計する手法を提案した。この手法は、Airy の応力関数とシェル形状をともに NURBS 曲面で定義することで、応力関数の制御点座標を変数として非常に複雑な自由曲面シェル構造を生成できる。また、Xia ら [45] は、NURBS 曲面と isogeometric 解析 [46] を用いて、膜応力のみで自重に抵抗するシェルの設計手法を提案した。Chiang ら [47] は Airy の応力関数とシェル形状をともに放射基底関数 (radial basis function) [48] を用いて定義し、最小 2 乗法を用いて鉛直荷重・水平荷重に対して膜応力のみで抵抗するシェル形状を設計する手法を提案した。Chianese ら [49] は、Airy の応力関数とシェル形状をともに NURBS 曲面で定義してシェルの形状を生成する手法を用いて、最適化問題を解くことで境界部のスラストを低減する手法を提案した。

これらの応力関数を用いる手法は、シェル膜応力を応力関数のみで制御することができ、設計者は応力関数を変数としてそれと双対関係にあるシェル形状を設計することができる優れた手法である。しかし、これらの手法では曲面形状や応力関数の定義に NURBS 曲面を用いていることから、NURBS 基底関数の高階の導関数が必要であり、微分方程式を解析的に解くことが困難である。また、シェル曲面と応力関数をパラメトリック曲面でモデル化することは、シェル曲面の取りうる形状を限定することになる。

これに対し、パラメトリック曲面を用いない membrane shell の設計手法が提案されている。堺・大崎 [50] は、自重に対して指定した水平方向反力 (スラスト) で釣合うシェルの設計法を提案した。この手法は、シェルの境界部を介して支持構造に作用する水平方向反力を指定することができ、シェルの下部構造への影響を制御できる。Olivieri ら [51] は鉛直方向の釣合い方程式において水平投影応力に圧縮力を指定することで、外力に対して圧縮力のみが生じるシェル構造の形状設計手法を提案した。また、Takeoka ら [52] は文献 [50] の手法の対象を曲線の境界形状をもつシェルに拡張して指定水平投影応力で釣合う形状を生成するとともに、有限要素解析によって変形を考慮した時の水平投影応力分布を検証している。しかし Takeoka ら [52] の手法は、シェルの面外曲げ変形やポアソン比による横ひずみ等の弾性変形により、水平投影応力はとくに境界付近で指定値と一致しない。そのため、指定水平投影応力分布を得るために境界に強制変位を与える必要がある。

図式力学や Pucher's formulation に基づく設計手法の多くは形状と応力の双対関係を利用するが、このとき構造の材料の特性に基づくひずみや変形の影響は考慮しない。よって得られた形状に材料特性を与えて有限要素解析を行うと形状生成で想定した応力分布と厳密に一致しない。しかし、その差異が構造の力学性能に及ぼす影響が小さいと判断できる場合や、基本設計段階 (詳細な部材断面設計を行う前段階) における形状決定手法として有効な設計手法であるといえる。

1.2.3 圧縮と引張の混在するシェルの形状設計手法に関連する先行研究

鉄筋コンクリート造や組積造のシェル構造は、主にシェル面内の圧縮力により外力に抵抗する構造であり、一般に引張力が生じない形状が合理的とされる [18,53]。しかし、シェル面内に引張力が生じない、という非常に強い制約条件の下で実現できる形状は限定的である。一方で、鉄鋼などの金属系材料や CLT などの木質材料など、引張応力に対して抵抗可能な材料を用いることで、圧縮と引張の混在を許容したより多様なシェル形状の設計が可能となる。Miki ら [54] は圧縮と引張の混在するシェルの実施例として、Félix Candela が設計した双曲放物面シェルによるソチミルコのレストラン (Los Manantiales shell in Xochimilco, Mexico City) [55] を挙げている。

水平投影応力を指定したとき、膜応力のみで外力と釣合うシェル構造の鉛直方向の釣合い方程式は、シェルの鉛直方向座標に関する 2 階の偏微分方程式 (partial differential equation, PDE) として記述される [11]。2 階の偏微分方程式は、各偏導関数の係数の値に応じて、楕円型、放物型、双曲型に分類される。シェルの水平投影応力について圧縮力と引張力が混在するとき、鉛直方向の釣合い方程式は双曲型となる。双曲型の釣合い方程式について、境界条件が適切に設定されないとき解の存在が必ずしも保証されないことが指摘されている [56]。

Miki and Mitchell [54] は、釣合い方程式が双曲型となるシェルについて応力関数とシェル形状をとともに変数として解形状を得る方法を提案した。応力関数とシェル形状のうち一方を固定し他方を変数として釣合い方程式を最小二乗法により交互に解いて、応力関数と解形状の組合せを求めることができ、指定した境界条件を満足する解形状が必ず得られる。また、Miki and Mitchell [57] はこの手法を拡張し、得られる解形状の主応力方向と主曲率方向をそろえることで製作性に配慮したグリッドシェルの設計手法を提案した。ただしこれらの手法は、応力と形状がともに変数となるため、設計者が応力分布を指定することができない。

また、自重に対して指定した水平投影応力で釣合う自由曲面シェルの設計設計法 [50,52] では、膜応力で外力と釣合うことができる形状が存在するような境界形状の指定方法について、十分に議論されていない。

1.2.4 離散微分幾何学と可展面の設計に関連する先行研究

自由曲面は形状が複雑であることから、例えば鉄筋コンクリート造のシェル構造であれば型枠や鉄筋の、ガラスファサードであれば支持構造やガラス板材の製作・加工が困難となる。この課題に対し、曲面形状に制約を設けることで資材の製作・加工を容易にするための設計手法が提案されている。西森ら [58] は自由曲面グリッドシェル構造に対して部材長一様化と接合角一律化を力学的合理性とともに考慮した設計法を提案した。Mesnil ら [59] は marionette mesh による平面要素で構成される曲面を用いて、施工性を考慮した自由曲面シェル構造を設計する手法を提案した。藤田・大崎 [20] は曲面の代数的不変量に関する制約条件の下でシェルのひずみエネルギーを最小化する手法を示した。Cui ら [60] は、可展性に加えてグリッドを構成する板材の向きを制約条件として与

えてグリッドシェルのひずみエネルギーを最小化することで構造形態を生成する手法を提案した。これらの手法のように、曲面を平板やねじれない直線材の組合せに近似することで、製作性・施工性を改善することが可能となる。

製作性・施工性に配慮した曲面構造の設計手法として、可展面を利用した設計手法が多く提案されている [61, 62]。可展面は平面から面内変形を与えることなく曲げ変形のみによって生成できる曲面として定義され、ガウス曲率が曲面のいたるところで 0 であるという特徴を有する。可展面は平面に展開可能な曲面であるため、例えばコンクリートシェルに可展面を用いることで型枠の作成が容易になるなど、建築の形状設計において可展面を採用することは製作・施工におけるメリットを生む。

可展面には柱面、錐面と接線曲面があるが、1 つの可展面で実現できる形状は可展性を考慮しない場合と比べて限定される。一方、建築の空間を覆う曲面屋根構造やファサードでは、区分的に滑らかな曲面が用いられることが多いため、複数の可展面が接続された「区分的可展面」として設計することで、建築意匠に求められる多様な曲面が生成可能となる。Cui and Ohsaki [63] は n 次 $\times$ 1 次のベジェ曲面を接続した区分的可展面の生成手法を提案した。しかしこの方法では一部の境界が直線である必要があり、またパラメトリック曲面を用いているため、曲面の取りうる形状が基底関数の次数により限定される。

2000 年以降、プロダクトデザインや 3DCG の分野で、離散微分幾何学 [64] を曲面形状生成に適用する研究が活発に行われている [65, 66]。ガウス曲率や平均曲率などの幾何学的不変量についても、離散曲面上の定義が提案されている [67, 68]。離散微分幾何学を曲面の設計に利用することで、曲面形状の生成や構造解析において同じ離散モデルを用いることができ、高階の導関数を用いることなく差分や離散曲面での定義を用いて曲面の特性量を評価できる [69]。

区分的可展面の設計においても、離散微分幾何学を利用したさまざまな方法が提案されている [70, 71]。しかし、目標とする曲面形状や展開図をあらかじめ定義せずに可展面を生成する場合、離散曲面の頂点でのガウス曲率の定義を単純に用いて頂点座標を最適化すると、平面が波打つ corrugated surface が生じる可能性がある [72]。一方、離散ガウス写像を用いて可展条件を定義すると、内部境界（区分的可展面において可展面が接続される曲線）をあらかじめ指定する必要がなく、corrugated surface が生じる可能性も軽減されるが、滑らかでない曲面も許容されるため、収束性が悪い [73]。滑らかな区分的可展面を生成する手法として局所ガウス写像の面積を用いる手法が提案されているが、母線がグリッドに依存するため錐面や接線曲面の生成は難しく、また各グリッド位置の高さが最適化の設計変数となるため多くの計算量を必要とする [71, 74]。

1.3 本研究の目的と概要

本研究の目的は、連続体シェルの釣合い方程式に基づき、応力分布をパラメータとする自由曲面構造の設計手法を提案することである。応力と形状の関係を整理し、荷重条件や境界条件が形状に与える影響を考察することで、曲面構造の新たな設計手法を提案する。シェル曲面そのものをパラメトリック曲面で定義せず、応力分布をパラメータとすることで、シェル曲面の取りうる形状を限

定しない形状設計手法を提案する。

本論文では、前節で示した既往の研究における課題に対して、応力分布をパラメータとする次の3つの曲面設計手法を提案する。

水平投影応力分布を設計パラメータとするシェルの形状設計

連続体シェル曲面の水平投影応力を指定し、膜応力の鉛直方向の釣合い式に基づきシェル構造の形状を設計する手法を提案する。提案手法は、有限差分法で離散化した釣合い方程式を線形連立方程式として解くことで、既往の研究に比べて小さな計算コストで自由曲面シェル構造を設計することが可能となる。

さらに、一様な水平投影応力分布の場合を対象として、生成したシェル形状を対象として弾性変形を考慮した有限要素解析を行い、得られた水平投影応力と形状設計の際に指定した水平投影応力の誤差を反復計算により補正する手法を提案する。これにより材料特性と変形を考慮した場合にもシェル境界部分の水平投影応力（水平方向反力）を指定できる。

圧縮引張混在型シェルの形状設計

外力に対して圧縮と引張が混在する膜応力で釣合することができるシェル構造の設計手法を提案する。提案手法により圧縮力のみが生じるシェルよりも多様な形状の生成が可能となる。また設計者は形状設計において水平投影応力を直接指定することができる。

まず、波動方程式の初期値境界値問題を参照することで、圧縮引張混在型シェルの形状を生成するための境界形状の指定方法について考察する。提案手法では、有限差分法で離散化した釣合い方程式について、解の存在や不定性について判定するための指標を提示する。解が不定となる場合に安定的に解形状を得るため、および得られる形状を滑らかな形状とするために、正則化手法とスムージング項を導入する。さらに、解形状が特定の方向に伝播する双曲型偏微分方程式の特徴を用いて、複数の領域からなるシェル曲面形状を接続する、区分的に滑らかなシェルの形状設計手法を提案する。

区分的可展面の形状設計

可展面の設計に関する既往研究において、頂点座標を変数とし離散曲面の頂点でのガウス曲率の定義を用いて可展性を評価する手法では、平面が波打つ corrugated surface が生じるという課題がある。また滑らかな区分的可展面を生成する手法として局所ガウス写像の面積を用いる手法が提案されているが、母線がグリッドに依存するため錐面や接線曲面の生成は難しく、また各グリッド位置の高さが最適化の設計変数となるため多くの計算量を必要とする。

これらの課題を解決することを目的として、水平投影応力の主応力と仮想の荷重の分布を設計パラメータとした区分的可展面を生成する手法を提案する。シェルの釣合い方程式を可展面の設計に利用することで、少ない設計変数で多様な可展面形状の生成を可能とし、かつ corrugated surface の生じない手法を提案する。

1.4 本論文の構成

本論文は、全 6 章より構成されている。各章の詳細は以下のとおりである。なお本論文は、著者および共著者による複数の発表論文をまとめたものであり、各章の内容を発表した論文を各項目の末尾に示す。

第 2 章

第 2 章では本研究の理論準備として、まず、グラフ曲面として定義した連続体シェル曲面の釣合い方程式について示す。Pucher's formulation に基づくシェルの釣合い方程式を導出し、鉛直方向の釣合い方程式が 2 階線形偏微分方程式として表されることを示す。また釣合い方程式の有限差分法による離散化について示す。

次に、2 階線形偏微分方程式を対象としてその理論の概要を示す。2 階線形偏微分方程式は各偏導関数の係数に応じて 3 つの型（楕円型・放物型・双曲型）に分類される。本章では、偏微分方程式の分類について示すとともに、双曲型の 2 階線形偏微分方程式の特徴の 1 つである特性曲線について述べる。

第 3 章

第 3 章では、水平投影応力を設計パラメータとして自由曲面シェルの形状を設計する方法を提案する。膜応力の鉛直方向の釣合い式を差分法で離散化して、線形連立方程式を繰り返し解く方法によりシェルの形状を得る。提案手法で生成したシェル形状を対象として、鉄筋コンクリートとしての材料特性を与えて面外曲げ変形および境界条件を考慮した有限要素解析を行う。得られた水平投影応力と、形状設計で指定した設計パラメータとしての水平投影応力の差について検証するとともに、指定応力との差を反復計算により補正することで、変形を考慮した場合にも水平投影応力を一様化する手法を提案する。

- 中嶋 拓, 大崎 純: 指定水平投影応力分布を有する自由曲面シェルの形状設計, 日本建築学会構造系論文集, Vol.88, No.808, pp.945–953, 2023.

第 4 章

第 4 章では、外力に対して圧縮と引張が混在する膜応力で釣合う自由曲面シェルを対象とする。圧縮と引張が混在するとき、連続体シェル曲面の鉛直方向の釣合い方程式は双曲型となる。本章ではまず、外力に対して圧縮と引張が混在する膜応力で釣合う形状を得るための境界条件の指定方法について、波動方程式の初期値境界値問題を参照することで考察する。次に、有限差分法で離散化したシェルの釣合い方程式を、線形連立方程式として解くことで釣合い形状を求める手法を提案する。提案手法では線形連立方程式の係数行列を用いて解の存在や不定性について判定する。解が不定となる場合にも安定的に解形状を得るため、正則化手法を導入する。また滑らかな曲面形状を得

るためにスムージング項を導入する．さらに双曲型偏微分方程式の，特性曲線の方向に沿って形状の影響が伝播する特徴を用いて，複数の領域からなるシェル曲面形状を接続することで，区分的に滑らかな圧縮引張混在型シェルの形状設計手法を提案する．

- 中嶋 拓, 大崎 純, 三木 優彰: 圧縮と引張が混在する自由曲面シェルの双曲型釣合い方程式に基づく形状設計, 日本建築学会構造系論文集, Vol.90, No.831, pp.568–578, 2025.

第 5 章

第 5 章では，連続体シェルの釣合い式に基づく形状設計法を応用し，水平投影応力の主応力と仮想の荷重の分布を設計パラメータとして，区分的可展面を設計する手法を提案する．釣合い方程式における水平投影応力分布もしくは荷重分布を変数として，可展面が生成される応力分布や仮想の荷重分布を与えることで，数個の少ない変数で曲面の全ての内部格子点でガウス曲率が 0 となる曲面を生成する．微分方程式に基づき曲面を生成することで，滑らかな可展面を生成する．さらに，得られた可展面の精度を，曲面の展開図を生成することで確認する．

- 中嶋 拓, 大崎 純: シェルの釣合い方程式を用いた区分的可展面の形状生成法, 日本建築学会構造系論文集, Vol.89, No.822, pp.897–907, 2024.

第 6 章

第 6 章では，前章までに得られた知見をまとめ，本研究を総括する結論を述べる．

第 2 章

連続体シェル構造の釣合い方程式と偏微分方程式

本章では，応力分布を変数とする自由曲面構造の形状設計手法において基盤となる，連続体シェルの釣合い方程式に関する理論と，偏微分方程式に関する理論の概要を示す．

2.1 連続体シェルの膜理論による釣合い方程式

シェル構造は，構造体の形状を表す寸法のうち 1 方向の寸法（厚み）が他の寸法（スパンや曲率半径）に対して十分小さい構造である．薄肉シェルの弾性理論は 20 世紀初めに著しい発展を遂げ，その後のコンクリートシェルの実現に大きな役割を果たした [75]．当時，Kirchhoff-Love の仮定を導入した面外せん断変形を考慮しない微小変位弾性理論 [4] が展開された．文献 [40, 44] にはこの仮定に基づいて導出された，様々な形態のシェルに対する応力やひずみに関する理論解が示されている．

シェルは曲率を有することから，面に垂直な方向の外力に対して膜応力（面内力）で抵抗することができる．シェルの膜理論 (membrane theory) は，シェルの面外方向の変形に関する曲げモーメントが十分小さいと仮定して，膜応力を扱う近似理論である [40]．本研究ではシェルの膜理論に基づき，面外方向の変形に関する曲げモーメントとせん断力は考慮せず，膜応力によって自重に抵抗するシェルを対象とする．このようなシェルは，membrane shell [11] または funicular shell [12] と呼ばれる．

本節では，シェルの膜理論に基づく釣合い方程式の導出について説明する．また，偏微分方程式として表される釣合い方程式について，有限差分法 (finite difference method, FDM) を用いた差分近似について示す．

2.1.1 直交座標系におけるシェルの釣合い方程式

直交座標系である xyz 座標系において, x, y 方向を水平方向, z 方向を鉛直方向とする. 曲面の高さ h が x, y の関数 $h(x, y)$ で表されるグラフ曲面のシェルを考える. ここでは, シェルの膜理論を用い, 面外方向の変形に関する曲げモーメントとせん断力は考慮しない. シェルを xz 平面と yz 平面にそれぞれ平行な平面で切断した微小要素を考える. 微小要素に作用する応力を図 2.1 に示す. Pucher's formulation [39, 40] に基づき, シェルの面内応力と外力の釣合いを, それらの水平面への投影成分を用いて示す. このような表現は Monge's description とも呼ばれる [76]. 以下では, シェル断面の単位長さあたりの断面力を簡単のため応力とよぶ. また本研究では, シェルに作用する荷重として鉛直荷重のみを対象とする.

yz 平面と xz 平面にそれぞれ平行な曲面の切断面での垂直応力を s_x, s_y とし, yz 平面と xz 平面にそれぞれ平行なせん断応力を t_{xy}, t_{yx} とする. ここで, s_x と s_y はシェルの接平面内の力である. $s_x, s_y, t_{xy} (= t_{yx})$ のベクトルを xy 平面に投影し, 水平面単位長さあたりの力に換算した断面力を, それぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} (= \tau_{yx})$ とし, 水平投影応力とよぶ. 水平投影応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ はそれぞれ x, y の関数 $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ として定義する.

シェル曲面を xz 平面と yz 平面にそれぞれ平行な面で切断したときに得られる曲線と, 水平面 (xy 平面) とのなす角を ϕ_x, ϕ_y とする. $s_x, s_y, t_{xy} (= t_{yx})$ と $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} (= \tau_{yx})$ は, 次式のような関係を満たす.

$$\sigma_x = s_x \frac{\cos \phi_x}{\cos \phi_y}, \quad \sigma_y = s_y \frac{\cos \phi_y}{\cos \phi_x}, \quad \tau_{xy} = t_{xy} \quad (2.1)$$

h と ϕ_x, ϕ_y の関係は次のように書ける.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \tan \phi_x, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \tan \phi_y \quad (2.2)$$

鉛直荷重のみが作用するとき, シェルの水平方向の釣合い方程式は次式で表される.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

また, 鉛直方向の釣合い方程式は 2 階の偏微分方程式として次のように書ける.

$$\sigma_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f \quad (2.4)$$

ここで, f は鉛直方向下向き (z 軸の負の方向) のシェルの単位水平投影面あたりの分布荷重である. f をシェルの自重とする場合, 材料密度 ρ , 重力加速度 g , 板厚 t を用いて, 曲面の勾配の関数として次式で表される.

$$f = \rho g t \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2} \quad (2.5)$$

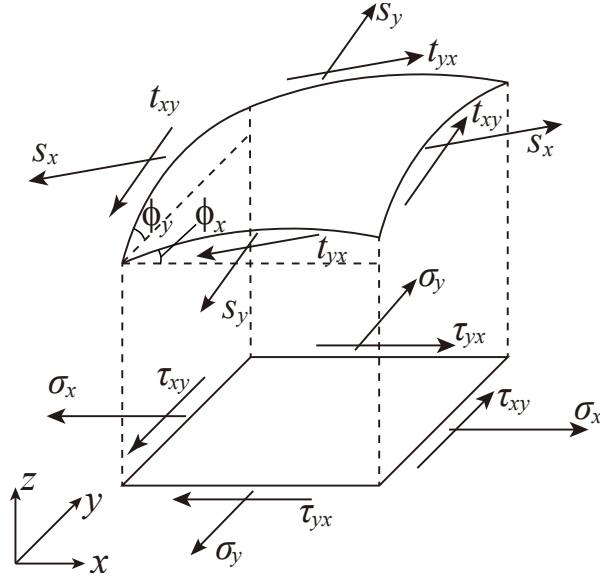


図 2.1: シェルの微小要素に作用する力の釣合い

式 (2.4) について，鉛直荷重 f と水平投影応力 σ_x , σ_y , τ_{xy} が与えられたとき，シェル曲面の高さ h について偏微分方程式を解くことでシェルの曲面形状が得られる．

水平投影応力は応力関数 $\Phi(x, y)$ を用いて次のように書ける．

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

この応力関数 $\Phi(x, y)$ を Airy の応力関数 [43, 44] という．応力関数はシェル膜応力を応力関数のみで制御することができるが，設計者が各応力成分の値を直接指定することができない．本研究では応力関数は用いず，水平投影応力 σ_x , σ_y , τ_{xy} を設計パラメータとして用いる．

2.1.2 曲線の境界形状をもつシェルの釣合い方程式への拡張

ここでは，Takeoka ら [52] の手法を導入し，グラフ曲面の平面座標をパラメータ表示することで，曲線の水平投影境界形状をもつシェルに拡張する．

まず，グラフ曲面の x , y 座標をパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ の関数として $x(u, v)$, $y(u, v)$ と表す． u , v の x , y に関する偏導関数を $u_x = \partial u / \partial x$, $v_x = \partial v / \partial x$, $u_y = \partial u / \partial y$, $v_y = \partial v / \partial y$ とする．これらは，以下に示すヤコビ行列 $\mathbf{J}$ の逆行列 $\mathbf{J}^{-1}$ の成分である．

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

合成関数の連鎖律 (chain rule) により， x , y に関する 1 次と 2 次の偏導関数は，それぞれ u , v お

よび u_x, v_x, u_y, v_y を用いて以下のように表すことができる.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = u_x \frac{\partial h}{\partial u} + v_x \frac{\partial h}{\partial v} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = u_y \frac{\partial h}{\partial u} + v_y \frac{\partial h}{\partial v} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial v} + u_x \left(u_x \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + v_x \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \right) + v_x \left(u_x \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + v_x \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \\ &= \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial u} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial u} + \left(u_x \frac{\partial v_x}{\partial u} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial v} + u_x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + 2u_x v_x \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + v_x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial v} + u_y \left(u_y \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + v_y \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \right) + v_y \left(u_y \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + v_y \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \\ &= \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial u} + v_y \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial u} + \left(u_y \frac{\partial v_y}{\partial u} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial v} + u_y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + 2u_y v_y \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + v_y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial v} + u_y \left(u_x \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + v_x \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \right) + v_y \left(u_x \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + v_x \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \\ &= \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial u} + v_x \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial u} + \left(u_x \frac{\partial v_y}{\partial u} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial v} \\ &\quad + u_x u_y \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + (u_x v_y + v_x u_y) \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + v_x v_y \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

よって、式 (2.4) は、 u_x, v_x, u_y, v_y と u, v を用いて次のように書ける.

$$\begin{aligned} &\left(u_x^2 \sigma_x + 2u_x u_y \tau_{xy} + u_y^2 \sigma_y \right) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \\ &+ 2 \left[u_x v_x \sigma_x + (u_x v_y + v_x u_y) \tau_{xy} + u_y v_y \sigma_y \right] \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \\ &+ \left(v_x^2 \sigma_x + 2v_x v_y \tau_{xy} + v_y^2 \sigma_y \right) \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ &+ \left[\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial u} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial u} + v_x \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial u} + v_y \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{\partial h}{\partial u} \\ &+ \left[\left(u_x \frac{\partial v_x}{\partial u} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(u_x \frac{\partial v_y}{\partial u} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(u_y \frac{\partial v_y}{\partial u} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{\partial h}{\partial v} = f \end{aligned} \quad (2.13)$$

u_x, v_x, u_y, v_y の u, v に関する偏導関数はそれぞれ次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial u} & \frac{\partial u_y}{\partial u} \\ \frac{\partial v_x}{\partial u} & \frac{\partial v_y}{\partial u} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial v} & \frac{\partial u_y}{\partial v} \\ \frac{\partial v_x}{\partial v} & \frac{\partial v_y}{\partial v} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

2.1.3 有限差分法による釣合い方程式の離散化

有限差分法は微分方程式を解くための数値解法の1つである [77]。解析対象領域を格子状に分割し、微分方程式における導関数を格子点での差分商で近似して解く。一般に有限差分法は、有限要素法や境界要素法に比べて、近似式を記述するのが容易であることや計算負荷が小さいことなどの利点がある。

グラフ曲面で定義したシェルの釣合い方程式は、偏微分方程式として表される。本研究では、偏微分方程式として表される鉛直方向の釣合い方程式を有限差分法によって近似することで、シェル曲面の鉛直方向の座標に関する線形連立方程式として表し、これを解くことで曲面形状を得る。ここでは、差分近似による釣合い方程式の離散化の詳細について述べる。

有限差分法

曲面の高さ h が x, y の関数 $h(x, y)$ で表されるグラフ曲面のシェルについて、シェルの xy 平面における定義域を、 x, y 方向にそれぞれ $N \times N$ 分割した格子点 (i, j) ($i, j = 1, \dots, N+1$) を考える。格子点の x, y 方向の間隔をそれぞれ $\delta x, \delta y$ とする。このように定義した差分法によるグリッドを図 2.2 に示す。

格子点 (i, j) における x に対する偏導関数は、

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \delta x, y) - h(x, y)}{\delta x} \quad (2.16)$$

として定義される。 $|\delta x|$ が十分小さいとき、

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \approx \frac{h(x + \delta x, y) - h(x, y)}{\delta x} \quad (2.17)$$

と近似できる。導関数をこのように近似するとき、式 (2.17) の右辺の分子を差分、右辺を差分商と呼ぶ。また式 (2.17) による近似は 1 階前進差分近似と呼ばれる。同様に、

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \approx \frac{h(x, y) - h(x - \delta x, y)}{\delta x} \quad (2.18)$$

を 1 階後退差分近似という。1 階前進差分近似、1 階後退差分近似の誤差の大きさは $O(h)$ であることが知られている [78]。

式 (2.17), (2.18) の両辺を足して 2 で割ると、次式を得る。

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \approx \frac{h(x + \delta x, y) - h(x - \delta x, y)}{2\delta x} \quad (2.19)$$

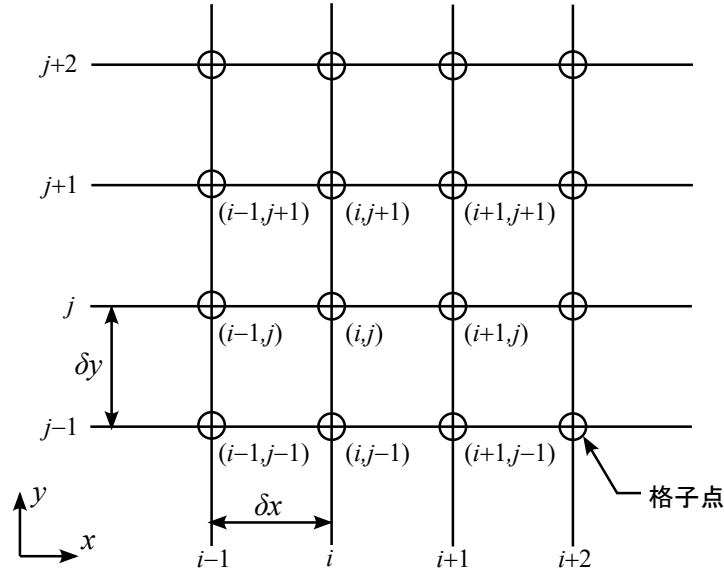


図 2.2: 有限差分法による離散化

これを 1 階中心差分近似という．1 階中心差分近似の誤差の大きさは $O(h^2)$ になるため，前進差分近似，後退差分近似に比べて誤差が小さい．また，2 階中心差分近似は次のように書ける．

$$\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{h(x + \delta x, y) - 2h(x, y) + h(x - \delta x, y)}{2\delta x} \quad (2.20)$$

この近似の誤差も $O(h^2)$ である．

直交座標系における矩形平面形状のシェルの釣合い方程式の差分近似

次に，有限差分法を用いて直交座標系における矩形平面形状のシェルの釣合い方程式を近似する．格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ とする．変数 h の x, y に関する偏導関数は，有限差分法により離散化された格子点の座標を用いて，中心差分近似により次のように計算できる．

$$\frac{\partial h}{\partial x} := \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta x} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} := \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta y} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} := \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} := \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta y)^2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} := \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j-1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta x \delta y} \quad (2.25)$$

以上の差分近似により，鉛直方向の釣合い式 (2.4) は中央差分を用いて次のように書ける [50].

$$\begin{aligned} \sigma_x \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta x)^2} + 2\tau_{xy} \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i+1,j-1} - h_{i-1,j+1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta x \delta y} \\ + \sigma_y \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta y)^2} = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.26)$$

式 (2.26) の右辺は次のように書ける．

$$f_{i,j} = \rho g t \sqrt{1 + \left(\frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta x} \right)^2 + \left(\frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta y} \right)^2} \quad (2.27)$$

曲線の境界形状をもつシェルの釣合い方程式の差分近似

曲線の水平投影境界形状をもつシェルを対象とするため，パラメータ u , v の平面を u , v 方向にそれぞれ $N \times N$ 分割した格子点 (i, j) ($i, j = 1, \dots, N+1$) を考える．格子点の u , v 方向の間隔をそれぞれ δu , δv とすると， $\delta u = \delta v = 1/N$ である．格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ とする．変数 h のパラメータ u , v に関する偏導関数は，中心差分を用いると，次のように計算できる．

$$\frac{\partial h}{\partial u} := \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta u} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} := \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta v} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} := \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta u)^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} := \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta v)^2} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} := \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j-1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta u \delta v} \quad (2.32)$$

式 (2.3) を満たす水平投影応力 σ_x , σ_y , τ_{xy} をパラメータとして，式 (2.13) は，差分を用いて次

のように表される.

$$\begin{aligned}
& \left(u_x^2 \sigma_x + 2u_x u_y \tau_{xy} + u_y^2 \sigma_y \right) \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta u)^2} \\
& + 2 \left[u_x v_x \sigma_x + (u_x v_y + v_x u_y) \tau_{xy} + u_y v_y \sigma_y \right] \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i+1,j-1} - h_{i-1,j+1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta u \delta v} \\
& + \left(v_x^2 \sigma_x + 2v_x v_y \tau_{xy} + v_y^2 \sigma_y \right) \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta v)^2} \\
& + \left[\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial u} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial u} + v_x \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial u} + v_y \frac{\partial u_y}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta u} \\
& + \left[\left(u_x \frac{\partial v_x}{\partial u} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(u_x \frac{\partial v_y}{\partial u} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(u_y \frac{\partial v_y}{\partial u} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta v} = f_{i,j}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

式 (2.33) の右辺は次のように書ける.

$$f_{i,j} = \rho g t \sqrt{1 + \left(u_x^2 + u_y^2 \right) \left(\frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta u} \right)^2 + 2(u_x v_x + u_y v_y) \left(\frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta u} \right) \left(\frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta v} \right) + \left(v_x^2 + v_y^2 \right) \left(\frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta v} \right)^2} \tag{2.34}$$

2.2 偏微分方程式

2.2.1 2 階線形偏微分方程式の分類と標準形

偏微分方程式とは, 2 つ以上の独立変数を持つ従属関数に対する微分方程式である. 独立変数 x, y に関する関数 $h(x, y)$ に対する, 次の 2 階線形偏微分方程式を考える.

$$A \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{2.35}$$

独立変数 ξ, η を導入し, 変数変換 $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ を行う. 偏微分方程式 (2.35) は次のように書ける [79].

$$A^* \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2B^* \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + C^* \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + D^* \frac{\partial h}{\partial \xi} + E^* \frac{\partial h}{\partial \eta} = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \tag{2.36}$$

A^*, B^*, C^*, D^*, E^* は次のように定義した.

$$A^* = A\xi_x^2 + 2B\xi_x \xi_y + C\xi_y^2 \tag{2.37}$$

$$B^* = A\xi_x \eta_x + 2B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + C\xi_y \eta_y \tag{2.38}$$

$$C^* = A\eta_x^2 + 2B\eta_x \eta_y + C\eta_y^2 \tag{2.39}$$

$$D^* = A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \quad (2.40)$$

$$E^* = A \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad (2.41)$$

$$(B^*)^2 - A^* C^* = (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2 (B^2 - AC) \quad (2.42)$$

ここで、 ξ , η の x , y についての偏導関数をそれぞれ $\xi_x = \partial \xi / \partial x$, $\xi_y = \partial \xi / \partial y$, $\eta_x = \partial \eta / \partial x$, $\eta_y = \partial \eta / \partial y$ とした。係数 A^* , C^* の関係式を次のように書き直す。

$$\frac{A^*}{\xi_y^2} = A \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2B \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right) + C \quad (2.43)$$

$$\frac{C^*}{\eta_y^2} = A \left(\frac{\eta_x}{\eta_y} \right)^2 + 2B \left(\frac{\eta_x}{\eta_y} \right) + C \quad (2.44)$$

これらは ξ_x / ξ_y , η_x / η_y に関する 2 次式とみなすことができる。2 次方程式 $Az^2 + 2Bz + C = 0$ の解と式 (2.43), (2.44) を比較することで、式 (2.35) は係数 A , B , C の関係により次のように分類される [79, 80].

1. $B^2 - AC > 0$ のとき、2 次方程式 $Az^2 + 2Bz + C = 0$ は 2 つの実数解をもつ。このとき偏微分方程式は「双曲型 (hyperbolic)」であるという。振動・波動現象を記述する波動方程式は、双曲型偏微分方程式である。2 つの実数解として ξ_x / ξ_y , η_x / η_y を採用すると、 $A^* = 0$, $C^* = 0$ となり、式 (2.35) は次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} = P(\xi, \eta, \partial h / \partial \xi, \partial h / \partial \eta) \quad (2.45)$$

式 (2.45) は双曲型の 2 階線形偏微分方程式の標準形 (normal form) とよばれる。

2. $B^2 - AC = 0$ のとき、2 次方程式 $Az^2 + 2Bz + C = 0$ は 1 つの重解をもつ。このとき偏微分方程式は「放物型 (parabolic)」であるという。例えば熱方程式のような拡散方程式は、放物型偏微分方程式に分類される。
3. $B^2 - AC < 0$ のとき、2 次方程式 $Az^2 + 2Bz + C = 0$ は 2 つの共役複素数解をもつ。このとき偏微分方程式は「楕円型 (elliptic)」であるという。例えば物理現象の定常状態を記述するポアソン方程式は、楕円型偏微分方程式に分類される。

また、偏微分方程式 (2.35) は、独立変数 x, y のみの既知関数 $f(x, y)$ に応じて次のように分類される。関数 $f(x, y)$ が恒等的に 0 であるとき、斉次 (同次) であるといい、その方程式を斉次 (同次) 線形偏微分方程式と呼ぶ。斉次でないときその方程式を非斉次 (非同次) 線形偏微分方程式と呼ぶ。

シェルの鉛直方向の釣合い方程式 (2.4) は 2 階の偏微分方程式であるから、釣合い方程式の係数 σ_x , σ_y , τ_{xy} に基づいて、次のように分類することができる。

1. $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 < 0$ のとき, シェルの鉛直方向の釣合い方程式は双曲型偏微分方程式である.
2. $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$ のとき, シェルの鉛直方向の釣合い方程式は放物型偏微分方程式である.
3. $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 > 0$ のとき, シェルの鉛直方向の釣合い方程式は楕円型偏微分方程式である.

釣合い方程式が双曲型となる形状設計において, 境界条件が適切に設定されないとき解の存在が必ずしも保証されない. これは, 双曲型偏微分方程式に存在する特性曲線と, 境界形状の関係によるものであると指摘されている [56]. 次の項で, 特性曲線について述べる.

2.2.2 特性曲線

xy 平面上の曲線 Γ を考える. 曲線 Γ 上の点をパラメータ s を用いて $(\xi(s), \eta(s))$ と表す. この曲線 Γ 上で偏微分方程式 (2.35) の解とその勾配が次のように与えられたとする.

$$h(s) = \varphi(s), \quad \frac{\partial h(s)}{\partial x} = \psi_1(s), \quad \frac{\partial h(s)}{\partial y} = \psi_2(s) \quad (2.46)$$

$\varphi(s), \psi_1(s), \psi_2(s)$ は曲線 Γ 上で与えられた初期値である. このように偏微分方程式について, 平面上の曲線における初期値が与えられたときの偏微分方程式の解を求める問題をコーシー (Cauchy) 問題という. $\psi_1(s), \psi_2(s)$ のパラメータ s に関する 1 次の偏導関数は合成関数の連鎖律により次のように書ける.

$$\frac{\partial \psi_1(s)}{\partial s} = \frac{\partial^2 h(s)}{\partial x^2} \frac{\partial \xi(s)}{\partial s} + \frac{\partial^2 h(s)}{\partial xy} \frac{\partial \eta(s)}{\partial s} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \psi_2(s)}{\partial s} = \frac{\partial^2 h(s)}{\partial xy} \frac{\partial \xi(s)}{\partial s} + \frac{\partial^2 h(s)}{\partial y^2} \frac{\partial \eta(s)}{\partial s} \quad (2.48)$$

式 (2.47), (2.48) と, 式 (2.35) から, $\partial^2 h / \partial x^2, \partial^2 h / \partial xy, \partial^2 h / \partial y^2$ についての 3 元 1 次連立方程式系として次のように書ける [80].

$$\begin{pmatrix} \partial \xi / \partial s & \partial \eta / \partial s & 0 \\ 0 & \partial \xi / \partial s & \partial \eta / \partial s \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^2 h / \partial x^2 \\ \partial^2 h / \partial xy \\ \partial^2 h / \partial y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \psi_1(s) / \partial s \\ \partial \psi_2(s) / \partial s \\ f(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

このとき, 係数行列式は次のように書ける.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \partial \xi / \partial s & \partial \eta / \partial s & 0 \\ 0 & \partial \xi / \partial s & \partial \eta / \partial s \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = A \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} \right)^2 - 2B \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial \eta}{\partial s} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \quad (2.50)$$

$\Delta \neq 0$ であれば 2 次の偏導関数が一意に決まり, $\Delta = 0$ のとき 2 次の偏導関数は 1 次従属となる. $\Delta = 0$ のとき最初に定義した曲線 Γ は, 偏微分方程式 (2.35) の特性曲線 (characteristic curve) となる. 特性曲線には, 与えられた条件 (情報) が偏微分方程式に従って伝わっていく道筋を表すという特徴がある [79]. 初期値条件や境界値条件として与えた従属関数についての条件が, 特性曲線上を伝播すると解釈することができる.

式 (2.35) が双曲型偏微分方程式であるとき、係数 A , B , C に対して $B^2 - AC > 0$ が成り立つ。この偏微分方程式の特性曲線の xy 平面内の単位接ベクトルを (dx, dy) とすると、次式が成り立つ [80].

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0 \quad (2.51)$$

$B^2 - AC > 0$ が成り立つことから、2 次方程式 (2.51) は次式の通り、 dy/dx についての異なる 2 つの実数解をもつ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.52)$$

偏微分方程式の平面内の特性曲線が、変数変換に用いた関数 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ を用いて $\xi(x, y) = \text{const.}$, $\eta(x, y) = \text{const.}$ で表されるとき、特性曲線の単位接ベクトルについて次式が成り立つ。

$$\xi_x dx + \xi_y dy = 0, \quad \eta_x dx + \eta_y dy = 0 \quad (2.53)$$

式 (2.52) から、これらの偏導関数は次式を満たす。

$$\frac{\xi_x}{\xi_y}, \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.54)$$

よって特性曲線 $\xi(x, y) = \text{const.}$, $\eta(x, y) = \text{const.}$ はそれぞれ次のように書ける。

$$\xi(x, y) = (B + \sqrt{B^2 - AC})x - Ay = \text{const.}, \quad \eta(x, y) = (B - \sqrt{B^2 - AC})x - Ay = \text{const.} \quad (2.55)$$

このように、双曲型の場合は 2 つの特性曲線の族がある。特性曲線は係数 A , B , C が定数のとき直線となり、係数が平面座標の関数のとき曲線となる。

第 3 章

水平投影応力分布を設計パラメータとするシェルの形状設計

3.1 はじめに

本章では、Takeoka ら [52] の手法を拡張し、連続体シェル曲面の膜応力の鉛直方向の釣合い式に基づいて、応力分布を設計パラメータとして自由曲面シェルの形状を設計する手法を提案する。グラフ曲面として定義した連続体シェル曲面の膜応力の水平投影応力を設計パラメータとして、鉛直方向の釣合い式を有限差分法で離散化して線形連立方程式を繰り返し解く方法により、自重に対して膜応力で釣合うシェル形状を生成する。膜応力の水平投影成分は、水平方向の釣合い方程式を満足するように設定する。

既往研究のうち、応力関数を用いる方法 [42, 47] では、応力の各成分が 1 つの応力関数で表現されるため、得られるシェル形状の予測や、応力分布と境界での反力分布の細かな制御は、手法に対する経験がないと難しい。そこでまず水平投影応力のうちせん断応力を指定し、垂直応力は水平方向の釣合い方程式に基づき、せん断応力の関数と任意の関数の和として定義する方法を提案する。この手順により、水平投影応力の各成分と境界の反力分布を応力関数を用いるより直接的に制御し、それをシェル形状に反映することが可能となる。

Pucher's formulation に基づく既往の形状設計手法 [42, 50] は構造の材料の特性に基づくひずみや変形の影響は考慮しない。したがって形状設計で想定した応力分布と有限要素解析で得られる応力分布には誤差が生じる。本章では、形状設計手法と有限要素解析を組み合わせることにより、形状設計手法における指定応力をと有限要素解析結果に基づいて繰り返し補正することで、変形を考慮した場合にも水平投影応力（水平方向反力）を一様化する手法を提案する。

数値例題では、提案手法による結果と収束性および計算時間を既往の論文 [52] における逐次加速緩和法（SOR 法）による結果と比較する。また提案手法により、せん断応力を平面座標の関数として定義したモデルと、境界の一部を鉛直方向反力が生じない自由境界としたモデルを用いて、より複雑なシェル形状が生成可能であることを示す。せん断応力を変化させたときの主応力方向と、得られるシェル曲面形状についてのパラメトリックスタディを行う。

次に、一様な水平投影応力分布を指定して提案手法で設計したシェル形状を対象として、鉄筋コンクリートとしての材料の特性と、面外曲げ変形および境界条件を考慮した有限要素解析を行う。得られた水平投影応力と形状設計で指定した水平投影応力の誤差について検証し、指定応力との誤差を反復計算により繰り返し補正することで、変形を考慮した場合にも水平投影応力を一様化する手法について、矩形境界の場合と曲線境界の場合を対象として検証する。また、設計したシェル構造の力学的特性について、有限要素解析により得られたひずみエネルギーと鉛直変位に着目して考察する。

3.2 釣合い方程式に基づくシェルの形状設計

3.2.1 シェルの釣合い方程式と設計パラメータとしての水平投影応力

2.1 節において図 2.1 に示した、曲面の高さ h が x, y の関数 $h(x, y)$ で表されるグラフ曲面のシェルを考える。2.1 節で述べた通り、シェルの水平方向の釣合い方程式は式 (2.3) で表される。式 (2.3) をそれぞれ x, y で積分すると、 σ_x, σ_y は τ_{xy} を用いて次のように表される。

$$\sigma_x = - \int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dx + C_x(y), \quad \sigma_y = - \int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dy + C_y(x) \quad (3.1)$$

ここで、 $C_x(y), C_y(x)$ はそれぞれ y, x の任意の関数である。せん断応力を任意の関数として与える場合は、垂直応力 σ_x, σ_y は水平方向の釣合い方程式 (2.3) から導かれる式 (3.1) により、せん断応力の関数とそれぞれ任意の関数 $C_x(y), C_y(x)$ の和として定義される。水平方向の釣合い方程式を満足するため、関数 $C_x(y), C_y(x)$ は、それぞれ x, y 方向に一定である必要があるが、他の水平投影応力とは相関なく、独立に定義することができる。垂直応力 σ_x, σ_y はシェルの曲率の大きさと、せん断応力 τ_{xy} はシェルの主曲率方向とそれぞれ相関があるため、これらの応力を調整することによりシェルの形状を制御することが可能となる。また、3.4.3 項で示すように、自由境界の条件も容易に満たすことができる。

水平投影応力の主応力を σ_1, σ_2 とすると、これらは $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ により次式で表される。

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.2)$$

図 3.1 に水平投影応力が負の場合について、応力の各成分と主応力との関係をモールの応力円を用いて表す。主応力方向と x 軸のなす角 α は次のように書ける。

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (3.3)$$

また、鉛直方向の釣合い方程式は 2 階の偏微分方程式として式 (2.4) で表される。式 (2.4) の右辺 f は鉛直方向下向き (z 軸の負の方向) のシェルの単位水平投影面あたりの分布荷重である。 f をシェルの自重とする場合、材料密度 ρ 、重力加速度 g 、板厚 t を用いて、曲面の勾配の関数として式 (2.5) で表される。

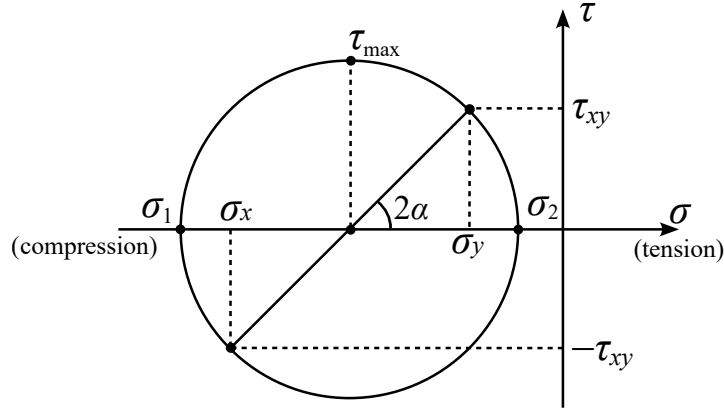


図 3.1: 水平投影応力におけるモールの応力円

曲線形状の水平投影境界形状をもつシェルを対象とするため，グラフ曲面の x, y 座標をパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ の関数として $x(u, v)$, $y(u, v)$ と表す．2.1 節に示した通り，鉛直方向の釣合い方程式 (2.4) は，式 (2.13) で表される．

グラフ曲面の x, y 座標は，パラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いたバーンスタイン多項式 (Bernstein polynomial) により表現する．バーンスタイン多項式はバーンスタイン基底関数の線形結合で表される多項式で，一般にベジエ曲線 (Bezier curve) の定義などに用いられる． m 次のバーンスタイン基底関数 $b_i^m(t)$ は，次式で定義される．

$$b_i^m(t) = \frac{m!}{i!(m-i)!} t^i (1-t)^{m-i}, \quad (i = 0, \dots, m) \quad (3.4)$$

バーンスタイン多項式 $B^m(t)$ は，バーンスタイン基底関数の線形結合として係数 c_i を用いて次のように書ける．

$$B^m(t) = \sum_{i=0}^m c_i b_i^m(t) \quad (3.5)$$

3.2.2 有限差分法による離散化

2.1 節に示した手法により，グラフ曲面として定義した連続体シェル曲面における膜応力の鉛直方向の釣合い方程式 (2.13) を有限差分法で離散化する．パラメータ u, v の平面を u, v 方向にそれぞれ $N \times N$ 分割した格子点 (i, j) ($i, j = 1, \dots, N+1$) を考える．格子点 (i, j) の u, v 方向の間隔をそれぞれ $\delta u, \delta v$ ，格子点の z 座標を $h_{i,j}$ とする．鉛直方向の釣合い方程式 (2.13) は中央差分を用いて式 (2.33) のように書ける．また，釣合い方程式 (2.33) の右辺 $f_{i,j}$ は式 (2.34) のように書ける．

シェルの境界上の格子点を変数とする自由境界を有するモデルにおいて，境界上の格子点における偏導関数を定義する必要がある．ここでは，シェルの境界における h の u, v に関する 2 階の偏

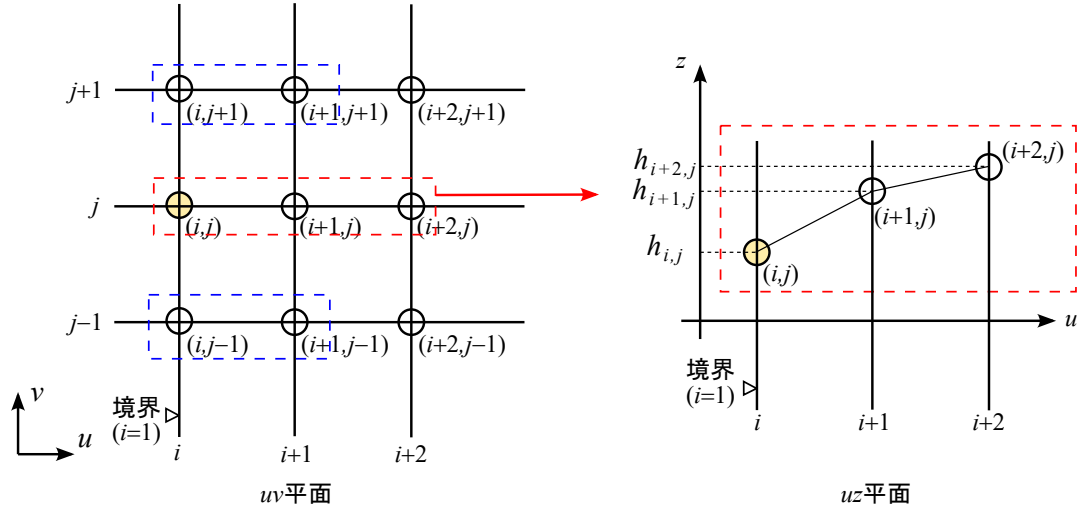


図 3.2: $i = 1$ の境界上の格子点 (i, j) における偏導関数の導出

導関数は、近傍の格子点座標を用いて次のように定義する。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} := \frac{h_{i+2,j} - 2h_{i+1,j} + h_{i,j}}{(\delta u)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} := \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i,j+1} - h_{i+1,j-1} + h_{i,j-1}}{2\delta u \delta v} \quad (i = 1) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} := \frac{h_{i,j} - 2h_{i-1,j} + h_{i-2,j}}{(\delta u)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} := \frac{h_{i,j+1} - h_{i-1,j+1} - h_{i,j-1} + h_{i-1,j-1}}{2\delta u \delta v} \quad (i = N + 1) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} := \frac{h_{i,j+2} - 2h_{i,j+1} + h_{i,j}}{(\delta v)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} := \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j} + h_{i-1,j}}{2\delta u \delta v} \quad (j = 1) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} := \frac{h_{i,j} - 2h_{i,j-1} + h_{i,j-2}}{(\delta v)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} := \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j} - h_{i+1,j-1} + h_{i-1,j-1}}{2\delta u \delta v} \quad (j = N + 1) \quad (3.9)$$

例として、 $i = 1$ の境界上の格子点における偏導関数の模式図を図 3.2 に示す。 $i = 1$ における $\partial^2 h / \partial u^2$ は、1 つ内側の $(i + 1, j)$ における $\partial^2 h / \partial u^2$ と等しいと仮定して赤色点線で囲んだ 3 つの格子点の z 座標から求める。また、 $\partial^2 h / \partial u \partial v$ は青色点線で囲んだ 4 つの格子点の z 座標から求める。

シェルの境界における h の u , v に関する 1 階の偏導関数は、前に述べた 2 階の偏導関数と適合するように、次のように定める。

$$\frac{\partial h}{\partial u} := 2 \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\delta u} - \frac{h_{i+2,j} - h_{i,j}}{2\delta u} \quad (i = 1) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} := 2 \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\delta u} - \frac{h_{i,j} - h_{i-2,j}}{2\delta u} \quad (i = N + 1) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} := 2 \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\delta v} - \frac{h_{i,j+2} - h_{i,j}}{2\delta v} \quad (j = 1) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} := 2 \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\delta v} - \frac{h_{i,j} - h_{i,j-2}}{2\delta v} \quad (j = N + 1) \quad (3.13)$$

3.2.3 シェルの釣合い方程式に基づく形状設計法のフロー

文献 [52] では，離散化した鉛直方向の釣合い方程式 (2.33) を，SOR 法を用いて解いてシェルの形状を導出している．一方，釣合い方程式 (2.33) は曲面の勾配の関数として表される右边 $f_{i,j}$ を仮に定数とすると，格子点 (i, j) の z 座標 $h_{i,j}$ についての線形連立方程式とみなすことができる．したがって，各格子点における式 (2.33) を導出し，右边 $f_{i,j}$ を現在の形状で固定してこれを線形連立方程式として解くことで，シェルの形状を求める．

格子点の数は $(N + 1)^2$ であり，境界条件を指定した後の独立な変数の数を n とする．変数であ

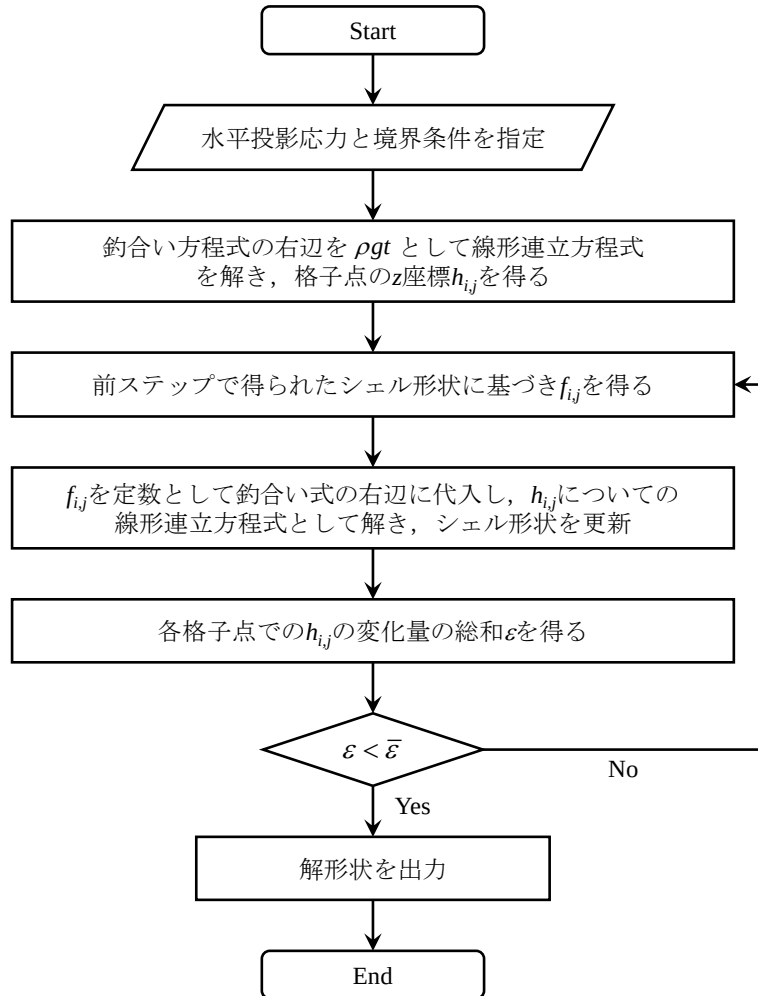


図 3.3: シェルの釣合い方程式に基づく形状設計法のフローチャート

る z 座標 $h_{i,j}$ をまとめたベクトルを $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，変数 $\mathbf{x}$ の係数をまとめた行列を $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，右辺 $f_{i,j}$ を変数となる格子点についてまとめたベクトルを $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とすると，式 (2.33) は次の線形連立方程式として表される．

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.14)$$

右辺 $f_{i,j}$ は形状に依存するため，線形連立方程式を繰り返し解いて得られた形状に基づき更新する．形状設計手法の手順を以下にまとめる．また，図 3.3 にフローチャートを示す．

1. 水平投影応力と境界形状を設定する．
2. 初期形状として $h_{i,j} = 0$ と仮定して釣合い方程式 (2.33) の右辺を $f_{i,j} = \rho g t$ とする．線形連立方程式 (3.14) を解き，格子点の z 座標 $h_{i,j}$ を得る．
3. 前ステップで得られたシェル形状に基づき式 (2.34) より $f_{i,j}$ を求める．
4. 得られた $f_{i,j}$ を定数として式 (2.33) の右辺に代入する．線形連立方程式 (3.14) の右辺を更新し，線形連立方程式を解いてシェル形状 $h_{i,j}$ を更新する．
5. 各格子点での $h_{i,j}$ の変化の総和 ε を次式により求める．ここで上添え字 (l) は反復計算のステップ数を示す．

$$\varepsilon^{(l+1)} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \left| h_{i,j}^{(l+1)} - h_{i,j}^{(l)} \right| \quad (3.15)$$

6. $\varepsilon^{(l+1)}$ が指定された正の微小値 $\bar{\varepsilon}$ 以上するとき Step 3 に戻る．
7. 解形状を出力して反復計算を終了する．

3.3 シェルの水平投影応力分布一様化のための形状補正手法

3.2 節に示した形状設計で生成したシェル形状に材料特性を定めて有限要素解析を行い，シェルの弾性変形が応力分布に与える影響について確認する．ここでは， $\tau_{xy} = 0$ の一様応力分布を指定したモデルのみを対象とする．また，有限要素解析から得られた水平投影応力分布に基づき形状設計過程での指定水平投影応力 σ_x ， σ_y を補正する．したがって，形状設計過程の水平投影応力の指定値と理想的な目標値は異なり，後者を以下では目標値とよぶ．例えば，境界部での応力を一様な値（目標値）とすることで，領域内の応力を一様化することが可能となる．

図 3.4(a), (b) に，水平投影応力 σ_x ， σ_y をそれぞれ目標値に近づける形状補正手法において採用した応力の誤差評価範囲の模式図を示す．図 3.4(a), (b) に示した境界 a ($\bar{x}_L \leq x \leq \bar{x}_U$ ， $\bar{y}_L \leq y \leq \bar{y}_U$) の水平投影応力を，それぞれ目標値 σ_x^* ， σ_y^* に近づけるように形状設計での指定値 σ_x ， σ_y を補正しながら，形状設計と有限要素解析を繰り返す．水平投影応力 σ_x ， σ_y の作用する方向に平行な境界付近（図 3.4 に B で示した範囲）では，境界での拘束によって境界と平行な方向の水平投影応力を指定値に一致させることが困難である．したがって，直線または曲線で定められる図 3.4 の a で示す範囲の境界を誤差評価範囲とする．図 3.4 に b で示す範囲は，範囲 a の端点における水平投影応力の指定値を用いて形状設計を行う．

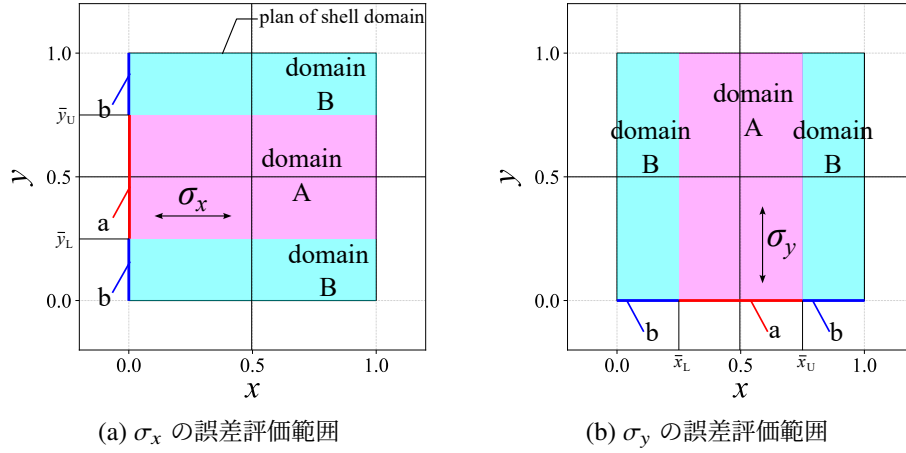


図 3.4: 形状補正における応力の誤差評価範囲の模式図

以上の条件に基づき、指定値 $\sigma_x^{(l)}$, $\sigma_y^{(l)}$ の更新は、次式による。

$$\sigma_x^{(l+1)} = \begin{cases} \sigma_x^{(l)} - (\bar{\sigma}_x^{(l)} - \sigma_x^*) & (\bar{y}_L \leq y \leq \bar{y}_U) \\ \sigma_x^{(l+1)}|_{y=\bar{y}_L} & (y < \bar{y}_L) \\ \sigma_x^{(l+1)}|_{y=\bar{y}_U} & (y > \bar{y}_U) \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\sigma_y^{(l+1)} = \begin{cases} \sigma_y^{(l)} - (\bar{\sigma}_y^{(l)} - \sigma_y^*) & (\bar{x}_L \leq x \leq \bar{x}_U) \\ \sigma_y^{(l+1)}|_{x=\bar{x}_L} & (x < \bar{x}_L) \\ \sigma_y^{(l+1)}|_{x=\bar{x}_U} & (x > \bar{x}_U) \end{cases} \quad (3.17)$$

水平投影応力の指定値 $\sigma_x^{(l)}$, 目標値 σ_x^* , および有限要素解析により得られた応力値 $\bar{\sigma}_x^{(l)}$ の関係を図 3.5 に示す。 $\tau_{xy} = 0$ のとき σ_x , σ_y は水平方向の釣合い方程式 (2.3) よりそれぞれ $\partial\sigma_x/\partial x = 0$, $\partial\sigma_y/\partial y = 0$ を満たす必要があるが、式 (3.16), (3.17) より, σ_x は x 方向に一定, σ_y は y 方向に一定であり, 水平方向の釣合い方程式は満たされる。

形状設計で生成したシェルに対して, 長さのスケールを β_1 倍, 単位面積当たりの自重 $\rho g t$ を β_2 倍したとき, 材料の特性による弾性変形や曲げ変形の影響を考慮しなければ, 水平投影応力はシェルの全範囲で $\beta_1\beta_2$ 倍となる。したがって, 水平投影応力の目標値は形状設計で指定した値の $\beta_1\beta_2$ 倍とする。

形状補正手法の計算手順を以下にまとめる。また, 図 3.6 にフローチャートを示す。

1. 水平投影応力の目標値 σ_x^* , σ_y^* と境界形状を設定する。
2. 水平投影応力の指定値 $\sigma_x^{(l)}$, $\sigma_y^{(l)}$ に基づき, 鉛直方向の釣合い式を解いてシェル形状を得る。ここで, 添え字 l は反復計算のステップ数を示す。
3. 得られたシェル形状に基づき, 有限要素解析を実行する。
4. 有限要素解析結果から, あらかじめ領域内に指定した応力の誤差評価範囲 a における水平投影応力 $\bar{\sigma}_x^{(l)}$, $\bar{\sigma}_y^{(l)}$ を算出する。
5. 得られた水平投影応力 $\bar{\sigma}_x^{(l)}$, $\bar{\sigma}_y^{(l)}$ と, 目標値 σ_x^* , σ_y^* との誤差に関して, 次式で定められる

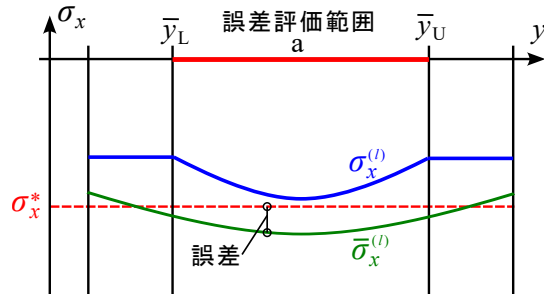


図 3.5: 水平投影応力の指定値 $\sigma_x^{(l)}$, 目標値 σ_x^* と $\bar{\sigma}_x^{(l)}$ の関係

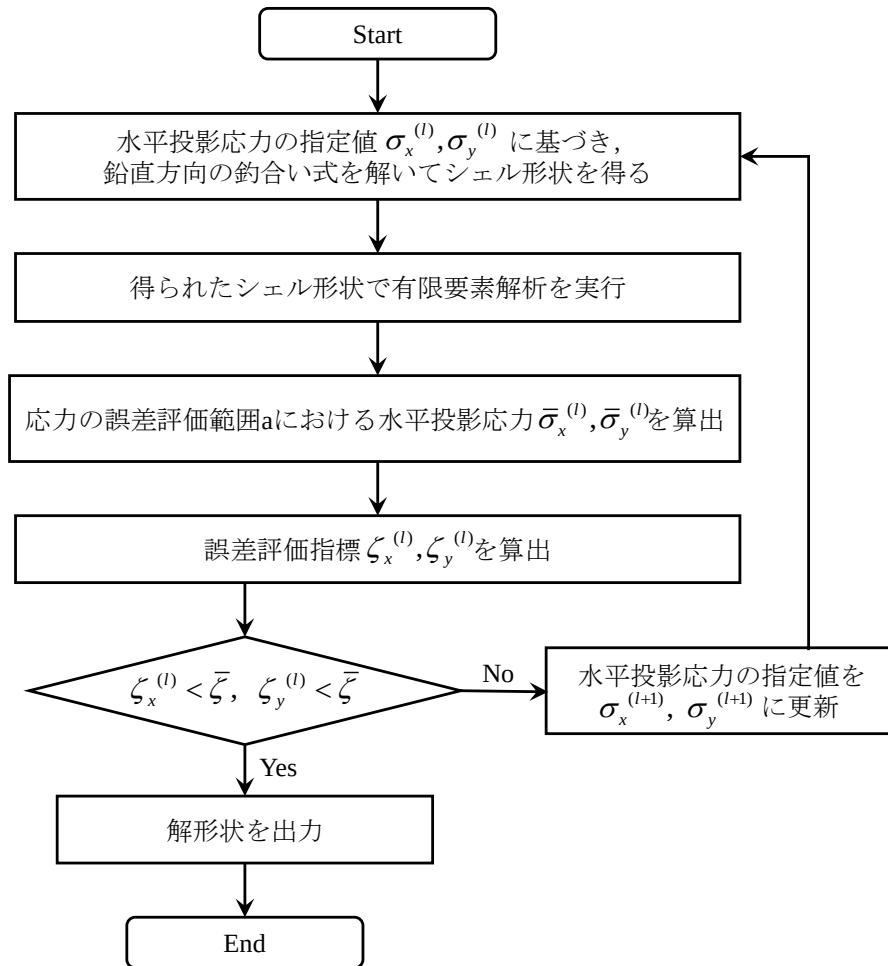


図 3.6: シェルの形状補正手法のフローチャート

指標 $\zeta_x^{(l)}$, $\zeta_y^{(l)}$ を算出する.

$$\zeta_x^{(l)} = \frac{1}{n_x} \sum_{n_x} \left| \frac{\bar{\sigma}_x^{(l)}}{\sigma_x^*} - 1 \right|, \quad \zeta_y^{(l)} = \frac{1}{n_y} \sum_{n_y} \left| \frac{\bar{\sigma}_y^{(l)}}{\sigma_y^*} - 1 \right| \quad (3.18)$$

ここで, n_x , n_y は誤差評価範囲 a の格子点の数である. 与えられた正の微小値 $\bar{\zeta}$ に対して $\zeta_x^{(l)}$, $\zeta_y^{(l)}$ が下記の収束条件を満たせば反復計算を終了する.

$$\zeta_x^{(l)} < \bar{\zeta}, \quad \zeta_y^{(l)} < \bar{\zeta} \quad (3.19)$$

6. 収束条件を満足しないとき, ステップ l での誤差評価範囲 a における誤差に応じて式 (3.16), (3.17) によりステップ $l+1$ での水平投影応力の指定値を更新する.
7. 更新した水平投影応力の指定値 $\sigma_x^{(l+1)}$, $\sigma_y^{(l+1)}$ に基づき, 3.2 節で示した形状設計法によりシェル形状を更新し, Step 2 にもどる.

3.4 数値解析例

形状設計において, シェルの形状は自重と応力の比率により決定されるため, $\rho g t = 1$ として無次元化し, 長さや荷重の単位は省略する. グラフ曲面の x , y 座標は, パラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いた 3 次のバーンスタイン多項式により表現する. パラメータ u , v 平面の格子の分割数は $N = 50$ とし, 収束判定のためのパラメータは $\bar{\varepsilon} = 1 \times 10^{-9}$, $\bar{\zeta} = 1 \times 10^{-3}$ とする. 形状設計のプログラムは Python3 を用いて作成し, 鉛直方向の釣合い方程式を離散化した線形連立方程式は, 数値計算ライブラリである NumPy [81] を用いて解く. 有限要素解析には, 骨組解析ライブラリ OpenSees の Python モジュールである OpenSeesPy [82] を使用する. シェルのモデル化には, 面内剛性に加えて面外曲げ剛性とせん断剛性を有する, 四辺形アイソパラメトリックシェル要素 ShellMITC4 を用いる. 解析結果の図化には Matplotlib [83] を用いる.

まず, モデル EL1, 2 により提案手法と文献 [52] の SOR 法による手法を比較する. 次に, せん断応力を平面座標の関数として定義したモデル EL3, 境界の一部を鉛直反力が生じない自由境界としたモデル EL4 により, 提案手法がより複雑なシェル形状を生成可能であることを示す. またせん断応力を変化させたときの主応力方向と, 得られるシェル曲面形状についてのパラメトリックスタディをモデル EL5, 6 で行う. さらに, モデル EL1, 2 を対象に有限要素解析を行い, シェルの弾性変形が応力分布に及ぼす影響について確認するとともに, 3.3 節で提案した応力一様化手法について検証する.

3.4.1 既往の手法との比較による提案手法の検証

曲面の x , y 座標はパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いて, 次のように定義する.

$$\text{モデルEL1:} \quad x = 0.2u^3 - 0.3u^2 + 2.1u - 1, \quad y = 0.2v^3 - 0.3v^2 + 2.1v - 1 \quad (3.20)$$

$$\text{モデルEL2:} \quad x = (2u - 1)(-v^2 + v + 1), \quad y = (-u^2 + u + 1)(2v - 1) \quad (3.21)$$

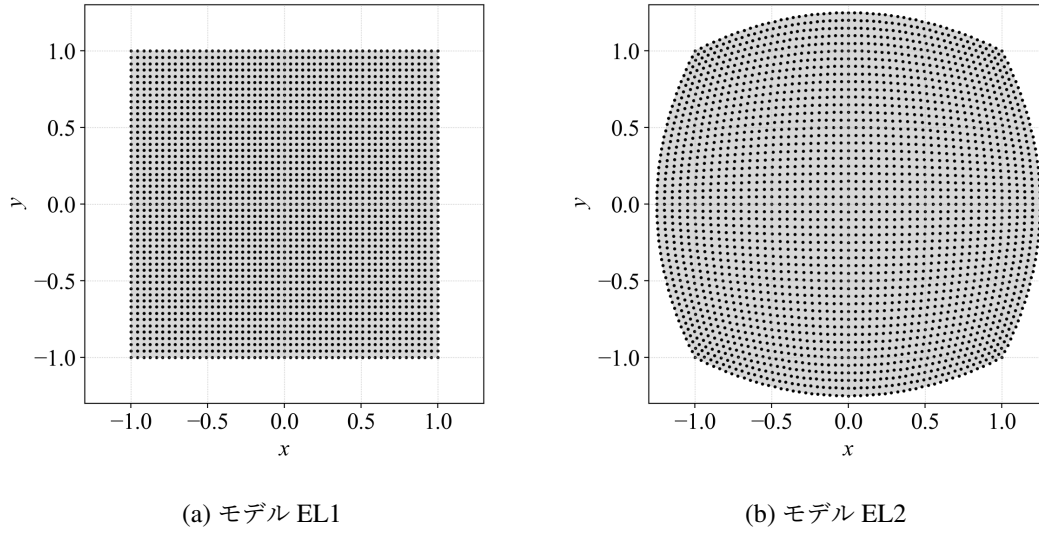


図 3.7: モデル EL1, EL2 : 平面形状

図 3.7 にモデル EL1, EL2 のシェル曲面の水平面投影形状と格子点を示す。

モデル EL1 は境界が x, y 軸に平行な矩形平面形状であり，モデル EL2 の境界は曲線である．また，水平投影応力の指定値は $\sigma_x = \sigma_y = -1$, $\tau_{xy} = 0$ とする．水平投影応力はシェルの領域内で一定であり，荷重はシェルの面内圧縮力により境界に伝達される．境界が x, y 軸に平行なモデル EL1 の矩形平面形状は $x = 2u - 1$, $y = 2v - 1$ としてモデル化することも可能であるが，ここでは文献 [52] の解析との比較を行うため，文献 [52] の例題と同様の x, y 座標の定義を採用する．

形状設計により得られたモデル EL1, 2 の釣合い形状を図 3.8, 3.9 にそれぞれ示す．図中のコントアは曲面の高さ h の分布を示す．平行投影図の z 座標のみ， x, y 座標の 2.0 倍にスケーリングして示す．どちらのモデルも，本章で提案する線形連立方程式を解く方法によって，文献 [52] での SOR 法による手法と同様の曲面形状が得られた．

$h_{i,j}$ の変化の総和 ε が 1×10^{-9} 以下となるまでの反復計算の回数は，モデル EL1, 2 でそれぞれ 10 回，11 回であった．モデル EL2 での ε の履歴を図 3.10 に示す．縦軸は対数であり，提案手法が既往の手法より少ない反復回数で収束していることがわかる．連立方程式を解く必要がある提案手法は，SOR 法と比べて 1 step に要する計算量は大きいですが，設計に要した計算時間は，Core i7-11800H CPU (2.30GHz, 16GB memory) の PC を用いて 4.6 秒であった．文献 [52] の SOR 法を採用したときの計算時間は 44 秒であり，提案手法は計算時間を 10% 程度に低減することができた．

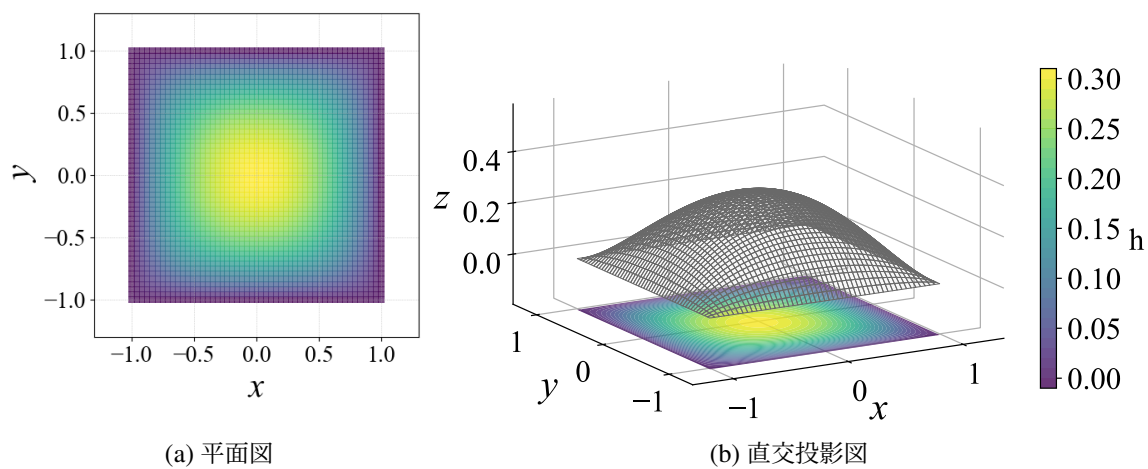


図 3.8: モデル EL1: 鈎合い形状

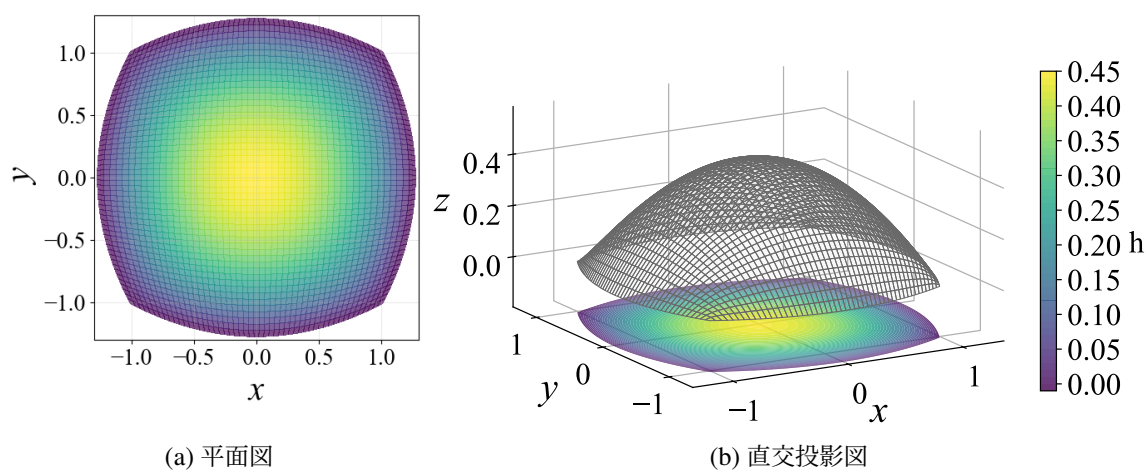


図 3.9: モデル EL2: 鈎合い形状

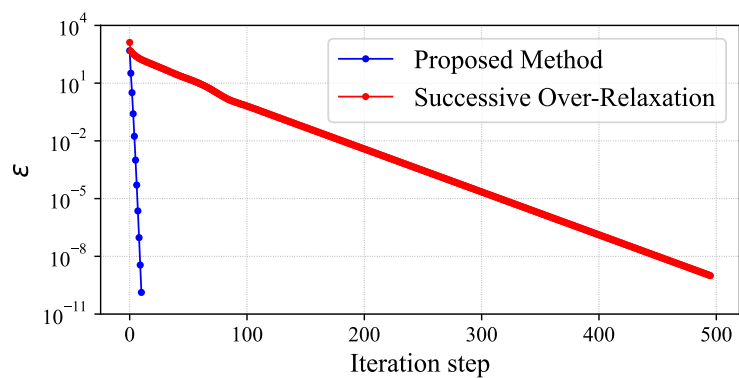


図 3.10: モデル EL2: 形状生成における各格子点での $h_{i,j}$ の変化の総和 ε の履歴

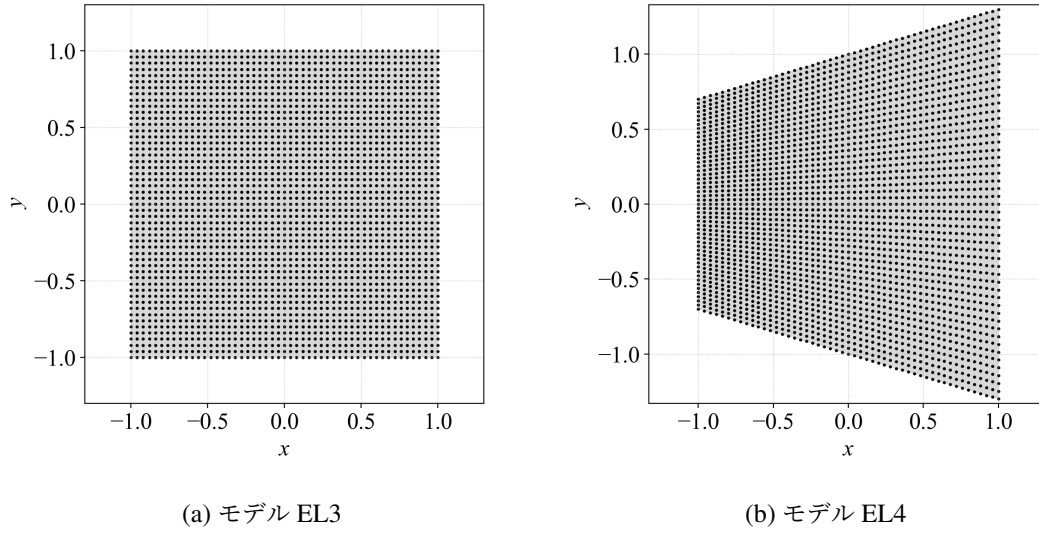


図 3.11: モデル EL3, EL4 : 平面形状

3.4.2 セン断応力分布をパラメータ表示したシェルの曲面形状設計

曲面の x, y 座標は, パラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いて, 矩形境界となるよう次式で定義する.

$$\text{モデルEL3:} \quad x = 2u - 1, \quad y = 2v - 1 \quad (3.22)$$

図 3.11(a) にモデル EL3 のシェル曲面の水平面投影形状と格子点を示す. モデル EL1, 2 では水平投影応力はシェルの領域内で一定としたのに対して, モデル EL3 では, 水平投影応力のうちせん断応力 τ_{xy} を x, y の関数として, 次のように定義する.

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \{ (x+1)(y-1) + 1 \} \quad (3.23)$$

τ_{xy} の y, x に関する偏導関数は $\partial\tau_{xy}/\partial y = (x+1)/2$, $\partial\tau_{xy}/\partial x = (y-1)/2$ となる. σ_x, σ_y は, 水平方向の釣合い式 (2.3) を満たすように, 式 (3.1) において $C_x(y) = C_y(x) = -3/4$ とし, それぞれ -1.5 から -0.5 の間を変化するように次のように定義する.

$$\sigma_x = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1 \right\}, \quad \sigma_y = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(y-1)^2 + 1 \right\} \quad (3.24)$$

モデル EL3 の指定水平投影応力分布を図 3.12 に, 釣合い形状を図 3.13 に示す. 非対称な水平投影応力を指定することで, 水平投影応力の絶対値が小さい $x < 0$ かつ $y > 0$ の部分において勾配の大きい非対称なシェル曲面形状が得られる. また $x > 0$ かつ $y > 0$ の部分においてガウス曲率が負となる曲面形状が得られた. 以上より, 対称な境界条件・平面形状のシェルに対して, 水平投影せん断応力分布を指定することにより, 非対称な曲面形状が得られることが示された.

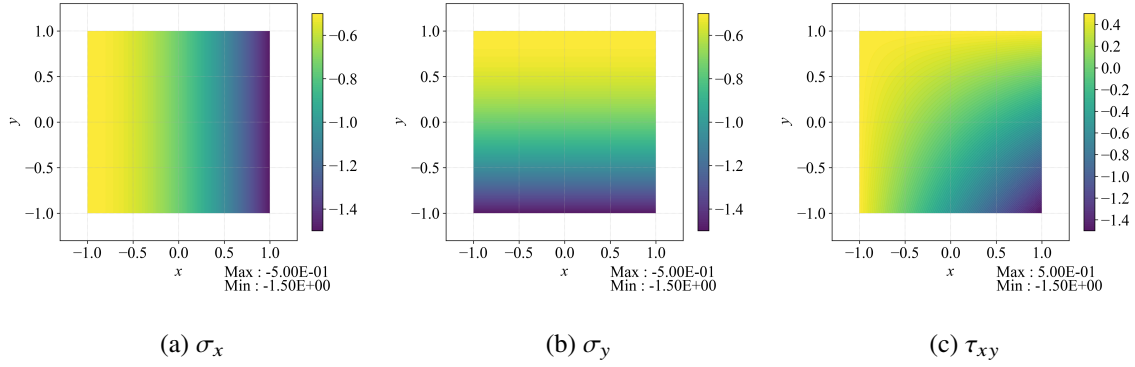


図 3.12: モデル EL3: 水平投影応力分布

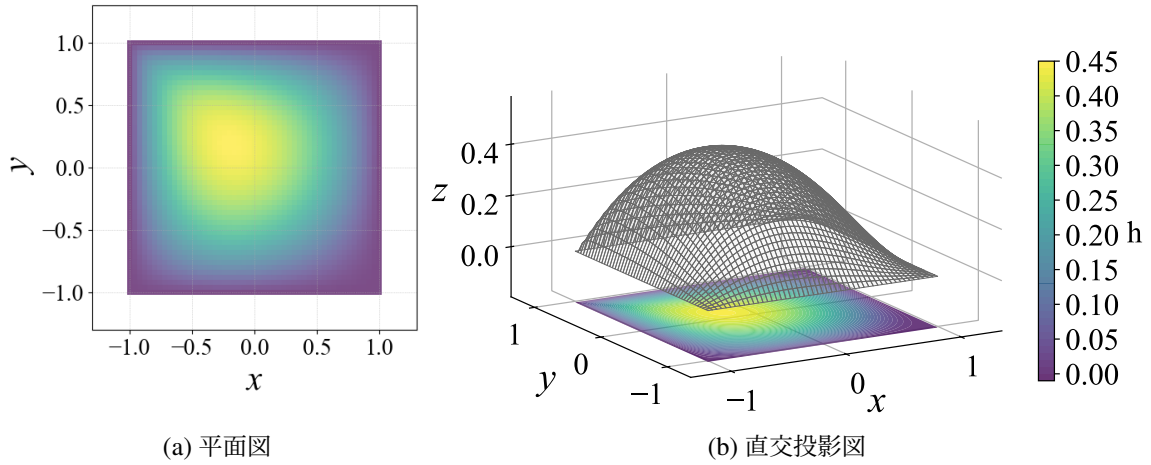


図 3.13: モデル EL3: 釣合い形状

3.4.3 自由境界を有するシェル曲面の設計への適用

モデル EL4 は, y 軸に平行な 2 辺を有する台形平面とし, 1 辺を自由境界 (高さ h を変数) とする. 曲面の x, y 座標はパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いて次のように定義する.

$$\text{モデル EL4 : } \quad x = 2u - 1, \quad y = (0.6u + 0.7)(2v - 1) \quad (3.25)$$

図 3.11(b) にモデル EL4 のシェル曲面の水平面投影形状と格子点を示す. また, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を x, y の関数として, 次のように定義する.

$$\sigma_x = -x - 1, \quad \sigma_y = -1, \quad \tau_{xy} = y \quad (3.26)$$

これらはシェルの水平方向の釣合い方程式 (2.3) を満たす.

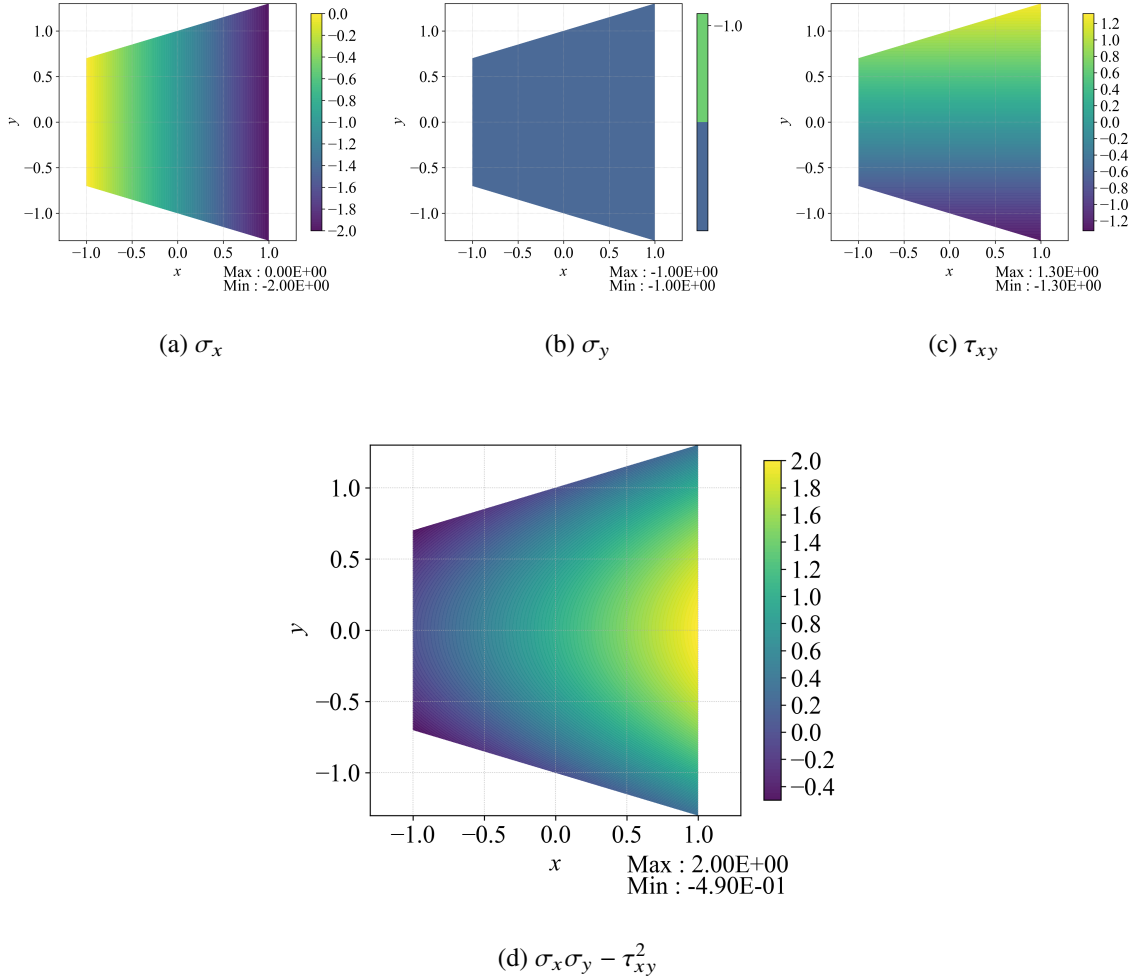


図 3.14: モデル EL4: 水平投影応力分布

図 3.15 にモデル EL4 の水平投影応力分布を示す。モデル EL4 では、 $x = -1$ における境界上の格子点の z 座標を変数として扱う。また $x = -1$ 上の境界を自由境界として、形状設計のみならず変形に対しても自由であると想定する。したがって、 σ_x は $x = -1$ において 0 となるように指定している。

第 2 章で述べたように、2 階の偏微分方程式である鉛直方向の釣合い方程式 (2.4) は、各偏導関数の係数 σ_x , σ_y , τ_{xy} に応じて楕円型、放物型、双曲型に分類される。モデル EL1, 2, 3 はすべて楕円型に分類されるが、モデル EL4 は、図 3.14(d) に示すように、自由境界付近の一部の領域において $\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 < 0$ となる。すなわちこの領域において釣合い方程式は双曲型であり、また $(x, y) = (-1, 0)$ の点では $\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$ となり、放物型となる。

モデル EL4 の釣合い形状を図 3.15 に示す。鉛直方向の釣合い方程式が一部の領域で双曲型となるモデルにおいても反復計算は収束し、シェル形状を得ることができた。シェル頂部は $(x, y) = (-0.4, 0)$ 付近にあり、 $x = -1$ 上の自由境界はアーチ形状となる。境界形状が台形であるモ

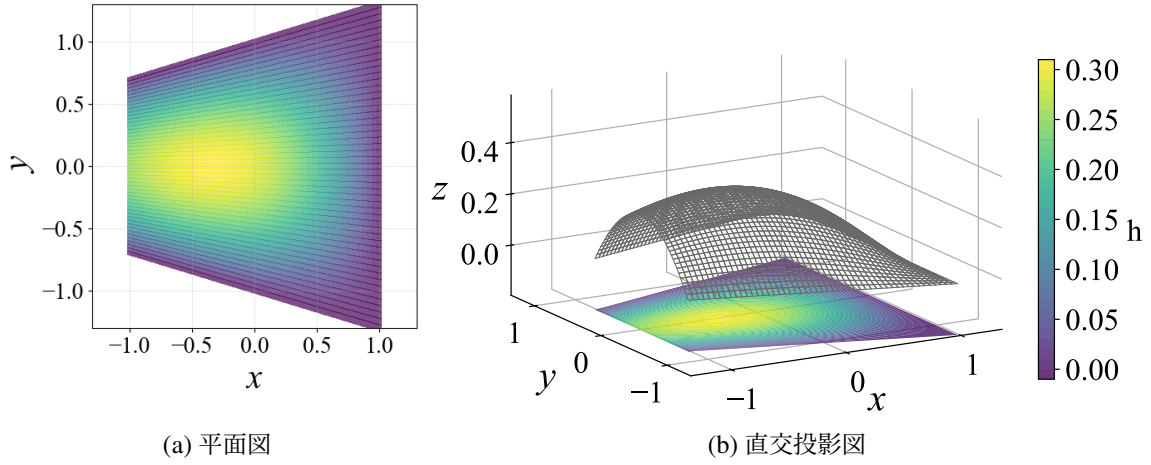


図 3.15: モデル EL4: 鈎合い形状

デル EL4 は, x が大きいほど y 方向のスパンが大きくなり, また σ_y を一定値で指定していることから, 自由開口部分より原点に近い部分が頂部となる. 水平方向の鈎合い式 (2.3) を満たすように, シェル頂部付近から自由境界に向かって伝達される直応力 σ_x の x 方向の変化率は, τ_{xy} の y 方向の変化率と鈎合う. $\tau_{yx} (= \tau_{xy})$ が y 方向に変化するとき, σ_x は x 方向に変化して自由境界で 0 となることのできる. このように, 水平投影応力を平面座標の関数として定義し, 境界に直交する方向の直応力成分を 0 とすることで, 自由境界となるシェルを設計することができた.

自由境界には y 方向の直応力 σ_y とせん断応力 τ_{xy} が生じる. 自由境界に生じるせん断応力は, 縁梁を設ければ, 梁の軸力により端部の支持境界に伝達することが可能である. なお, 文献 [84] において, 同様の水平投影応力をモデル EL3 で用いた矩形境界モデルに適用した場合には, 自由境界部分がシェルの頂部となることを別途確認している.

提案手法により, シェルの一部の領域が双曲型となるような場合でも鈎合い形状を求めることができることが示された. なお, 鈎合い微分方程式が双曲型となる領域を含むモデルについて解が得られた例としてモデル EL4 を示したが, 一般的に双曲型の問題を解くことができるわけではない. 特に, 双曲型となる領域が大きい場合や四辺の境界が拘束されている場合には, 繰り返し計算が収束せず, 解が得られなかった.

3.4.4 セン断応力を設計パラメータとしたパラメトリックスタディ

矩形境界を有するモデル EL5 と曲線境界を有するモデル EL6 を対象とする. 曲面の x, y 座標はパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いて次のように定義する.

$$\text{モデル EL5: } \quad x = 2u - 1, \quad y = 2v - 1 \quad (3.27)$$

$$\text{モデル EL6: } \quad x = -(2u - 1)(2v^2 - 2v - 1), \quad y = (2u^2 - 2u + 1)(2v - 1) \quad (3.28)$$

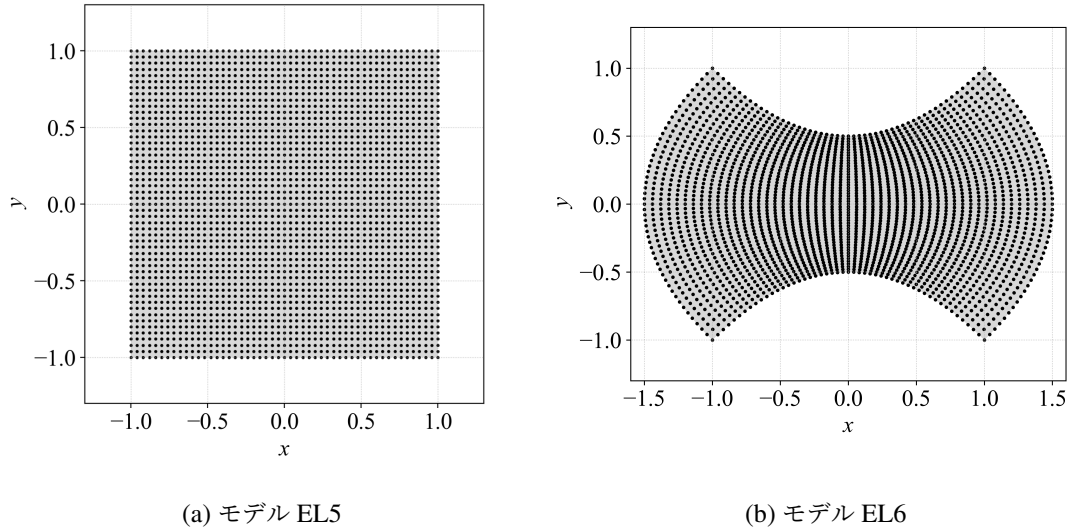


図 3.16: モデル EL5, EL6 : 平面形状

表 3.1: モデル EL5, 6 : 主応力方向 α と, 各水平投影応力成分

モデル	主応力方向 α	σ_x	σ_y	τ_{xy}
EL5a, EL6a	0	-1.8	-0.2	0
EL5b, EL6b	$\pi/6$	-1.4	-0.6	$-0.4\sqrt{3}$
EL5c, EL6c	$\pi/4$	-1.0	-1.0	-0.8
EL5d, EL6d	$\pi/3$	-0.6	-1.4	$-0.4\sqrt{3}$
EL5e, EL6e	$\pi/2$	-0.2	-1.8	0

図 3.16 にモデル EL5, EL6 のシェル曲面の水平面投影形状と格子点を示す。モデル EL5 はモデル EL3 と同様の矩形の平面形状である。水平投影応力の主応力を $\sigma_1 = -0.2$, $\sigma_2 = -1.8$ とし, 主応力方向を $\alpha = \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2\}$ の 5 つの値をとるよう変化させたときのシェル曲面形状を生成する。モデルの平面領域内で水平投影応力は一様分布とする。各モデルについて, 主応力方向 α と, 各水平投影応力成分を表 3.1 に示す。

モデル EL5, 6 の主応力方向と得られたシェルの釣合い形状, およびシェル曲面の主曲率 κ_1, κ_2 ($\kappa_1 \leq \kappa_2$) の分布を, それぞれ図 3.17, 3.18 に示す。主曲率分布図の青色の線は上に凸, 赤色は下に凸であることを示し, 線の太さは曲率の絶対値に比例する。凡例の線の太さは曲率 $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 1$ を示す。最小主曲率の方向を示す青く太い線は, 最小主応力方向と直交しながら, 最小主応力の方向に分布している。

モデル EL6 は x 方向のスペンが y 方向のスペンに比べて大きいため, モデル EL6a の主応力方向 $\alpha = 0$ のとき最もライズが大きな形状が得られた。またモデル EL6e の主応力方向 $\alpha = \pi/2$ のと

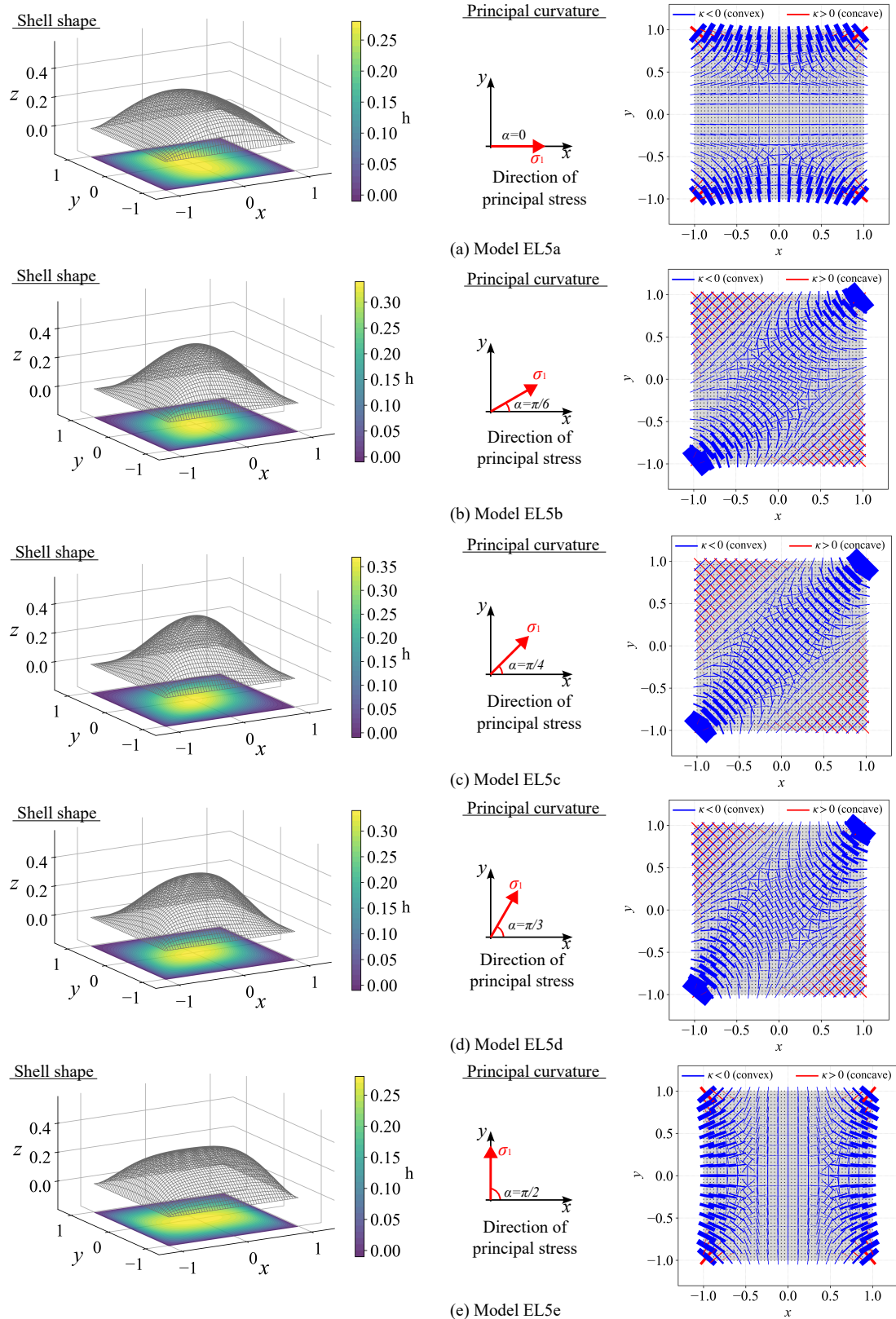


図 3.17: モデル EL5: 主応力方向と釣合い形状

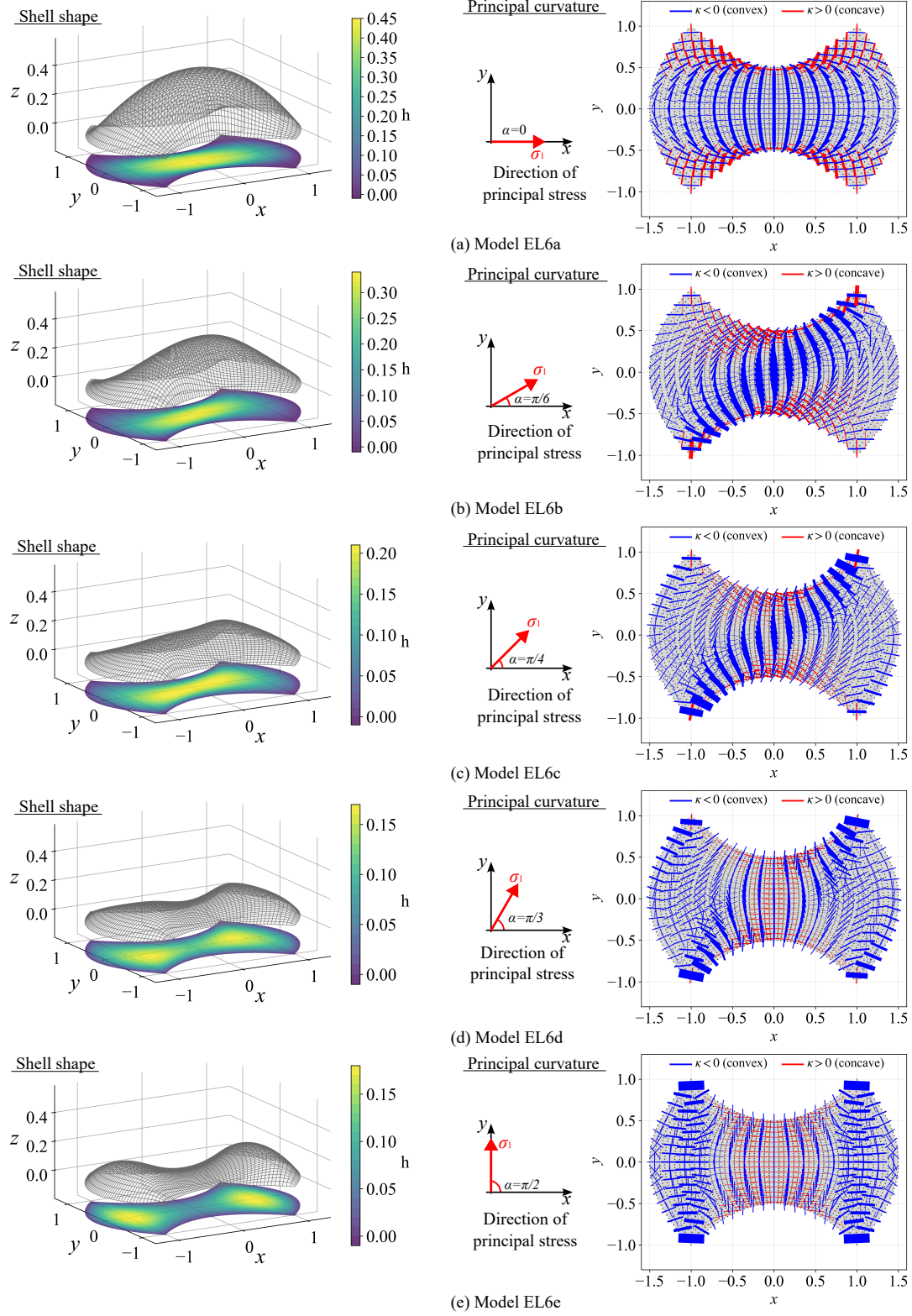


図 3.18: モデル EL6: 主応力方向と釣合い形状

き、 y 方向のスパンに応じてライズが変化することで、2つの凸型が連続するシェル形状が得られた。このように、水平投影応力の主応力方向を変化させることで、シェル形状を特徴づける主曲率方向を制御し、様々なシェル形状を生成することができた。

3.4.5 有限要素解析による鉄筋コンクリートシェルとしての応力分布

3.4.1 項のモデル EL1, 2 を用いて、面外曲げ変形やポアソン比による横ひずみ等の弾性変形を考慮した有限要素解析を行い、得られた応力分布と形状設計で指定した応力分布を比較する。形状設計におけるグラフ曲面の座標 (x, y, h) に対して、有限要素解析ではそれぞれの座標値を、係数 β_1 を用いて $(\beta_1 x, \beta_1 y, \beta_1 h)$ (単位: m) としてスケーリングする。ここでは $\beta_1 = 10$ m とする。スケーリングの結果、シェルのスパンはモデル EL1 で 20.0 m、モデル EL2 で 25.0 m となる。シェルのライズ H は、モデル EL1 で $H = 3.06$ m、モデル EL2 で $H = 4.42$ m である。有限要素解析における荷重や材料の諸元は、シェル厚さ $t = 0.1$ m、ヤング係数 $E = 20.0$ GPa、ポアソン比 $\nu = 0.2$ とする。シェルの自重について、コンクリートの材料密度 $\rho = 2.4$ kg/m³、 $g = 10$ m/s² とし、 $\rho g t = 2.4$ kN/m² として検討する。指定水平投影応力 $\sigma_x = -1$ は、有限要素解析での水平投影応力 $\sigma_x = -24$ kN/m に相当する。3.3 項に示した係数は、 $\beta_1 = 10$ m、 $\beta_2 = 2.4$ kN/m²、 $\beta_1 \beta_2 = 24$ kN/m となる。

モデル EL1 および 2 について、有限要素解析により得られた水平投影応力の分布をそれぞれ図 3.19, 3.20 に示す。シェル中央での鉛直変位は、モデル EL1 で 0.33 mm、モデル EL2 で 0.31 mm となった。モデル EL1, 2 における $u = 0$ の左側境界の σ_x 分布を図 3.21 に示す。有限要素解析の結果得られる水平投影応力は、どちらのモデルも、図 3.4 に a で示した境界中央では指定値より大きく、図 3.4 に b で示した境界端部では指定値より小さい。形状補正手法において誤差を評価した境界 a において指定水平投影応力との誤差は 10~15% 程度であった。

図 3.22 に、有限要素解析における x 方向の面内応力 s_x の水平投影応力 σ_x に対する比率の分布を示す。ライズが十分に小さいシェルでは、図 2.1 に示す ϕ_x 、 ϕ_y が小さくなるため、水平投影応力と曲面の膜応力の差は小さい。本検討で対象としているシェルについても、シェル曲面の大部分において s_x の σ_x に対する比率は概ね 1.0 である。このことから、水平投影応力を指定値に近づけることにより、シェルの面内応力を近似的に指定値に近づけることができることが確認できた。

3.4.6 シェルの水平投影応力分布一様化のための形状補正手法の検証

3.4.5 項で示した有限要素解析モデルについて、3.3 節に示したアルゴリズムを用いてシェル曲面形状を補正する。図 3.4(a), (b) に示した σ_x 、 σ_y それぞれの誤差評価範囲 a は、境界に沿った直線または曲線で定められる以下の範囲とする。

$$\begin{aligned} \text{モデル EL1:} & \quad -0.50 \leq x \leq 0.50, \quad -0.50 \leq y \leq 0.50 \\ \text{モデル EL2:} & \quad -0.65 \leq x \leq 0.65, \quad -0.65 \leq y \leq 0.65 \end{aligned}$$

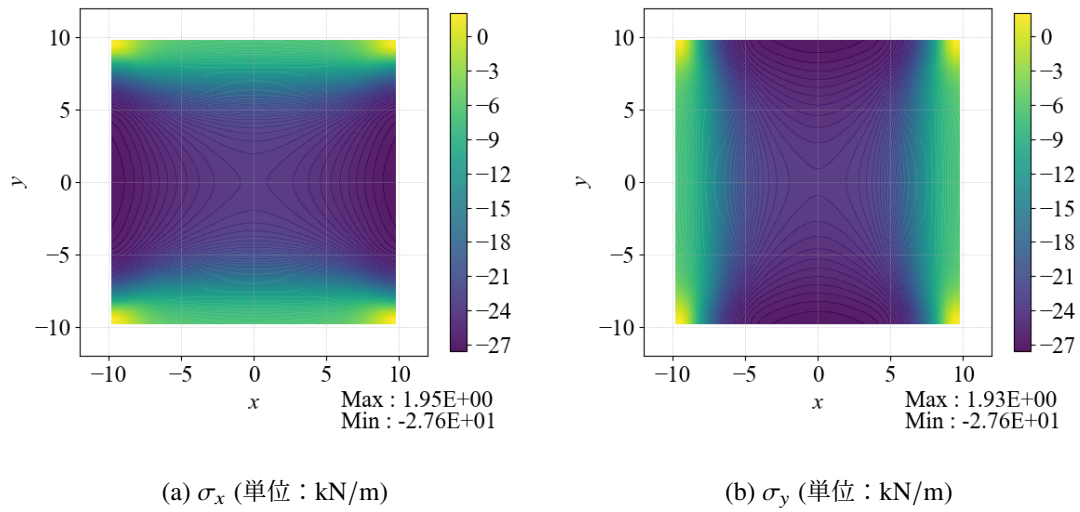


図 3.19: モデル EL1: 有限要素解析における水平投影応力分布

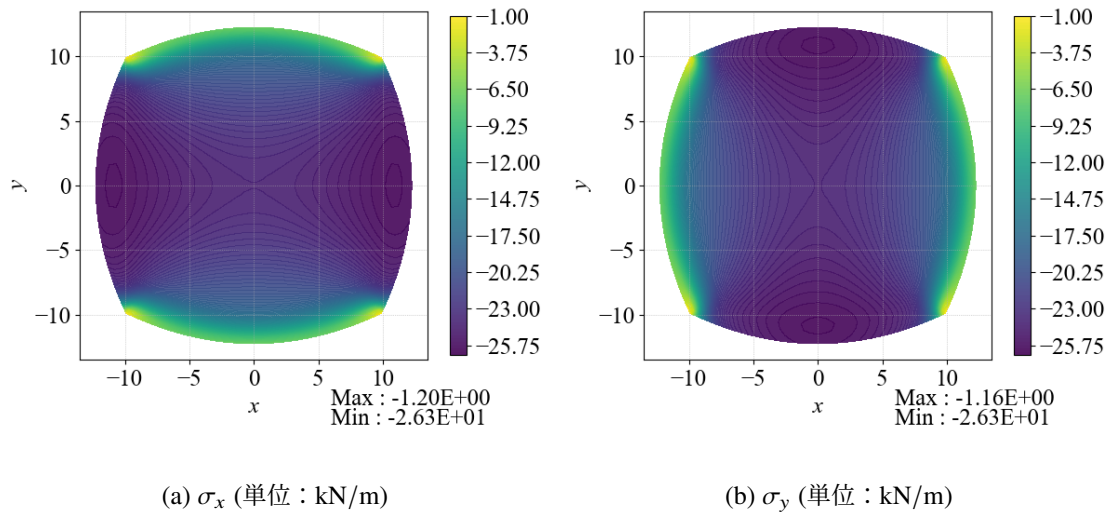


図 3.20: モデル EL2: 有限要素解析における水平投影応力分布

水平投影応力 σ_x , σ_y の作用する方向にそれぞれ平行な境界付近（図 3.4 に B で示した範囲）では、境界と平行な方向の水平投影応力を指定値に一致させることが困難であるため、境界付近の領域 B を除いた図 3.4 に A で示した内部領域での水平投影応力を目標値に近づける。モデル EL2 はモデル EL1 に比べて境界部の影響が小さいため、モデル EL1 より大きな指定範囲とした。3.3 節の計算手順で示した有限要素解析での水平投影応力の目標値は、3.4.5 項に示したスケーリングに基づき、形状設計における指定値を $(\beta_1\beta_2) = 24$ 倍した値（単位 : kN/m）を用いる。

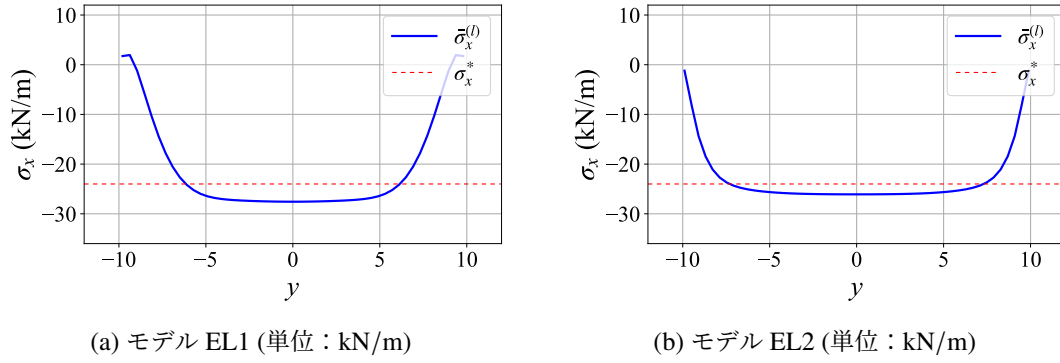


図 3.21: モデル EL1, 2: 有限要素解析における境界 $u = 0$ の水平投影応力分布

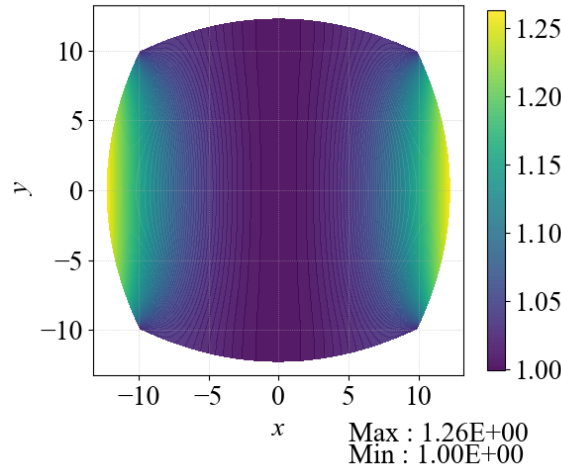


図 3.22: モデル EL2: 水平投影応力 σ_x に対するシェルの面内応力 s_x の比率の分布

指定水平投影応力を修正する繰り返し計算の最終ステップにおいて得られた解（以下，収束解と呼ぶ）の水平投影応力分布を図 3.23, 3.24 に， $u = 0$ の左側境界における σ_x 分布を図 3.25 に示す．モデル EL1, 2 とも収束条件を満たす解を得られた．シェル形状を補正する領域において，水平投影応力は目標値に一致していることがわかる．

図 3.26 に，モデル EL2 の各反復ステップでの誤差 $\zeta_x^{(l)}$ の推移を示す．反復計算により，誤差 $\zeta_x^{(l)}$ が収束していることがわかる．図 3.27 に，モデル EL2 のシェル左側の境界中央にあたる $y = 0$ の位置（図 3.24(a) に赤丸印で示す位置）における $\sigma_x^{(l)}$ と，更新された $\sigma_x^{(l)}$ の履歴を，形状設計における無次元化した値として示す．反復計算により，形状設計過程での応力指定値の絶対値 $\sigma_x^{(l)}$ は減少し，それにともない有限要素解析における境界の水平投影応力 $\bar{\sigma}_x^{(l)}$ の絶対値も減少し，目標値である σ_x^* に収束している．

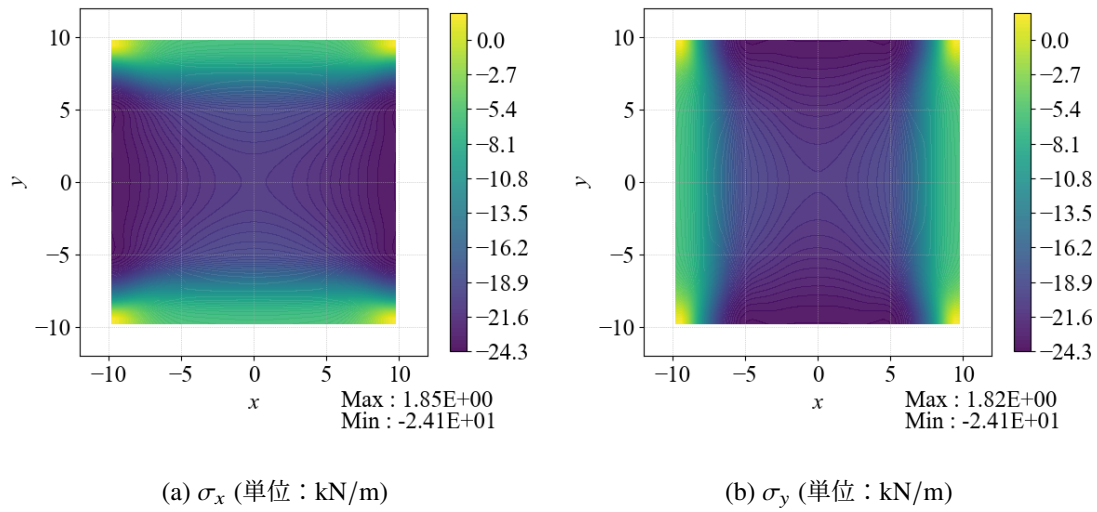


図 3.23: モデル EL1 (収束解) : 有限要素解析における水平投影応力分布

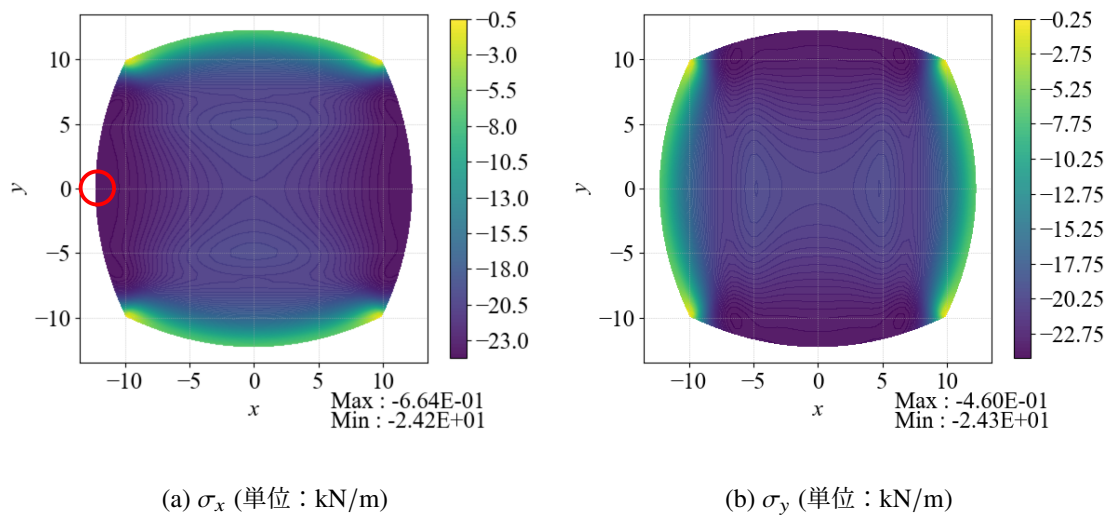
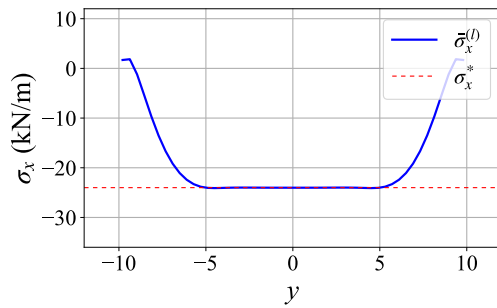


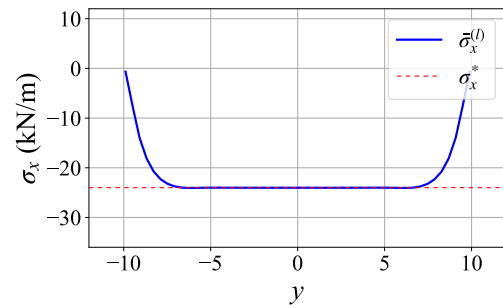
図 3.24: モデル EL2 (収束解) : 有限要素解析における水平投影応力分布

3.4.7 提案手法により得られた自由曲面シェルの力学的特性の分析

形状補正手法により得られたシェルの有限要素解析結果について、モデル EL1, 2 の最大鉛直変位と、ひずみエネルギーを表 3.2 に示す。ひずみエネルギーは、シェル全体の面内応力によるひずみエネルギー E_m 、面外曲げモーメントとせん断力によるひずみエネルギー E_b およびそれらの総和として得られる総ひずみエネルギー $E_t = E_m + E_b$ (単位 : Nm) を示す。モデル EL1, 2 の最大鉛



(a) モデル EL1 (単位 : kN/m)



(b) モデル EL2 (単位 : kN/m)

図 3.25: モデル EL1, 2 (収束解) : 有限要素解析における境界 $u = 0$ の水平投影応力分布

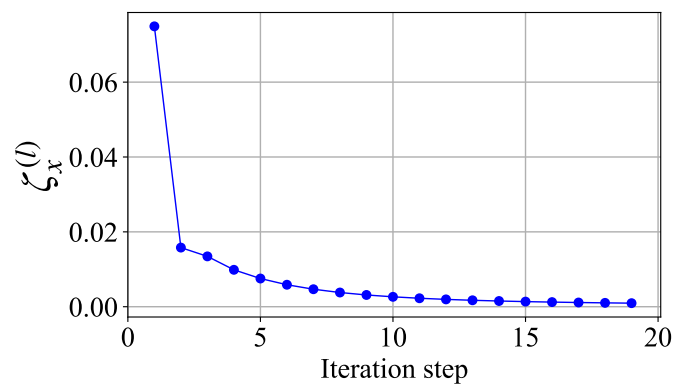


図 3.26: モデル EL2: パラメータ $\zeta_x^{(l)}$ の履歴

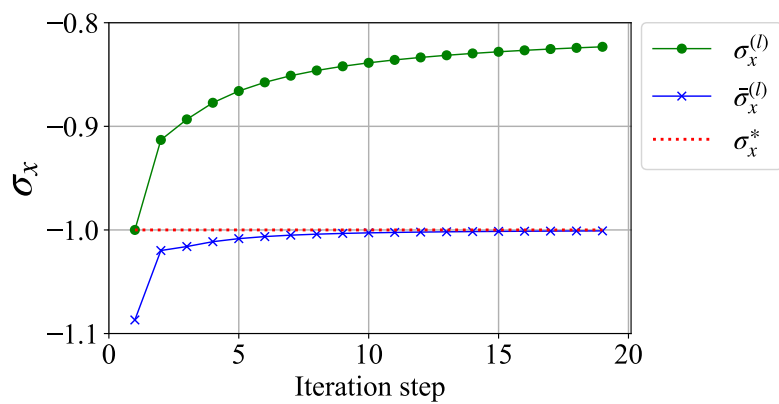


図 3.27: モデル EL2: 境界 $(u, v) = (0, 0.5)$ における無次元化した水平投影応力の履歴

表 3.2: モデル EL1, 2 (収束解) : 有限要素解析における最大鉛直変位とひずみエネルギー

モデル	最大鉛直変位 (mm)	ひずみエネルギー (Nm) (比率 (%))		
		E_m	E_b	E_t
EL1 (収束解)	0.26	71.8 (99.3)	0.54 (0.7)	72.4 (100.0)
EL2 (収束解)	0.25	121.6 (99.3)	0.82 (0.7)	122.4 (100.0)

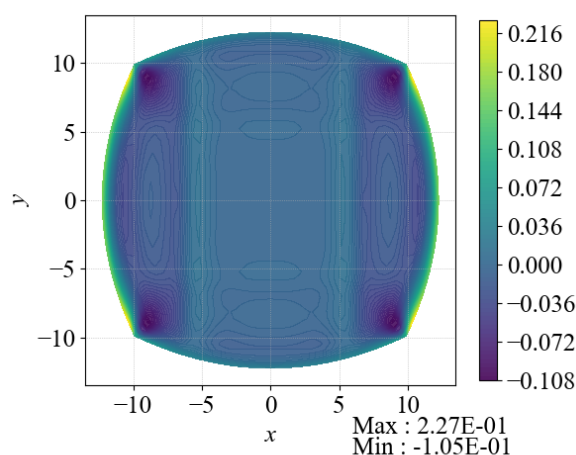


図 3.28: モデル EL2 (収束解) : 面外曲げモーメント M_y の分布 (単位 : kNm/m)

直変位はそれぞれ 0.26 mm, 0.25 mm であり, シェルスパンに対する比率はそれぞれ 1.32×10^{-5} , 1.00×10^{-5} である. また, ひずみエネルギーに着目すると, どちらのモデルも, 総ひずみエネルギーに対する面内応力によるひずみエネルギーの比率 E_m/E_t は 99% 以上であり, 自重に対して膜応力で抵抗する合理的なシェル形状が得られていることがわかる.

有限要素解析ではシェルを面外曲げ剛性を有する要素でモデル化しており, 曲げ応力が生じている. モデル EL2 の収束解について, 図 3.28 に y 軸回りの曲げモーメント M_y (kNm/m) の分布を示す. 曲げモーメントと直応力から得られるシェル要素の縁応力 σ_{bx} は次式により得られる.

$$\sigma_{bx} = \frac{s_x}{t} \pm \frac{6M_y}{t^2} \quad (3.29)$$

図 3.29 に, モデル EL2 の収束解のシェル断面の上端と下端の縁応力 σ_{bx} (MPa) の分布を示す. シェルのほとんどの領域において縁応力は負の値となり引張応力が生じていない. シェル上面の 4 隅の境界付近において縁応力が 0 以上となる部分があり, 引張応力が生じている. またシェル下端はすべて圧縮状態である.

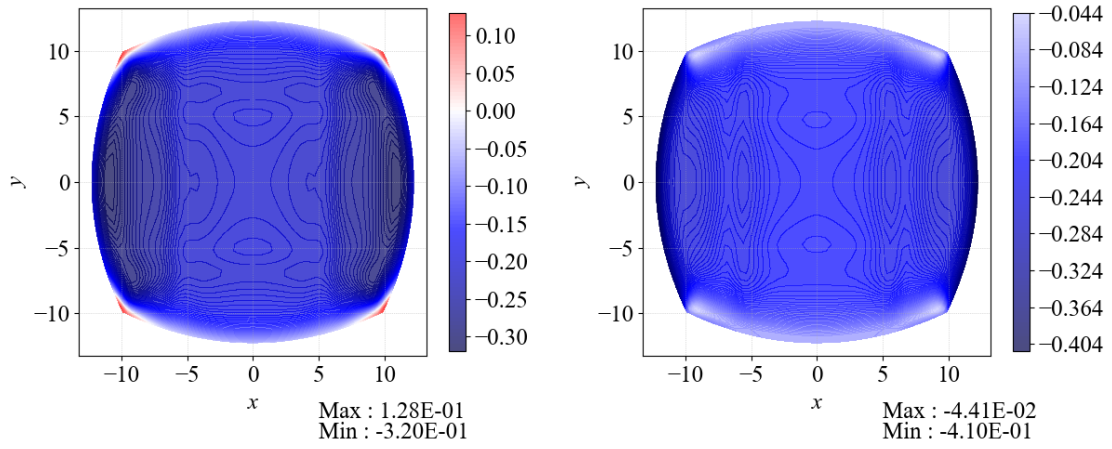


図 3.29: モデル EL2 (収束解) : 有限要素解析におけるシェル断面の縁応力 σ_{bx} の分布

3.4.8 応力一様化手法の適用範囲についての考察

3.1 節で述べたように, Pucher's formulation に基づく既往の形状設計手法 [42,47] は, 構造の材料の特性に基づくひずみや変形の影響は考慮しないため, 形状設計で想定した応力分布と有限要素解析で得られる応力分布には誤差が生じる. ここでは, 平面応力問題の理論を参考に, 適合条件について考察する.

平面応力問題におけるひずみの適合条件は, x , y 方向のひずみ ε_x , ε_y , およびせん断ひずみ γ_{xy} を用いて次のように書ける.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.30)$$

ひずみの適合条件 (3.30) と等方弾性体としての構成則から, 式 (2.6) に示した Airy の応力関数 Φ は次式を満たす重調和関数となる [85].

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.31)$$

∇^2 はラプラシアン ($\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) を表す. 応力関数を用いない場合, 水平投影応力についての条件として式 (3.31) は次のように書ける.

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.32)$$

本研究は, 形状設計手法において適合条件を考慮することはできず, また応力関数を用いた既往の研究でも同様に適合条件は考慮されていない. また曲面を対象としており, 曲面に平面応力問題の理論を直接適用することができないが, シェルのサイズが小さいとき, モデル EL1, 2 のよう

に水平投影応力が適合条件を満たせば、膜応力も適合条件を概ね満たすと考えられる。モデル EL3 のように水平投影応力を変化させて形状を生成した場合には式 (3.32) に相当する条件が満足されない。この場合には、形状設計で想定した応力分布と有限要素解析で得られる応力分布の誤差が大きくなる可能性があり、適合条件の影響の定量的検討については今後の課題としたい。

3.5 3 章の結論

本章では、指定水平投影応力分布を有する自由曲面シェルの形状設計手法を提案した。また、有限要素解析を用いて、材料の特性や境界条件に基づく変形の影響を考慮した場合の応力分布とシェルの力学的特性を確認し、変形を考慮した場合にも一様な応力分布となるシェルの形状を設計する手法を提案した。

本章で得られた知見は以下のとおりである。

1. グラフ曲面として定義した連続体シェルについて、膜応力の鉛直方向の釣合い式を離散化し、線形連立方程式を繰り返し解く方法により、膜応力のみで自重と釣合う形状を設計する方法を提案した。提案手法は既往の手法と同様のシェルの釣合い形状を、より少ない計算コストで生成できる。
2. 水平投影応力分布を設計パラメータとし、せん断応力を平面座標の関数として定義することで、提案手法が非対称なシェル形状に適用可能であることを示した。水平投影応力分布は、水平方向の釣合い方程式を満たすよう指定必要があるが、せん断応力分布をまず定め、これに応じて直応力分布を定める方法により、水平方向の釣合い方程式を満たす応力を指定する手法を提案した。
3. シェルの 1 辺を鉛直反力が生じない自由境界として水平投影応力を指定することで、アーチ型の自由境界を有するシェル形状が得られることを示した。
4. 一様な水平投影応力分布を指定して提案手法で設計したシェル形状を対象として、材料特性を定めて有限要素解析を行い、弾性変形を考慮した場合の水平投影応力分布を境界付近の領域を除いて一様化する手法を提案した。提案手法により、境界付近の領域を除いて水平投影応力分布を一様化することができた。水平投影応力の直応力・せん断応力の各成分を平面座標の関数として定義した場合には、形状設計手法と有限要素解析の応力の誤差が大きくなると思われるが、適合条件の影響の定量的検討については今後の課題としたい。
5. 数値例題において、シェルの一部の領域で鉛直方向の釣合い方程式が双曲型となるモデルについて、提案手法を用いて釣合い形状を得ることができた。一方、提案手法は鉛直方向の釣合い方程式が双曲型となる領域を含むモデルについて、常に収束解を得ることができるわけではない。双曲型となる領域をもつシェルの形状生成において、解が得られるときの条件については第 4 章で取り扱う。

提案手法は水平投影応力を直接指定することができ、水平投影応力を指定することにより境界での水平反力（スラスト）を指定できる．また、ライズが十分に小さいシェルでは、水平投影応力と曲面の膜応力の差は小さい．したがって、弾性変形を考慮した水平投影応力を一様化することで、シェルを等厚断面により構成することが可能となる．

第 4 章

圧縮引張混在型シェルの形状設計

4.1 はじめに

第 3 章では、主に圧縮力のみが生じるシェルを対象とした形状設計について述べた。鉄筋コンクリートや組積造によるシェルの場合には、自重に対して面内の圧縮力のみで抵抗する形状が望ましいが、シェル面内に引張力が生じないという非常に強い制約条件の下で実現できる形状は限定的である。一方で、鉄鋼などの金属系材料や CLT などの木質材料など、引張応力に対して抵抗可能な材料を用いることで、圧縮と引張の混在を許容したより多様なシェル形状の設計が可能となる。

本章では、圧縮引張混在型シェルの形状設計法を提案する。圧縮引張混在型シェルの鉛直方向の釣合い方程式は双曲型となることから、まず、外力に対して圧縮と引張が混在する膜応力で釣合う形状を得るための境界条件の指定方法について、双曲型偏微分方程式の一つである波動方程式の初期値境界値問題を参照することで考察する。2.1 節に示した有限差分法で離散化した釣合い方程式について、線形連立方程式を解くことで外力に対して圧縮と引張が混在する膜応力で釣合う解形状を求める。

双曲型の釣合い方程式について、境界条件が適切に設定されないとき解の存在が必ずしも保証されないことが既往の研究で指摘されている [56]。提案手法は、線形連立方程式の係数行列を用いて解の存在や不定性について判定する。解が不定となる場合に安定的に解形状を得るため、および得られる形状を滑らかな形状とするために、正則化手法とスムージング項を導入することで、圧縮引張混在型シェルを生成することが可能である。また設計者は水平投影応力を直接指定することができる。さらに、1 つの矩形平面領域における形状設計だけでなく、指定した境界形状が特性曲線の方に伝播する双曲型偏微分方程式の性質を利用して、複数の領域からなるシェル曲面形状を接続することで、区分的に滑らかなシェルの形状設計手法を提案する。

数値例題では、提案手法の妥当性を確認するため、波動方程式の初期値境界値問題の陽解法による解形状と、提案手法のシェルの釣合い方程式により得られる解形状を比較する。特性曲線の両側で境界条件が矛盾するときに解が得られない場合（不能）や、解が一意に決まらない場合（不定）について、これらを係数行列のランクを用いて判定できることを示すとともに、解が不定となる場合に正則化項が有効であること、またスムージング項が滑らかな曲面形状の生成に有効であること

を示す。また、釣合い方程式の解について、偏微分方程式における重ね合わせの原理が成立することを確認する。さらに、提案手法を用いて複数の領域からなる圧縮引張混在型シェル曲面を生成する。得られた形状の主曲率分布を確認することで、指定した境界形状がシェル曲面内を特性曲線の方法に伝播することを確認する。

4.2 双曲型偏微分方程式と波動方程式

4.2.1 偏微分方程式の分類

2.1 節において図 2.1 に示した、曲面の高さ h が x, y の関数 $h(x, y)$ で表されるグラフ曲面のシェルについて、 yz 平面と xz 平面にそれぞれ平行な曲面の切断面での垂直応力、せん断応力を xy 平面に投影し、水平面単位長さあたりの力に換算した水平投影応力を、それぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とする。2.1 節で述べた通り、鉛直方向の釣合い方程式は、シェルの z 座標 h の 2 階の偏微分方程式 (partial differential equation, PDE) として式 (2.4) で表される。

2.2 節で示した通り、釣合い方程式における各偏導関数の係数である水平投影応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が次式を満足するとき、釣合い方程式は「双曲型」の偏微分方程式となる。

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 < 0 \quad (4.1)$$

水平投影応力の主応力を σ_1, σ_2 とすると、これらは $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ により式 (3.2) で表される。式 (4.1) が満たされるとき、以下に示すように主応力の積は負となるため、シェルの膜応力において圧縮応力と引張応力が混在する。

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right) \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right) \\ &= \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 < 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

釣合い方程式が双曲型の場合、境界条件によって解が得られない場合があることが、既往の研究で指摘されている [56]。

4.2.2 波動方程式の初期値境界値問題

双曲型の偏微分方程式の例として、波動方程式がある。シェルの釣合い方程式が双曲型の偏微分方程式となる場合について、波動方程式の解法を参照することで偏微分方程式の解が存在するための条件を整理することができる。

偏微分方程式において、独立変数（一般に時間を表す変数）のある点における従属変数の値やその偏導関数を指定する条件を初期条件と呼ぶ。また、偏微分方程式において、対象とする領域の端点における従属変数の値やその偏微分係数を指定する条件を境界条件と呼ぶ。従属変数の値を指定する境界条件を固定境界条件またはディリクレ (Dirichlet) 境界条件、従属変数の偏微分係数の値を指定する境界条件をノイマン (Neumann) 境界条件と呼ばれる。熱方程式や波動方程式のような

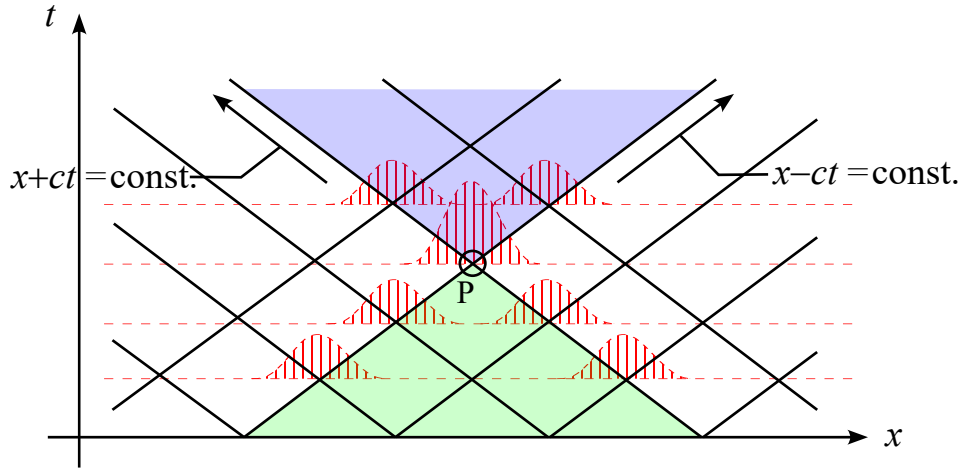


図 4.1: 波動方程式における特性曲線

偏微分方程式において，初期条件が与えられた偏微分方程式の解を求める問題を初期値問題，境界条件が与えられた偏微分方程式の解を求める問題を境界値問題という．また初期値と境界値がともに指定された問題を初期値境界値問題という．

まず，1次元波動方程式の初期値問題の解の導出について示す．次のような空間座標 x と時間 t に関する 1次元波動方程式の初期値問題の解 $h(x, t)$ について考える．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \quad (4.3a)$$

$$h(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (4.3b)$$

ここで， $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は指定された関数である．この問題の解は次のように書ける．これは d'Alembert の公式と呼ばれる [80]．

$$h(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta \quad (4.4)$$

また，波動方程式 (4.3a) は双曲型偏微分方程式であり，以下に示す特性曲線をもつ．

$$x + ct = \text{const.}, \quad x - ct = \text{const.} \quad (4.5)$$

2.2 節に述べたように，特性曲線は与えられた条件が偏微分方程式に従って伝わっていく道筋を表すと解釈することができる．図 4.1 に示すように，特性曲線は 2つの曲線群として表される．波動方程式の解は $x - ct = \text{const.}$ に沿って伝播する進行波と， $x + ct = \text{const.}$ に沿って伝播する後退波の重ね合わせとなる．式 (4.5) で与えた初期値は，この特性曲線上を伝播すると解釈できる．図 4.1 の点 P における解は，緑色で示した点 P 以前の依存領域の解に依存し，また青色で示した点 P 以降の影響領域の解に影響を及ぼす．

波動方程式 (4.3a) は，独立変数のみの関数が恒等的に 0 であることから，斉次方程式であった．

以下では、次式に示すような非斉次の波動方程式の初期値問題について考える。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \quad (4.6a)$$

$$h(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (4.6b)$$

この問題では初期条件と境界条件は 0 として与えた。非斉次の偏微分方程式の解を得るための手法として、デュアメル原理 (Duhamel's principle) [80] がある。この問題の解はデュアメル原理により次のように書ける。

$$h(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\zeta, s) d\zeta ds \quad (4.7)$$

デュアメル原理は、時刻 $t = s$ における斉次の初期値問題の解を積分することで非斉次問題の解を得るというものである。

偏微分方程式を解くためのもう 1 つの重要な手法として、重ね合わせの原理 [78] がある。重ね合わせの原理によれば、線形の偏微分方程式について複数の解が得られたとき、それらの線形結合もまたもとの偏微分方程式の解となる。式 (4.6a) に対して初期値 $h(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ としたとき、波動方程式の解は、重ね合わせの原理により斉次方程式の解を表す式 (4.4) と、非斉次方程式の特解 (4.7) の和として次のように表すことができる。

$$h(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\zeta, s) d\zeta ds \quad (4.8)$$

次に、次式で表されるような 1 次元波動方程式の斉次方程式の初期値境界値問題について考える。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < x < 1, \quad t > 0) \quad (4.9a)$$

$$h(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (0 < x < 1) \quad (4.9b)$$

$$h(0, t) = \varphi(0), \quad h(1, t) = \varphi(1) \quad (t > 0) \quad (4.9c)$$

ここで、 $x = 0, 1$ を固定境界 (ディリクレ境界) とした。この問題の解は次のように書ける。導出の詳細を付録 A に示す。

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos cn\pi t \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{\sin cn\pi t}{cn\pi} \sin n\pi x + \{\varphi(0) + x(\varphi(1) - \varphi(0))\} \quad (4.10)$$

$$\varphi_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x dx, \quad \psi_n = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin n\pi x dx \quad (4.11)$$

4.2.3 直交する 2 つの境界条件を指定した双曲型偏微分方程式の境界値問題

矩形平面領域で定義したシェルについて、互いに直交する 2 つの境界での条件を指定したときに双曲型の釣合い方程式の解が存在することを、重ね合わせの原理を用いて示す。次の偏微分方程式の境界値問題 [PDE-1] について考える。

[PDE-1]

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f(x, y) \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1) \quad (4.12a)$$

$$h(x, 0) = \varphi_a(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (4.12b)$$

$$h(0, y) = \varphi_b(y) \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (4.12c)$$

$y = 0$, $x = 0$ における境界条件を式 (4.12b), (4.12c) で与え, $y = 1$, $x = 1$ における境界条件は与えない。重ね合わせの原理により, 非斉次の波動方程式について, 斉次方程式の解 (斉次解) と特解の和として表される解も波動方程式の解となる。そこで, [PDE-1] の解を, 以下に示す 2 つの偏微分方程式の初期値境界値問題の解の和として表す。

[PDE-2]: y 軸を波動方程式の t 軸とみなした, 「非斉次偏微分方程式の初期値問題」

[PDE-3]: x 軸を波動方程式の t 軸とみなした, 「斉次偏微分方程式の初期値境界値問題」

すなわち, 荷重は [PDE-2] のみで作用させる。[PDE-2], [PDE-3] の解をそれぞれ $h_a(x, y)$, $h_b(x, y)$ とする。それぞれの解形状の関係を図 4.2 に示す。[PDE-2] は次のように書ける。

[PDE-2]

$$\frac{\partial^2 h_a}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 h_a}{\partial x^2} = f(x, y) \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1) \quad (4.13a)$$

$$h_a(x, 0) = \varphi_a(x), \quad \frac{\partial h_a}{\partial y}(x, 0) = \psi_a(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (4.13b)$$

解 $h_a(x, y)$ は式 (4.8) の t を y に, φ を φ_a に, ψ を ψ_a に置き換えることで, 次のように書ける。 $\varphi_a(x)$ は任意の x の関数として与えることができるが, [PDE-1] の $(x, 0)$ における勾配と一致する必要はない。

$$h_a(x, y) = \frac{1}{2} (\varphi_a(x + cy) + \varphi_a(x - cy)) + \frac{1}{2c} \int_{x-cy}^{x+cy} \psi_a(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2c} \int_0^y \int_{x-c(y-s)}^{x+c(y-s)} f(\zeta, s) d\zeta ds \quad (4.14)$$

次に, この結果を用いて, [PDE-3] を次のように定義する。

[PDE-3]

$$\frac{\partial^2 h_b}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_b}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1) \quad (4.15a)$$

$$h_b(0, y) = \varphi_b(y) - h_a(0, y) = \bar{\varphi}_b(y), \quad \frac{\partial h_b}{\partial x}(0, y) = \psi_b(y) \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (4.15b)$$

$$h_b(x, 0) = \bar{\varphi}_b(0), \quad h_b(x, 1) = \bar{\varphi}_b(1) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (4.15c)$$

ここで、[PDE-2] の境界形状 $h_a(0, y)$ と [PDE-3] の境界形状の和が [PDE-1] の境界値 $\varphi_b(y)$ となるよう、関数 $\bar{\varphi}_b(y)$ を式 (4.15b) に示すように定義した。[PDE-2] の解が既知であれば $\bar{\varphi}_b(y)$ は既知であり、 $h_b(x, y)$ は式 (4.10), (4.11) の t を x に、 x を y に、 φ を $\bar{\varphi}_b$ に、 ψ を ψ_b に置き換えることで次のように書ける。

$$h_b(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos \frac{n\pi x}{c} \sin n\pi y + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{c}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{c} \sin n\pi y + \{\bar{\varphi}_b(0) + y(\bar{\varphi}_b(1) - \bar{\varphi}_b(0))\} \quad (4.16a)$$

$$\varphi_n = 2 \int_0^1 \bar{\varphi}_b(y) \sin n\pi y dy, \quad \psi_n = 2 \int_0^1 \psi_b(y) \sin n\pi y dy \quad (4.16b)$$

$\psi_a(x)$ と同様に $\psi_b(x)$ は [PDE-1] の $(0, y)$ における勾配とは一致しない点に注意が必要である。また [PDE-3] は初期値境界値問題であるため、式 (4.15c) の境界条件を満足するよう $\psi_b(0) = \psi_b(1) = 0$ を満足する関数として $\psi_b(x)$ を定義する必要がある。重ね合わせの原理により、式 (4.14) の $h_a(x, y)$ と式 (4.16a) の $h_b(x, y)$ の和は、[PDE-1] の解となる。以上より、互いに直交する 2 つの境界条件を指定したシェルの釣合い方程式の解の存在を、偏微分方程式の初期値境界値問題を参照することで示すことができた。すなわち、境界条件の指定を互いに直交する 2 つの境界のみに対して行うとき、シェルの釣合い方程式が双曲型となる場合においても解の存在が保証される。

4.2.4 波動方程式の陽解法

微分方程式の差分法による近似解法では、まず微分方程式の導関数・偏導関数を差分商で近似する。本研究では、2.1 節に示したように差分近似を用いて偏微分方程式（釣合い方程式）を離散化する。偏微分方程式の数値解法として、差分近似で離散化して得られる漸化式を用いて、初期値と境界値に適合する各格子点の値を時間軸方向に逐次求めていく陽解法がある。提案手法では、陽解法ではなく線形連立方程式を解く方法により解形状を求めるが、本項では提案手法との比較のため、波動方程式における陽解法について以下に示す。

式 (4.9) の波動方程式の初期値境界値問題を対象とする。ただし t 軸方向は $0 < t \leq 1$ の範囲を対象とする。 x, t 方向にそれぞれ N 分割した格子点 (i, j) ($i, j = 1, \dots, N+1$) を考える。格子点の x, t 方向の間隔をそれぞれ $\delta x = 1/N, \delta t = 1/N$ とし、格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ とする。式 (4.9a) について、 t 軸（時間軸）方向および x 軸（空間軸）方向に 2 階中心差分近似を用いると、次のよ

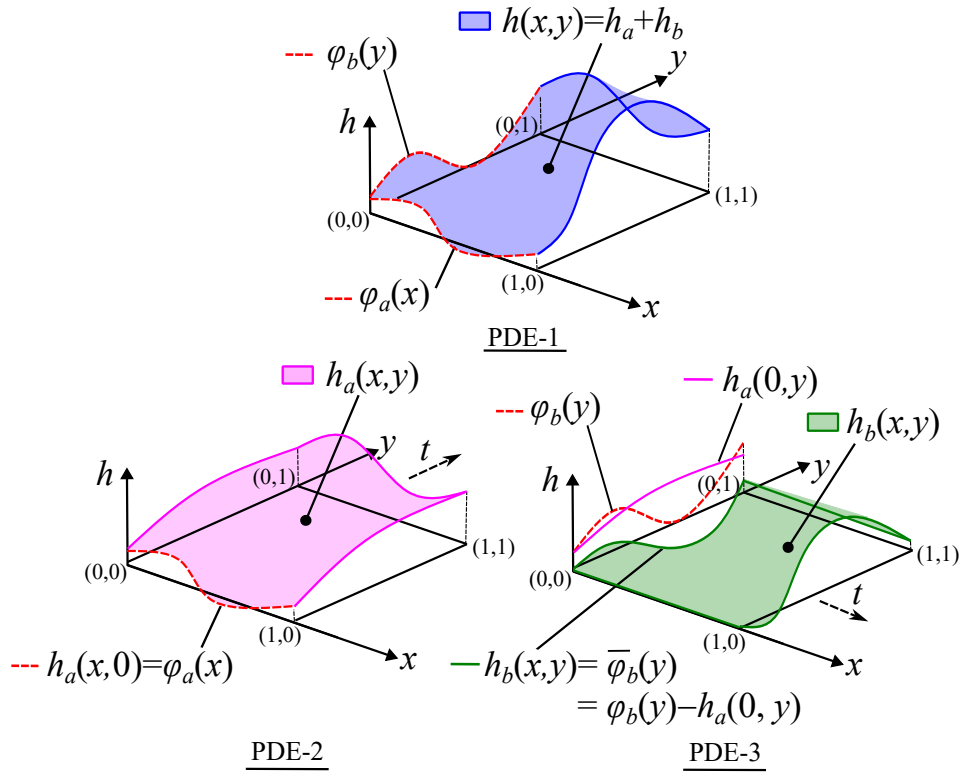


図 4.2: PDE-1, 2, 3 の解形状

うに書ける.

$$\frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta t)^2} - c^2 \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta x)^2} = 0 \quad (4.17)$$

この式を変形して次式を得る.

$$h_{i,j+1} = 2h_{i,j} - h_{i,j-1} + \left(c \frac{\delta t}{\delta x}\right)^2 (h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}) \quad (4.18)$$

初期条件・境界条件と式 (4.18) から, t 軸方向に逐次 $h_{i,j}$ を得ることができる.

初期値境界値問題における陽解法は, 次式を満足するとき数値的に安定であることが知られている [77, 78].

$$c \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1 \quad (4.19)$$

この条件式は CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy condition) とよばれ, この条件が満たされないとき数値解が発散する可能性がある. このように, 波動方程式を陽解法を用いて解くとき, 解の安定性について差分近似の分割数に関する条件が存在する.

4.2.5 境界値問題としてのシェルの形状設計

4.2.2 項と 4.2.3 項において、シェルの釣合い方程式が双曲型偏微分方程式となると、双曲型偏微分方程式の一つである 1 次元波動方程式の解法を参照することで、解の存在について考察した。波動方程式は初期値問題や、ディリクレ境界条件やノイマン境界条件を与えた場合の初期値境界値問題について、数値解法が確立されている。一方で、初期値問題ではなく境界値問題として定義されるシェルの形状設計において、特性曲線により影響を受ける範囲の境界形状が矛盾する場合には、解が得られないことがわかっている [56]。

本研究では、双曲型偏微分方程式の境界値問題として定義される圧縮引張混在型シェルの形状設計について、特性曲線の向きを確認し、既往の研究の主張のように特性曲線により影響を受ける範囲の境界形状が矛盾する場合に解が得られないことを確認する。

特性曲線の向きは、水平投影応力分布によって定義される。鉛直方向の釣合い方程式 (2.4) において、水平投影応力が式 (4.1) を満たすとき、釣合い方程式は双曲型の偏微分方程式となる。2.2 節で述べた一般の双曲型偏微分方程式と同様に特性曲線の単位接ベクトルを (dx, dy) とすると、式 (2.51) の係数について $A = \sigma_x, B = \tau_{xy}, C = \sigma_y$ として次式が成り立つ。

$$\sigma_x(dy)^2 - 2\tau_{xy}dxdy + \sigma_y(dx)^2 = 0 \quad (4.20)$$

4.3 圧縮引張混在型シェルの形状設計

4.3.1 釣合い方程式の差分近似

本章に示す提案手法では、長方形の平面領域を x, y 方向に分割し、各格子点の z 座標を変数として、鉛直方向の釣合い方程式からなる線形連立方程式を解くことで、解形状を得る。まず、鉛直方向の釣合い式 (2.4) を差分法で離散化する。 xy 平面を x, y 方向にそれぞれ $N \times N$ 分割した格子点 (i, j) ($i, j = 1, \dots, N+1$) を考える。格子点の x, y 方向の間隔をそれぞれ $\delta x, \delta y$ 、格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ 、分布荷重を $f_{i,j}$ とすると、式 (2.4) は中央差分を用いて式 (2.26) で表される。

第 3 章では、境界における曲率、勾配を定義する際にシェルの水平投影領域内の格子点の座標のみを用いたが、ここでは図 4.3 に示すように、境界の外側に仮想の格子点を新たに定義する。この仮想格子点の z 座標 $h_{i,j}$ ($i, j = 0, \dots, N+2$) を用いることで、内側の格子点と同様の式を用いて境界上の格子点の曲率および勾配を定義する。例として、 $i = 1$ の境界上の格子点における仮想格子点を用いた偏導関数の導出について図 4.4 に示す。例えば、 $i = 1$ における $\partial^2 h / \partial x^2$ は、仮想格子点の z 座標を含む赤色点線で囲んだ 3 つの格子点の z 座標から求める。仮想格子点を加えることで、格子点の数は $(N+3)^2$ となる。仮想格子点の z 座標も変数とするが、仮想格子点における釣合い方程式は使用しない。

境界条件を指定した後の独立な変数の数を n 、連立方程式の数を m とする。変数である z 座標 $h_{i,j}$ をまとめたベクトルを $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 、変数 $\mathbf{x}$ の係数をまとめた行列を $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 、右辺 $f_{i,j}$ を連立方

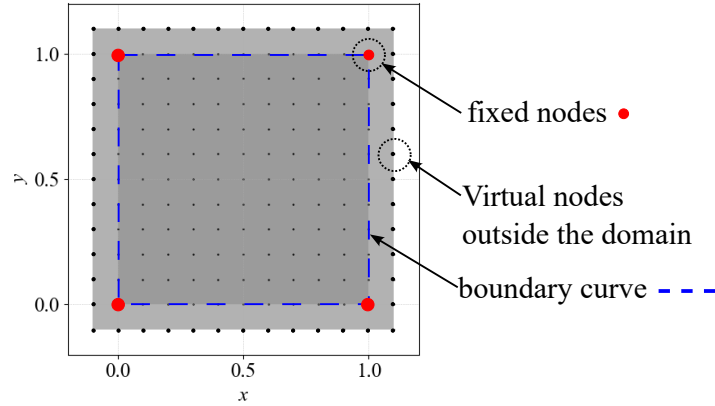


図 4.3: シェルの平面投影領域と境界およびその外側の仮想節点

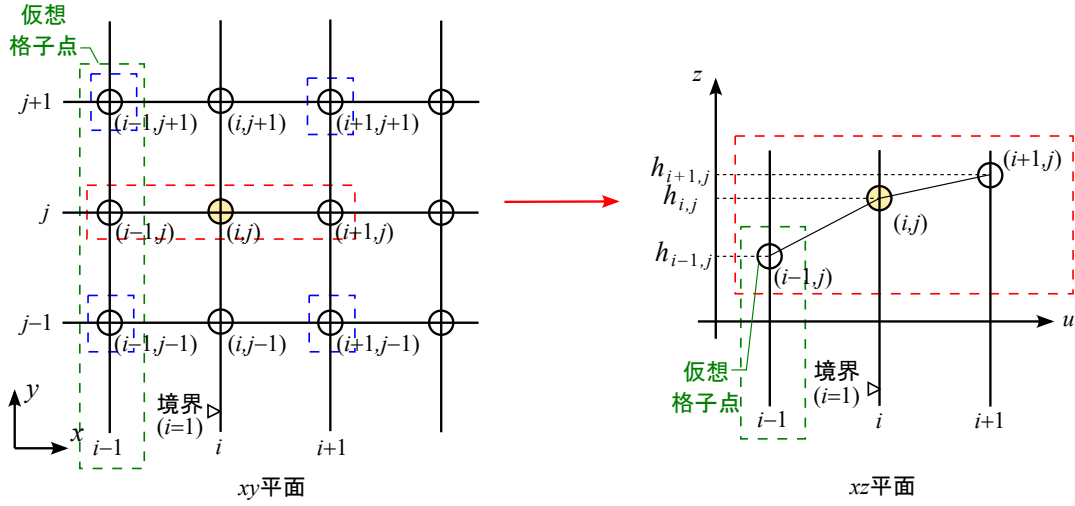


図 4.4: $i = 1$ の境界上の格子点 (i, j) における偏導関数の導出

程式をたてる格子点についてまとめたベクトルを $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ とする．式 (2.4) は次の線形連立方程式として離散化される．

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4.21)$$

境界の外側に仮想格子点を設けるため，境界条件の指定によって方程式の数 m より変数の数 n が大きくなる場合がある．このとき，係数行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ について，係数行列のランクを $r = \text{rank}(\mathbf{A})$ とすると， $r < n$ となり，線形連立方程式の解は不定（underdetermined）となる．また，係数行列 $\mathbf{A}$ の列に右辺の $\mathbf{b}$ を組み合わせた拡大係数行列 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ を考える．拡大係数行列のランク $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ について $r < \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ となるとき，解は不能（overdetermined）となり連立方程式の解は存在しない．あるいは， $\mathbf{A}$ を線形写像とみなしたとき， $\mathbf{b} \in \text{Im}(\mathbf{A})$ が成り立たないとき，同様に連立方程式の解は存在しないと判断できる．

4.2.4 項で述べた通り波動方程式の差分近似による陽解法には，安定性に関して時間方向と空間

方向の分割についての条件を満足する必要がある．提案手法は連立方程式を 1 度解くだけでよく，安定性に関する付加的な条件がない点において，陽解法に比べて優れているといえる．

4.3.2 解の不定性に対する正則化項の導入

線形連立方程式の解が不定となる場合には，係数行列の逆行列が定義できない．解が不定となる問題について，ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いて解を得る方法がある [86]．一般逆行列を用いた場合，とりうる解のうち 2 乗ノルムが最小となる解が得られる．一方で，無数に存在する解の中で，2 乗ノルムが最小となる解が本研究において望ましい形状であるとは限らない．提案手法では，解が不定となる場合に L2 正則化を用いて連立方程式を解く．L2 正則化は最適化問題においてパラメータの L2 ノルムを用いて安定化する手法であり，回帰分析・機械学習の分野において過適合・過学習を避けるための手法としてリッジ回帰とも呼ばれる [87, 88]．正則化を用いることで，解が不定となる場合に一般逆行列を用いず連立方程式を解くだけで解形状が得られる．

まず連立方程式 (4.21) について， $\mathbf{x}$ を引数とする以下の関数 $F(\mathbf{x})$ を定義する．

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2}\lambda_1 \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \quad (4.22)$$

右辺の第 2 項は正則化項であり，変数 $\mathbf{x}$ の L2 ノルムの 2 乗にパラメータ $\lambda_1 > 0$ をかけたものとして定める．この関数 $F(\mathbf{x})$ を最小化する問題の停留条件は次のように書ける．

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) + \lambda_1 \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

この式を整理すると，次式を得る．

$$\{\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{I}\} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \quad (4.24)$$

行列 $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ は半正定値である．一般に，ある対称行列 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が半正定値であるとは，任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} \geq 0$ が成り立つことをいう．半正定値の行列の固有値は非負であるが，0 の固有値を持つ場合がある．提案手法では， $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ が 0 の固有値を持つ場合でも， λ_1 に微小な正の値を与えることにより左辺の係数行列を正則化でき，線形方程式 (4.24) を $\mathbf{x}$ について解くことで，解形状を得ることができる．

4.3.3 解形状の平滑化のためのスムージング項の導入

各格子点の座標を変数として曲面形状を生成すると，特に固定境界が少なく曲面の取りうる形状の自由度が高い場合に，局所的に凹凸のある (corrugated) 形状が得られる場合がある．そのような状況を回避するため，Laplacian フィルタとよばれる平滑化手法 [89–91] を参考に，滑らかな曲面が得られるようスムージング項を導入する．Laplacian フィルタはラプラシアン，すなわち各独立変数に関する 2 階偏導関数の和に基づいて，曲面の曲率が大きいエッジとなる部分を検出したり，エッジに作用して曲面を平滑化するフィルタであり，画像処理や 3D モデリングの分野で利用

される。提案手法では、4.3.2 節で定義した目的関数に、解形状の平滑化のためのスムージング項を加えることで、局所的に凹凸のある形状を回避する。

差分法で離散化した曲面の格子点 (i, j) における x, y についての 2 階の偏導関数は次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta y)^2} \quad (4.26)$$

式 (4.25), (4.26) から仮想格子点を除く $(N+1)^2$ 個の格子点における偏導関数を得る。各格子点における x, y に関する 2 階の偏導関数をまとめたベクトルをそれぞれ $\mathbf{w}_x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_y \in \mathbb{R}^m$ とする。式 (4.25), (4.26) において形状生成における変数 $\mathbf{x}$ の係数をまとめた行列をそれぞれ $\mathbf{D}_x \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{D}_y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ とし、 z 座標を固定した点の $h_{i,j}$ に関する項をまとめたベクトルをそれぞれ $\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y$ とする。 $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ は次のように書ける。

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{D}_x \mathbf{x} + \mathbf{q}_x \quad (4.27)$$

$$\mathbf{w}_y = \mathbf{D}_y \mathbf{x} + \mathbf{q}_y \quad (4.28)$$

2 階の偏導関数をまとめたベクトル $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ を式 (4.24) における関数 $F(\mathbf{x})$ に利用することで、得られる曲面の平滑性を考慮した形状生成が可能となる。

鉛直方向の釣合い方程式からなる連立方程式の変数 $\mathbf{x}$ について、関数 $F(\mathbf{x})$ を次のように再定義する。

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2}\lambda_1 \mathbf{x}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2}\lambda_2 \{\mathbf{w}_x^\top \mathbf{w}_x + \mathbf{w}_y^\top \mathbf{w}_y\} \quad (4.29)$$

右辺の第 2 項は正則化項、第 3 項はスムージング項であり、それぞれパラメータ λ_1, λ_2 ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) をかけたものとして定める。この関数 $F(\mathbf{x})$ を最小化する問題の停留条件は次のように書ける。

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \{\mathbf{D}_x^\top (\mathbf{D}_x \mathbf{x} + \mathbf{q}_x) + \mathbf{D}_y^\top (\mathbf{D}_y \mathbf{x} + \mathbf{q}_y)\} = \mathbf{0} \quad (4.30)$$

この式を整理すると、次式を得る。

$$\left\{ \mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 (\mathbf{D}_x^\top \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^\top \mathbf{D}_y) \right\} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} - \lambda_2 (\mathbf{D}_x^\top \mathbf{q}_x + \mathbf{D}_y^\top \mathbf{q}_y) \quad (4.31)$$

左辺の係数行列は正則であり、線形連立方程式 (4.31) を $\mathbf{x}$ について解くことで、解形状を得る。パラメータ λ_1, λ_2 を正の微小な値として与えることで、得られる解の誤差も微小な値に抑えることができ、かつ 2 階の偏導関数の小さい曲面が得られる。2 階の偏導関数は曲率に対応する。

スムージング項のみで式 (4.31) の係数行列が正則となるように偏微分方程式に適合する境界条件を与える場合には、 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ とすることができる。一方、スムージング項のみで式 (4.31) の係数行列が特異となるような、式 (4.29) の右辺第 3 項が最小となる $\mathbf{x}$ が複数存在する場合には、スムージング項のみでは解が一意に定まらないため、正則化項とスムージング項の両方の係数について $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ とする必要がある。

4.3.4 荷重項をシェルの自重とする場合の解法

鉛直方向の釣合い方程式の荷重項 f を定数とすると、連立方程式を 1 度解くだけで釣合い方程式を満たす曲面形状が得られる。一方、荷重項を 2.1 節に示した式 (2.5) によって曲面の勾配の関数として定義した場合には、繰り返し計算が必要となる。荷重項 f は、シェルの xy 平面への単位水平投影面あたりの z 軸負の方向の分布荷重である。シェルの材料密度を ρ 、板厚を t 、重力加速度を g とすると、自重の作用するシェルの荷重項 f は式 (2.5) で表され、また有限差分法により離散化したとき式 (2.27) のように書ける。荷重が曲面形状の勾配に依存するときには、第 3 章と同様の繰り返し計算によりその影響を考慮する方法を採用する。繰り返し計算の概要を以下に示す。

1. 水平投影応力と境界形状を設定する。
2. $h = 0$ と仮定して釣合い方程式の右边を $f = \rho g t$ とする。線形連立方程式を解き、格子点の z 座標 h を得る。
3. 前ステップで得られたシェル形状に基づき式 (2.27) より f を求める。
4. 得られた f を定数として式 (4.31) の右边に代入し、鉛直方向の釣合い方程式に基づく連立方程式を解き、シェル形状を更新する。
5. 各格子点での $h_{i,j}$ の変化の平均 ε_a を次式により求める。ここで上添え字 (l) は反復計算のステップ数を示す。

$$\varepsilon_a^{(l+1)} = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} |h_{i,j}^{(l+1)} - h_{i,j}^{(l)}| \quad (4.32)$$

6. $\varepsilon_a^{(l+1)}$ が指定された正の微小値 $\bar{\varepsilon}$ 以上のとき Step 3 に戻る。
7. 解形状を出力して反復計算を終了する。

4.3.5 区分的に滑らかな圧縮引張混在型シェルの形状設計

4.2.3 項では、互いに直交する 2 つの境界条件を指定したシェルの釣合い方程式の解の存在を、偏微分方程式の初期値境界値問題を参照することで示した。これにより、釣合い方程式が双曲型となる水平投影応力を指定した場合でも、互いに直交する 2 つの境界に限り境界条件を指定することができ、かつ解の存在が保証される。そこで本研究では、シェルの互いに直交する 2 つの境界の形状を指定して、図 4.5 に A, B, C, D で示す複数の領域でシェルを生成し、これらを接続する手法を提案する。隣り合うシェルの境界部は、すでに生成したシェルの境界形状をもう一方のシェルの境界形状として指定することで、各シェルの境界を G^0 連続となるよう接続することが可能となる。 G^0 連続とは幾何学的な連続性を示す指標のうち、位置連続性のみを要求する指標である。 G^0 連続となる部分において、シェルの曲率や勾配は連続的に変化する必要がなく、曲面が折れ曲がることも許容される。

例えば領域 A のシェル形状を生成し、得られた境界 b の形状を、B のシェル形状の生成の際に

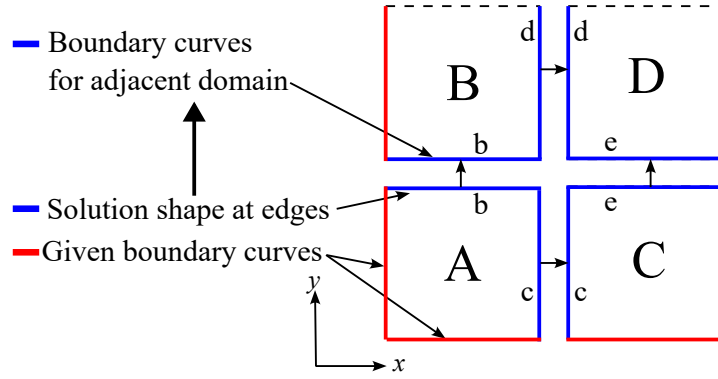


図 4.5: 各領域の境界形状の関係

境界条件として指定する．それぞれのシェルの形状生成においては，図中左側と下側の境界の形状を指定し，釣合い方程式が双曲型となるよう水平投影応力を与えて 4.3.3 節で提案した手法を用いて解形状を生成する．本手法では，境界条件を指定する境界は矩形の境界において互いに直交する 2 つの辺となるため，釣合い方程式が双曲型となる水平投影応力を指定した場合にも解形状を得ることができる．また，図 4.5 では領域の数は 4 としたが，領域の数を変えることも可能である．

4.4 数値例題

数値例題としてモデル HY1～5 の結果を示す．それぞれのモデルの境界条件は各項に示す．モデル HY1～4 の水平投影応力と荷重を表 4.1 に示す．

曲面生成において，曲面形状は荷重と応力の比率により決定されるため無次元化し，長さと荷重の単位は省略する．モデル HY1～4 の曲面の水平投影面は $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ の正方形領域とし，格子の分割数は x , y 方向ともに $N = 30$ とする．モデル HY1～4 の平面形状，格子点配置を図 4.6 に示す．モデル HY5 の諸元は 4.3.5 項に示す．曲面生成のプログラムは Python3 を用いて作成し，鉛直方向の釣合い方程式を離散化した線形連立方程式は，数値計算ライブラリである NumPy [81] を用いて解く．解析結果の図化には Matplotlib [83] を用いる．

4.4.1 波動方程式の陽解法との比較による妥当性確認

まず，提案手法によって得られる解形状と，1 次元波動方程式の 2 階中心差分による陽解法による解を比較することで，提案手法の解の妥当性を検証する．それぞれの手法で曲面形状を生成し，各格子点における z 座標の差をもとに誤差を評価する．表 4.1 に示すモデル HY1 の鉛直方向の釣合い方程式は次のように書ける．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1) \quad (4.33)$$

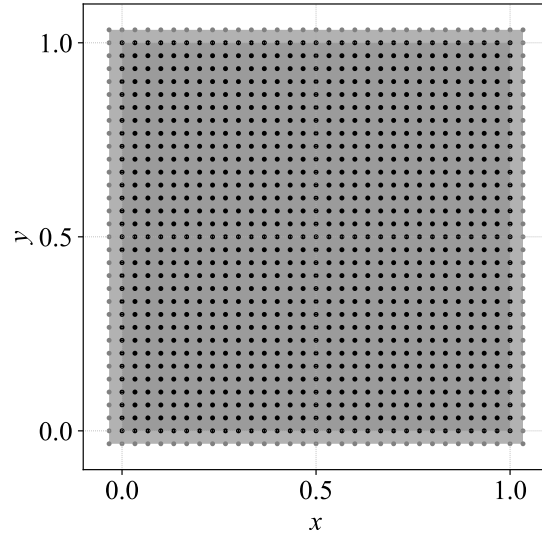


図 4.6: モデル HY1～4 : 平面形状

表 4.1: モデル HY1～4: 水平投影応力 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ と分布荷重 f

モデル	$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$	f
HY1	$(1.0, -1.0, 0)$	0
HY2	$(0, 0, -1.0)$	4.0
HY3	$(0, 0, -1.0)$	0
HY4	$(0, 0, -1.0)$	式 (2.27) で定義される自重

モデル HY1 の $y = 0$ における境界形状を次の関数 $\varphi(x)$ で定義する.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0.2 \cos \{4\pi(x - 0.5)\} + 0.2 & (0.25 \leq x \leq 0.75) \\ 0 & (0 < x < 0.25, \quad 0.75 < x < 1) \end{cases} \quad (4.34)$$

$x = 0, 1$ における境界は $h(0, y) = h(1, y) = 0$ とする. 以上の条件により得られるシェルの釣合い方程式の解形状は, 式 (4.33) で表される偏微分方程式 (波動方程式) について, 次の初期条件と境界条件を与えたときの解と一致する.

$$h(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (0 < x < 1) \quad (4.35a)$$

$$h(0, y) = h(1, y) = 0 \quad (0 < y < 1) \quad (4.35b)$$

式 (4.33) の波動方程式の特性曲線は x, y 軸と 45 度, 135 度で交差する方向であるため, $y = 0$ における境界形状の半分の振幅の波形が, y 軸に対して 45 度方向と 135 度方向にそれぞれ伝播する. $x = 0, 1$ のディリクレ境界 (固定境界) では振幅の正負が反転するため, $y > 0.5$ では $h < 0$ の波形が伝播する.

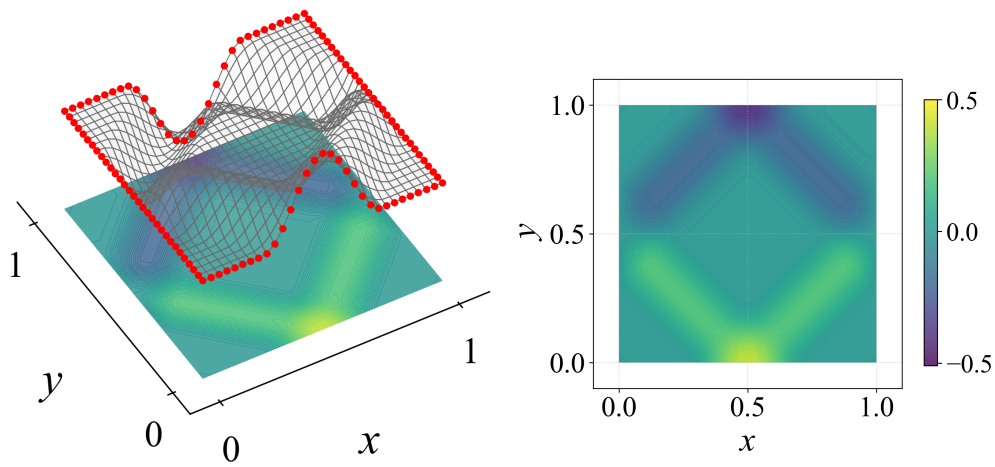


図 4.7: モデル HY1: 解形状

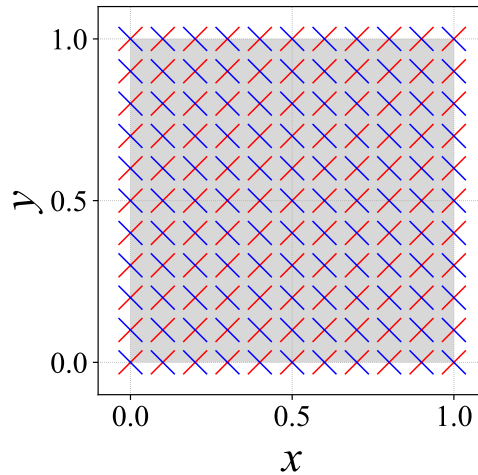


図 4.8: モデル HY1: 解形状の特性曲線の向き

まず，この波動方程式の初期値境界値問題を 4.2.4 項で述べた陽解法で解く．すなわち，偏微分方程式を 2 階中心差分で離散化して得られる漸化式を用いて $y = 0$ から順に y 軸方向に各格子点の z 座標を算出する．得られた曲面形状を図 4.7 に示す．図中のコントアは曲面の高さ h の分布を示す．また，格子点における特性曲線の単位接ベクトルの向きを図 4.8 に示す．

次に，4.3 節で提案した手法を用いて釣合い形状を求める．波動方程式の初期値境界値問題を陽解法で解いて得られた解の $y = 1$ における形状は $h(x, 1) = -\varphi(x)$ であり，これを境界条件として与える．このとき提案手法により得られた曲面形状は図 4.7 と同様の形状であった．提案手法を用いた形状設計において z 座標を指定した点を，図 4.7 中に赤色で示す．本例題は，正則化項を与えずともスムージング項を与えれば線形連立方程式 (4.31) の左辺の係数行列が正則となるため，式 (4.29) の目的関数に用いたパラメータは $\lambda_1 = 0$ ， $\lambda_2 = 10^{-9}$ とした．スムージング項に関する係数 λ_2 は大きいほどスパイク状の凹凸を小さくすることができ，これにより反復解法の収束性を改善

することができる。一方で、係数 λ_2 が大きいほど釣合い方程式の誤差は大きくなるため、得られる形状の精度の観点からは小さくすることが望ましい。

提案手法により得られた格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ 、陽解法によって得られた z 座標を $\bar{h}_{i,j}$ とし、次式でその誤差を評価する。

$$e = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |h_{i,j} - \bar{h}_{i,j}|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |h_{i,j}|} \quad (4.36)$$

誤差 e の値は $e = 3.94 \times 10^{-5}$ と非常に小さく、適切な境界形状を指定すれば、提案手法を用いて陽解法と同等の精度で解形状を得ることができることを確認した。

4.4.2 解の存在と不定性についての検証

境界条件を変化させたときの、差分化した釣合い方程式の解の存在と不定性について検討する。モデル HY2 を対象として、釣合い方程式の解が不定となる場合に、式 (4.29) に示す正則化項とスムージング項の有効性、および境界条件が適合しない場合に釣合い方程式の解が存在しないことを確認する。

表 4.1 に示すモデル HY2 の鉛直方向の釣合い方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -2 \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1) \quad (4.37)$$

式 (4.37) は、 $u = x + y$, $v = x - y$ と座標変換すると次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = -2 \quad (0 < (u+v)/2 < 1, \quad 0 < (u-v)/2 < 1) \quad (4.38)$$

上式と式 (4.3a) を比較すると、 u 方向を時間軸とする波動方程式とみなすことができ、また式 (4.5) に示す特性曲線は $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ で表される。

以下に、式 (4.37) を満足するモデル HY2 の解形状と、式 (4.29) の目的関数に用いたパラメータや境界形状を変更したモデル HY2a~2d の解形状の比較について述べる。

- 境界の z 座標をすべて指定したモデル HY2 と、水平投影応力と荷重はモデル HY2 と同様であり、 z 座標を指定する格子点を対角の 2 つの頂点のみとしたモデル HY2a について、提案手法により得られた解形状を図 4.9 に示す。このとき、式 (4.29) の目的関数に用いたパラメータは $\lambda_1 = 10^{-9}$, $\lambda_2 = 10^{-9}$ とした。
- モデル HY2, 2a に対して、 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ とすると、線形連立方程式 (4.31) の左辺の係数行列が特異行列となり解が得られない。モデル HY2, 2a では解形状を得ることができたことから、提案手法が、係数行列が特異行列となり解が不定となる場合に有効であるといえる。

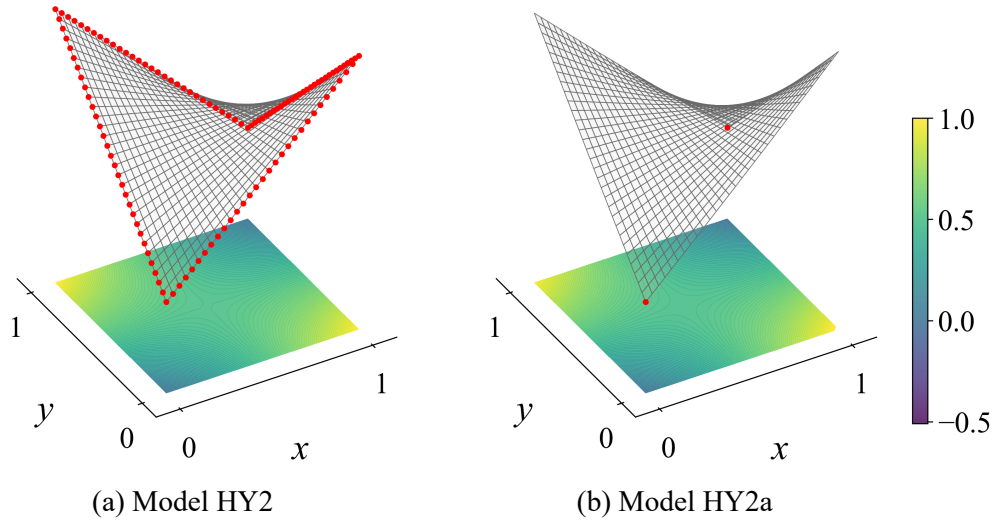


図 4.9: モデル HY2, 2a: 解形状

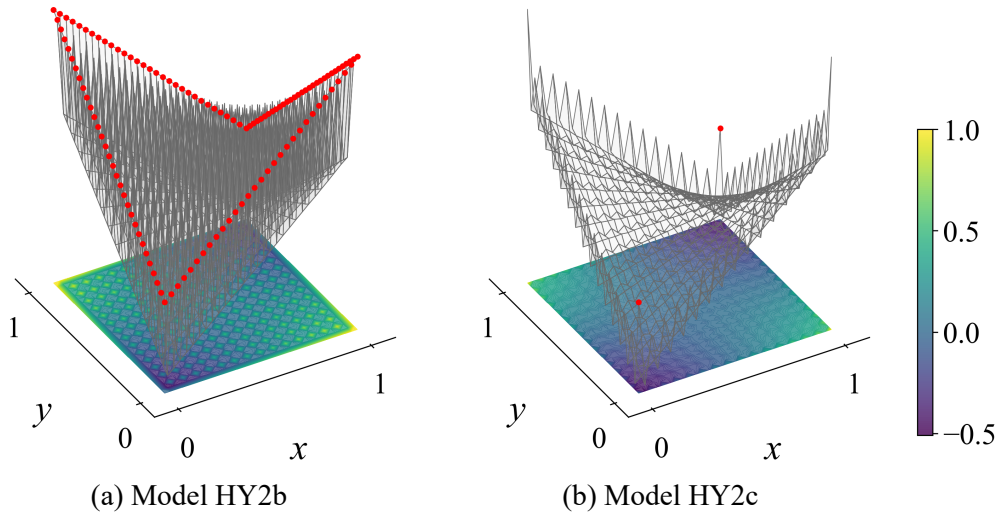


図 4.10: モデル HY2b, c: 解形状

- モデル HY2, 2a について $\lambda_1 = 10^{-9}$ は変更せず, $\lambda_2 = 0$ とした場合に得られる解形状をモデル HY2b, 2c として図 4.10 に示す. モデル HY2b, 2c とも解は得られるが, 得られた解は格子点ごとに細かなスパイク状の凹凸を持つ形状となっており, 滑らかな解が得られない. 図 4.9 と図 4.10 を比較することで, スムージング項の有効性を確認することができる. なお, 座標を固定する点が少ないモデル HY2a は $\lambda_1 = 0$ のとき連立方程式 (4.31) の左辺の係数行列が特異行列となり解が得られない. これは, 座標を固定した格子点を通る平面が複数存在するため, スムージング項によって解曲面の座標軸方向の曲率が一意に定まるときにも, 固定点を通る平面と曲率分布を満たす曲面との和として, 解が複数定義できるためである.
- 次に, 境界条件を満足する解がない場合について, モデル HY2d を用いて検討する. モデル

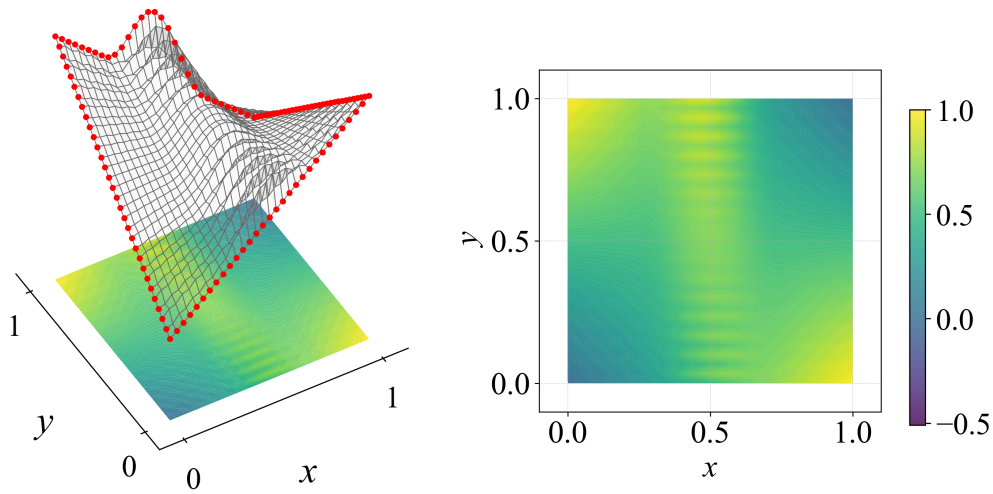


図 4.11: モデル HY2d: 解形状 (不能)

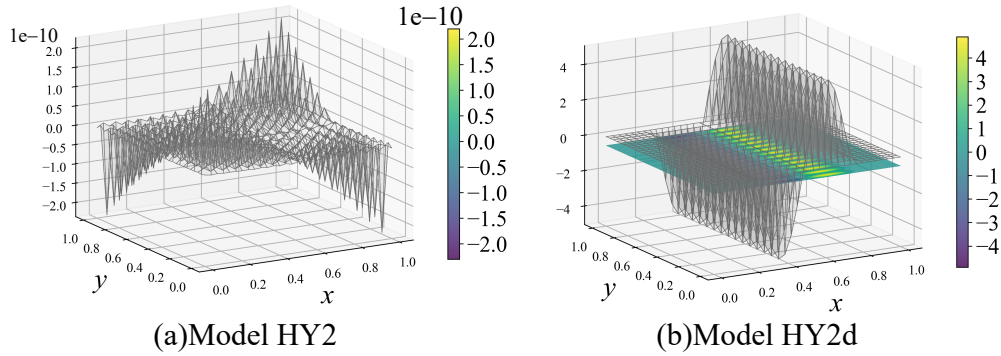


図 4.12: モデル HY2d: 誤差の分布

HY2d は図 4.9 に示したモデル HY2 の $y = 1$ における境界形状を正弦波の形状を加えることで変化させ、その他の条件を同一としたものである．パラメータは $\lambda_1 = 10^{-9}$ 、 $\lambda_2 = 10^{-9}$ とした．得られる解形状を図 4.11 に示す．境界条件が特性曲線の両端で矛盾するため、図 4.12 に示すように、モデル HY2d の各格子点の釣合い方程式の誤差は、モデル HY2 と比べて大きい．

表 4.2 に、本項で示したそれぞれのモデル HY2~2d および後述するモデル HY2e について、釣合い方程式の係数行列 $\mathbf{A}$ のサイズとランク $r = \text{rank}(\mathbf{A})$ 、および拡大係数行列のランク $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ を示す．また各モデルの解の誤差ノルム $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ についても合わせて示す．

HY2d を除いた他のモデルは、 $r = \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ であることから解は存在するが、 $n > r$ であることから、係数行列が特異行列となり解は不定となる．境界条件が特性曲線の両端で矛盾するモデル HY2d は $r < \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ となっており、連立方程式が不能となる．得られた解の誤差ノルム $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ も、他のモデルに比べて大きな値を示す．このように提案手法は、釣合い条件と境界条

表 4.2: モデル HY2～2e: 釣合い方程式を離散化した線形連立方程式のパラメータ比較

モデル	m	n	r	rank(A, b)		$\ Ax - b\ $
HY2	961	961	900	900	(不定)	1.28×10^{-9}
HY2a	961	1087	961	961	(不定)	4.88×10^{-9}
HY2b	961	961	900	900	(不定)	4.17×10^{-10}
HY2c	961	1087	961	961	(不定)	4.49×10^{-10}
HY2d	961	961	900	901	(不能)	5.18×10^1
HY2e	961	961	900	900	(不定)	1.95×10^{-6}

件を満足する解が存在するか否かを、釣合い方程式を差分化した線形連立方程式の係数行列のランクに基づく解の存在や不定性を確認することで判断できる。

4.4.3 重ね合わせの原理についての検証

偏微分方程式である釣合い方程式の解形状について、4.2.3 項に示した重ね合わせの原理により、斉次解と特解の和として表される解も釣合い方程式の解となることを示す。

表 4.1 に示すモデル HY3 の鉛直方向の釣合い方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0 \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1) \quad (4.39)$$

水平投影応力の値が同じモデル HY2 と同様の座標変換により、モデル HY3 の釣合い方程式の特性曲線は $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ で表される。モデル HY3 の $y = 0$ における境界形状はモデル HY1 と同様に式 (4.34) で定義し、 $x = 0, 1$ における境界は $h(0, y) = h(1, y) = 0$ とする。モデル HY3 の釣合い方程式 (4.39) は 2.2 節に示す式 (2.45) の形式となることから、特性曲線が x, y 軸に平行となるため、 $y = 1$ での境界条件は $h(x, 1) = \varphi(x)$ とする。

提案手法で得られた解形状を図 4.13(a) に、格子点における特性曲線の向きを図 4.14 に示す。 $y = 0$ における境界形状、すなわち波動方程式における初期値と同じ振幅の波形が、 y 軸に平行に伝播する形状が得られた。図 4.14 に示す特性曲線の向きはこれと整合している。

モデル HY2 とモデル HY3 は水平投影応力の定義が一致するため、偏導関数の係数が同一の波動方程式とみなすことができる。モデル HY3 の解形状は斉次解、モデル HY2 の解形状は非斉次波動方程式の特解であり、釣合い方程式が各偏導関数の係数が定数の線形偏微分方程式であることから、重ね合わせの原理によりこれらの解の和もまた釣合い方程式の解となる。そこで、境界形状はモデル HY2 と 3 の和として定義し、水平投影応力と荷重をモデル HY2 と同様としたモデル HY2e を定義する。提案手法を用いて得られたモデル HY2e の解形状を図 4.13(c) に示す。得られた形状は、各格子点について図 4.13(a), (b) に示すモデル HY3 と 2 の解形状の z 座標の和をとることで得られる形状と一致する。モデル HY2e の各パラメータについても表 4.2 に示す。

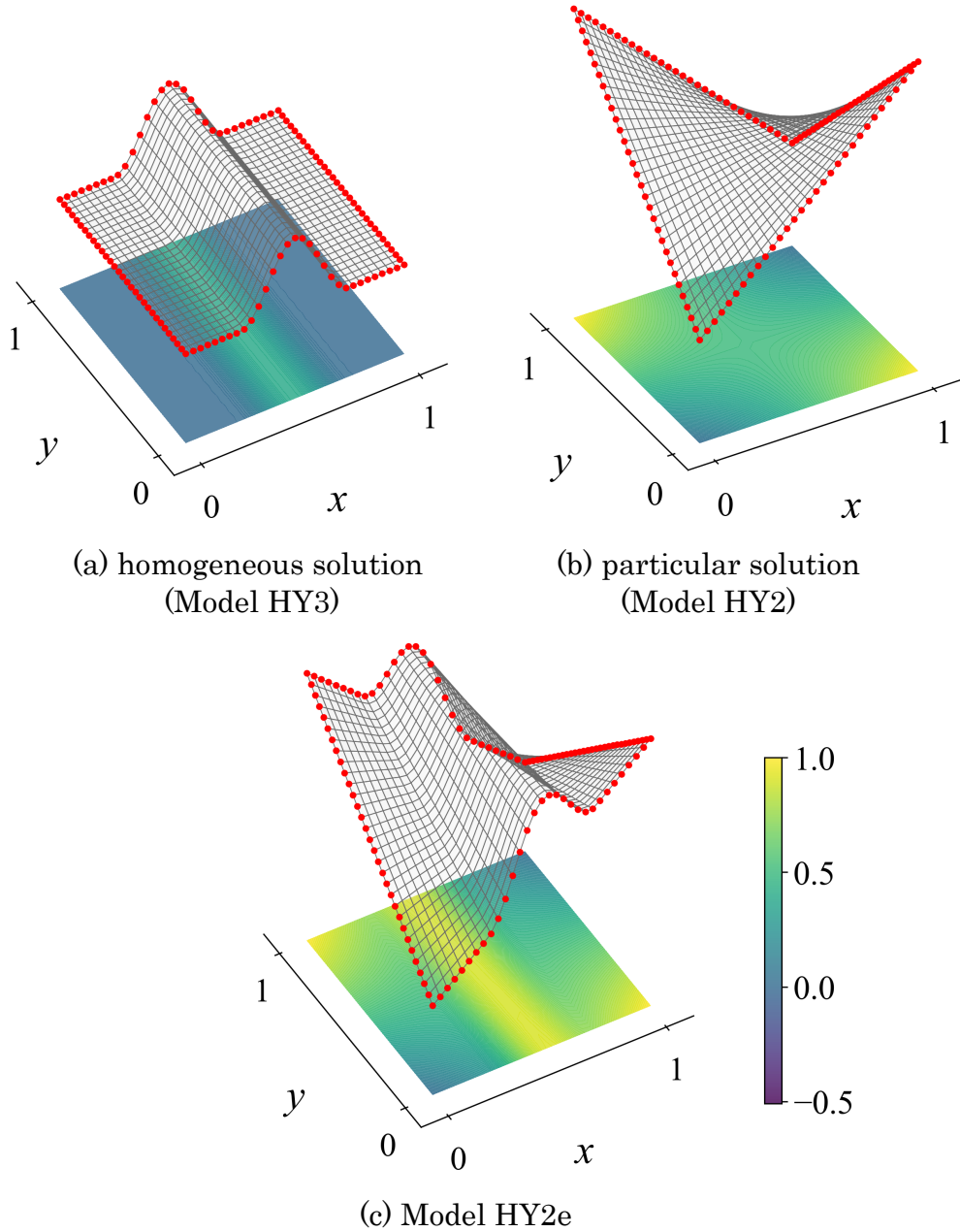


図 4.13: モデル HY3: 解形状

4.4.4 荷重項をシェルの自重とする場合の検討

ここでは, 4.3.4 項に示した荷重項が形状の関数として表される場合について検討する. $x = 0$, $y = 0$ の境界を次式で表される直線上の点として指定したモデル HY4 を対象とする.

$$h(x, 0) = 0.5x, \quad h(0, y) = 0.5y \quad (4.40)$$

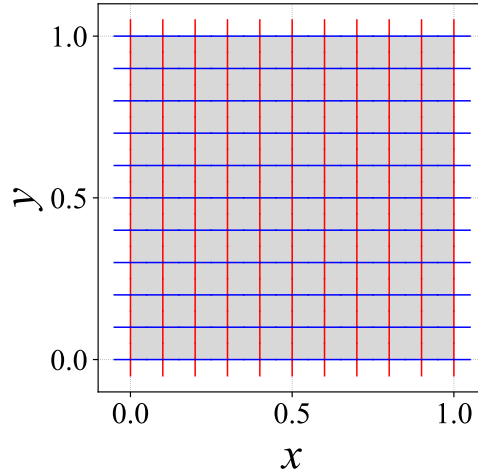


図 4.14: モデル HY3: 解形状の特性曲線の向き

自重を想定して荷重 f は式 (2.27) で定義し $\rho g t = 1$ とする. 式 (4.29) の目的関数に用いたパラメータは $\lambda_1 = 10^{-9}$, $\lambda_2 = 10^{-9}$ とする. また, 4.3.4 項に示した繰り返し計算における収束判定のためのパラメータは $\bar{\varepsilon} = 1 \times 10^{-11}$ とする. 荷重項を一定値 $f = 1$ としたときの解形状を図 4.15(a) に, 自重を考慮して分布荷重とした場合の解形状を図 4.15(b) に示す. また図 4.15(c) に分布荷重とシェル高さに関する 2 つのモデルの比率を示す. 図 4.15(a) に示した解形状の対角方向のライズスパン比は 0.35 程度である. 荷重項を一定値としたときは, 双曲放物面が得られ, 自重とした場合には荷重項の影響によりシェル形状が変化しているが, その変化率はシェル高さの 7% 程度と小さい. 荷重項はシェル曲面の勾配に応じて増加するが, 本例題のように比較的シェルのライズが小さい場合には得られる形状への影響は小さい.

4.4.5 区分的に滑らかな圧縮引張混在型シェル曲面の形状設計

本節では複数の領域でシェル曲面を生成し, それらを接続する手法について有効性を検討する. 4.3.5 項に示す手法を 2×2 の領域からなるシェル曲面に適用する.

図 4.16 に示すように曲面の水平投影面は $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ の正方形領域とし, これを 4 つの正方形領域に分割する. 各領域の格子の分割数は x , y 方向ともに $N = 30$ とする. 領域 A,B,C,D の各領域における水平投影応力分布を表 4.3 に示す. また, 荷重項は $f = 1$ として一定値とする. 指定する境界形状は次式による.

$$\begin{aligned} h(0, y) &= 0.5 \sin \frac{\pi y}{2} \quad (0 \leq y \leq 2), \\ h(x, 0) &= \begin{cases} 0.1 \sin 2\pi x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0.2 \sin 2\pi x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.41)$$

式 (4.29) の目的関数に用いたパラメータは $\lambda_1 = 10^{-9}$, $\lambda_2 = 10^{-9}$ とする.

得られた解形状を図 4.17 に, 境界部や各領域の接続部を除く解形状の格子点における主応力方向の分布を図 4.18(a) に, 主曲率方向の分布を図 4.18(b) に示す. 主応力分布図は線が赤のとき引

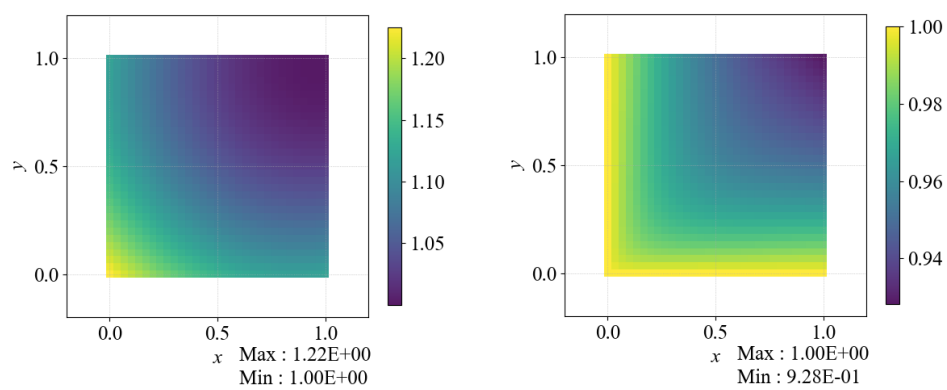
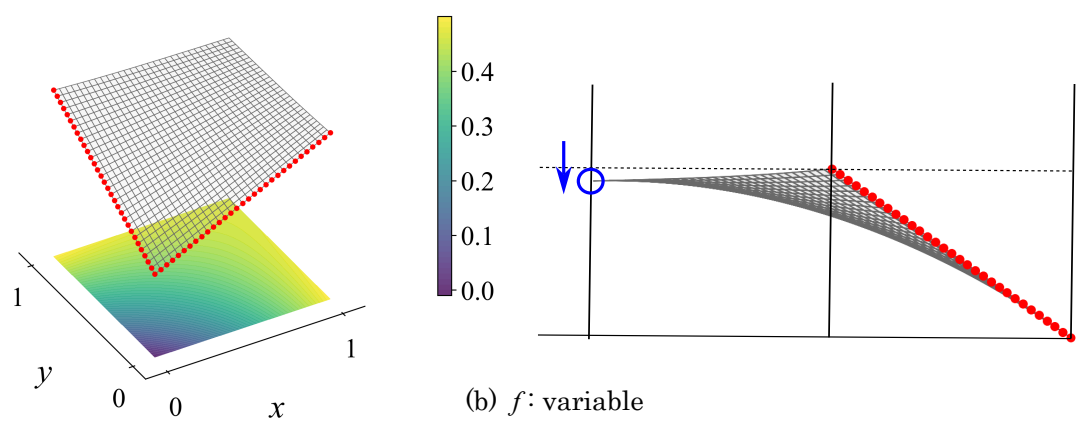
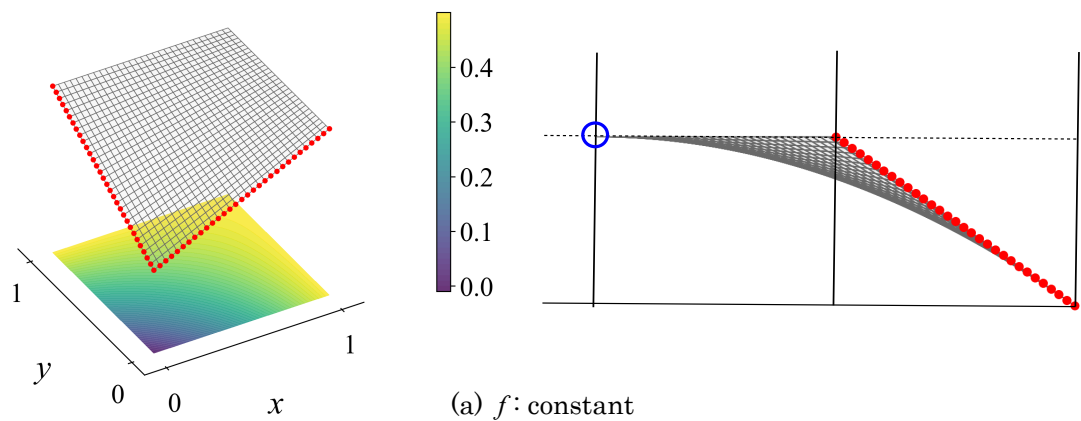


図 4.15: モデル HY4: 解形状

表 4.3: モデル HY5: 各領域における水平投影応力

領域	σ_x	σ_y	τ_{xy}
A ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$)	0	0	-1
B ($0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$)	$-2x$	0.5	$2(y-1) + 0.5$
C ($1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$)	1	-1	0
D ($1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$)	$2(x-2)$	0.5	$-2(y-2) + 0.5$

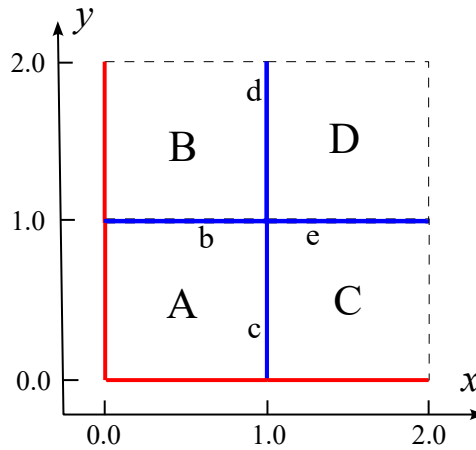


図 4.16: モデル HY5: シェルの平面領域

張，青のとき圧縮であることを示し，線の長さが応力の大きさに比例するよう図示している．主曲率分布図は線が赤のとき下に凸，青のとき上に凸であることを示し，線の太さは対応する主曲率の大きさに比例するよう図示している．領域 A, C に着目すると，それぞれモデル HY3, 1 と同様に， x 軸上の正弦波による境界形状が，特性曲線の方にシェル曲面内を伝播するような形状であることが，曲面形状および主曲率方向の分布からわかる．B, D の領域では水平投影応力を平面座標の関数として定義することで，主応力の向きが平面座標に応じて変化していることが図 4.18(a) の分布からわかる．また各領域の接続部では G^0 連続が保証され，勾配が不連続となることで区分的に滑らかな曲面形状を生成することができた．ただし，内部の境界では，シェルの面内応力のみでは力の釣合いが成立せず，鉛直方向，水平方向に反力が生じるため，支持構造が必要となる．

4.5 4 章の結論

鉛直方向の釣合い方程式が双曲型となる圧縮引張混在型シェルの形状設計法を提案し，波動方程式の初期値境界値問題を参照することで，境界条件を適切に設定することで圧縮引張混在型シェルの解形状が得られることを示した．提案手法は圧縮力と引張力が混在するシェルを生成することが可能であり，圧縮力のみが生じるシェルよりも多様な形状の生成が可能となる．

また，1 つの矩形平面領域における形状設計だけでなく，指定した境界形状が特性曲線の方に

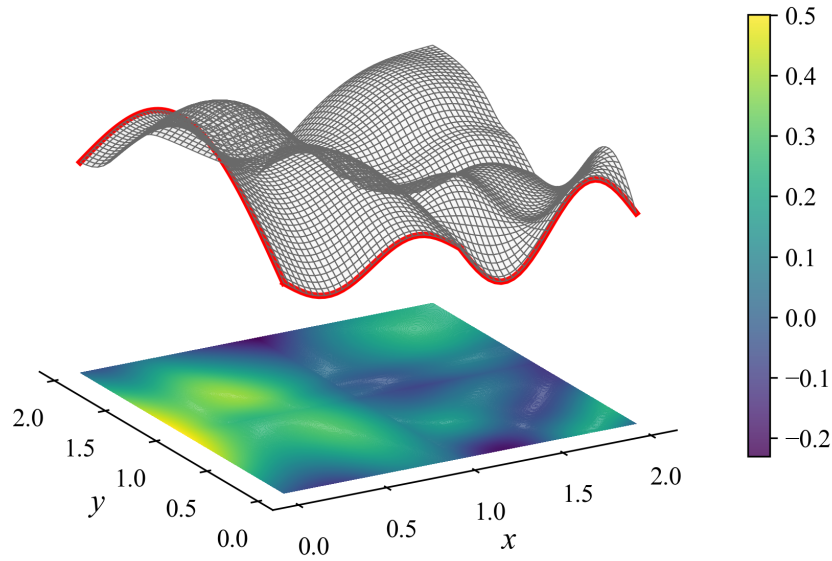


図 4.17: モデル HY5: 解形状

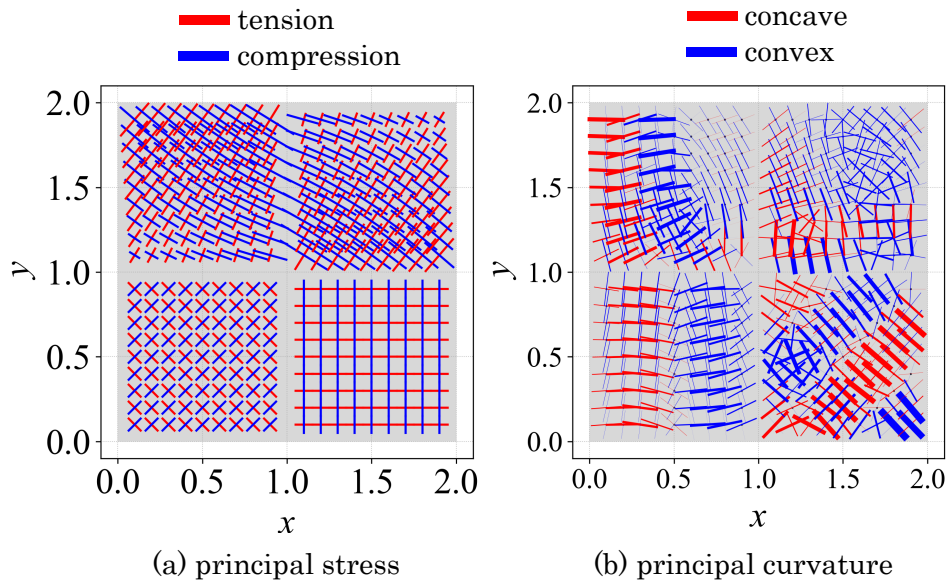


図 4.18: モデル HY5: 主応力方向と主曲率方向

伝播する双曲型偏微分方程式の性質を利用して、複数の領域からなるシェル曲面形状を接続することで、区分的に滑らかなシェルの形状設計手法を提案した。

本章で得られた成果は以下のとおりである。

1. 外力に対して圧縮と引張が混在する膜応力で釣合う形状を得るための境界条件の指定方法について、双曲型偏微分方程式の一つである波動方程式の初期値境界値問題を参照することで考察した。提案手法の妥当性を確認するため、波動方程式の初期値境界値問題の陽解法によ

る解形状と提案手法のシェルの釣合い方程式により得られる解形状を比較し、提案手法が陽解法と同等の精度で解形状を得ることができることを示した。双曲型偏微分方程式において初期値・境界値に適合する解形状を逐次求める陽解法に比べて、安定性に関する付加的な条件がなく、解が不定となる問題についても適用可能である点において、提案手法は陽解法に比べて優れているといえる。

2. 有限差分法で離散化した釣合い方程式について、線形連立方程式の係数行列のランクを用いて解の存在や不定性について判定する方法を提案した。指定した境界値が偏微分方程式の特性曲線の方向に伝播し、これが境界条件と矛盾するときに解が存在しないが、このような場合に線形連立方程式の係数行列のランクを用いて不能であると判断できることを示した。
3. 解が不定となる場合に安定的に解形状を得るため、および得られる形状を滑らかな形状とするために、正則化項とスムージング項を導入し、これらが有効であることを数値例題で確認した。数値例題で、解が不定となる場合に正則化項が有効であること、またスムージング項が滑らかな解形状を得るために有効であることを確認した。
4. 偏微分方程式である釣合い方程式の解について、重ね合わせの原理が成立することを確認した。数値例題において提案手法が斉次方程式の解、非斉次方程式の解、さらにこれらの和として表現される解を、それぞれ生成することが可能であることを示した。
5. 荷重項をシェルの自重とする場合に、第3で提案した手法と同様の繰り返し計算によって荷重項を逐次更新し、シェル形状を生成する方法を提案した。数値例題では、荷重項を自重とした場合の影響について、収束解を得ることができた。
6. 双曲型の釣合い方程式に基づいて複数の領域でシェル曲面を生成し、これらを接続する手法を提案した。各シェル曲面の境界を G^0 連続となるよう接続することが可能となり、リズミカルな意匠をもつ曲面形状を生成可能であることを示した。得られた形状の主曲率分布を確認することで、指定した境界形状がシェル曲面内を特性曲線の方向に伝播することを確認した。ただし、内部の境界では、シェルの面内応力のみでは力の釣合いが成立せず、鉛直方向、水平方向に反力が生じるため、支持構造が必要となる。
7. 提案手法は線形連立方程式を1度解くだけで解形状を得ることができるため、繰り返し計算を必要とする既往の手法 [54, 56] に比べて計算コストが少ない。一方でパラメトリック曲面を用いないことから形状表現の自由度が高く、これらの点は提案手法の優れた点である。

第 5 章

区分的可展面の形状設計

5.1 はじめに

本章では、特に主応力方向と主応力の大きさの分布が曲面形状に与える影響について着目し、シェルの膜理論に基づく釣合い方程式を可展面の形状設計に応用する。可展面は平面から面内変形を与えることなく曲げ変形のみによって生成できる曲面として定義され、ガウス曲率が曲面のいたるところで 0 であるという特徴を有する。また可展面は、空間内を直線が動いた軌跡として得られる線織面に、平面に展開可能であるという条件を与えたものとみなすことができる。移動する直線を母線 (ruling line, または generatrix), 直線が沿って移動する道筋を定める曲線を導線 (directrix) という。可展面は図 5.1 に示すように、母線が互いに平行な「柱面」、母線が 1 点で交差する「錐面」、導線となる空間曲線の接線を母線とする「接線曲面」の 3 種類に分類される。

本章では、水平投影応力の主応力と仮想の荷重の分布をパラメータとして可展面の形状設計を行う。また、可展面を曲線の内部境界で接続した区分的に滑らかな曲面（区分的可展面）を生成する手法を提案する。2.1 節に示した有限差分法で離散化した釣合い方程式を応用し、線形連立方程式を解くことで可展面形状を得る。曲面の可展性は、多面体の頂点における内角の和と 2π との差 (angle defect) に基づくガウス曲率を用いて確認する。可展面が生成される主応力と仮想の荷重の分布を設計パラメータとして、可展面が生成される応力分布と荷重分布を与えることで、数個の少ない変数で曲面の全ての内部格子点でガウス曲率が 0 となる曲面を生成する。微分方程式に基づき曲面を生成することで、angle defect を用いても corrugated surface が生じない滑らかな可展面を生成する。

数値例題では、提案手法が一様荷重下で曲率が連続的に変化する滑らかな可展面を得ることができ、シェルの特定の領域に線荷重を与えることや、境界形状を変化させることにより、さまざまな区分的可展面が生成可能であることを示す。また、水平投影応力や仮想の荷重を設計パラメータとして基底関数を用いて定義することで、より複雑な応力分布を許容し、最適化手法を用いて離散曲面の格子点でのガウス曲率の 2 乗和を最小化することで、複雑な区分的可展面を生成する。提案手法は、少ない設計変数で曲面形状を生成することが可能である。また、柱面だけでなく、錐面や接線曲面を生成することができ、内部境界や外周部の境界が曲線となる区分的可展面にも適用可能で

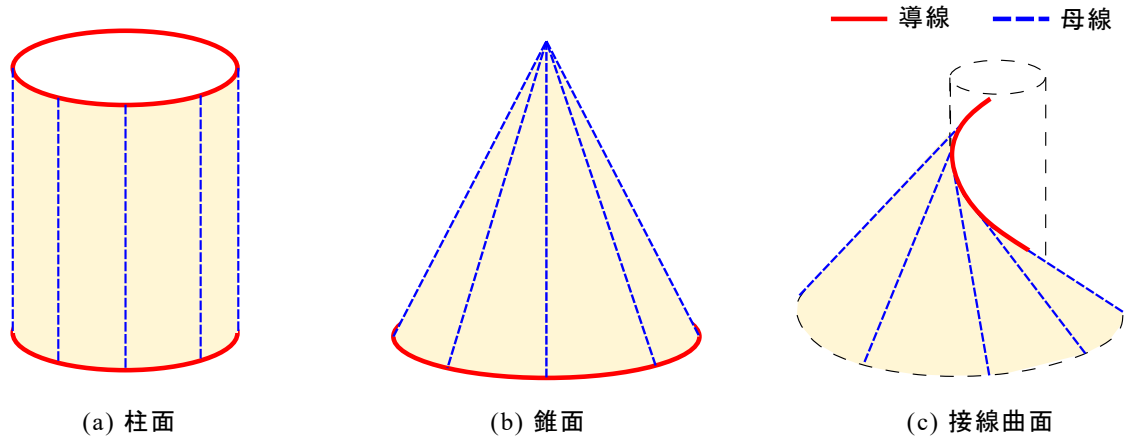


図 5.1: 可展面（柱面，錐面，接線曲面）

あることを示す．さらに，得られた可展面の精度を，曲面の展開図を生成することで確認する．

5.2 シェルの釣合い方程式を利用した可展面の生成法

5.2.1 シェルの釣合い方程式と目標形状の導入

2.1 節において図 2.1 に示した，曲面の高さ h が x, y の関数 $h(x, y)$ で表されるグラフ曲面のシェルについて， yz 平面と xz 平面にそれぞれ平行な曲面の切断面での垂直応力，せん断応力を xy 平面に投影し，水平面単位長さあたりの力に換算した水平投影応力を，それぞれ σ_x , σ_y , τ_{xy} とする．2.1 節で述べた通り，鉛直方向の釣合い方程式は 2 階の偏微分方程式として式 (2.4) で表される．式 (2.4) の右辺 f は鉛直方向下向き (z 軸の負の方向) のシェルの単位水平投影面あたりの分布荷重である．次に，有限差分法により鉛直方向の釣合い式 (2.4) を離散化する． xy 平面を x, y 方向にそれぞれ $N \times N$ 分割した格子点 (i, j) ($i, j = 1, \dots, N+1$) を考える．格子点の x, y 方向の間隔をそれぞれ δx , δy ，格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ とする．鉛直方向の釣合い式 (2.4) は中央差分を用いて式 (2.26) のように書ける．離散化した釣合い方程式 (2.26) の左辺は格子点の z 座標 $h_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, N+1$) が変数，その他のパラメータは定数であり，右辺 $f_{i,j}$ も格子点ごとに定数とする．境界上の格子点における h の x, y に関する偏導関数は，第 3 章の式 (3.6) から式 (3.9) と同様の方法により定義する．

格子点の数は $(N+1)^2$ であり，境界条件を指定した後の独立な変数の数を n とする．変数である z 座標 $h_{i,j}$ をまとめたベクトルを $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，変数 $\mathbf{x}$ の係数をまとめた行列を $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，右辺 $f_{i,j}$ を変数となる格子点についてまとめたベクトルを $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とすると，離散化した釣合い方程式 (2.26) は次の線形連立方程式として表される．

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (5.1)$$

式 (5.1) の解が一意であるとき，線形連立方程式を解いて変数 $\mathbf{x}$ が得られる．このように，本手法は，線形連立方程式を 1 度解くだけで曲面形状を得ることができるため，計算コストが小さいと

いう利点がある．以下では，境界条件が適切に指定されて，式 (5.1) の解が存在しない場合は考えないものとする．しかし，境界条件によって式 (5.1) の解が不定となる場合がある．行列 $\mathbf{A}$ のランクを $r = \text{rank}(\mathbf{A})$ と表すと， $r < n$ のとき $\mathbf{A}$ は正則ではなく，解が不定となる．このとき，一般逆行列を用いることで解が得られるが，第 4 章でも述べた通り，2 乗ノルムが最小となる解が本研究において望ましい形状であるとは限らない．そこで本章では，式 (5.1) の解が不定となるとき，解 $\mathbf{x}$ の目標形状 $\mathbf{x}_0$ を設定する．式 (5.1) の両辺に $-\mathbf{A}\mathbf{x}_0$ を加えることで次式を得る．

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \quad (5.2)$$

式 (5.2) の左辺の $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ について最小 2 乗法による解を求める，すなわち目標形状に対する偏差量 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ の 2 乗ノルムを最小化する $\mathbf{x}$ を求めることで，曲面形状を生成する．ここで提案した手法は，第 4 章の手法と異なり，解を求めるために設計者が微小なパラメータを設定する必要がない．

釣合い方程式を利用する曲面形状設計は，主応力分布と荷重分布が設計パラメータとなるが，本章の形状生成においてこれらは仮想の値として扱う．ただし，力学的な意味が得られる曲面形状の理解を助けるという利点がある．よって生成される曲面形状を想定するために有効であると考えられる場合は，釣合い形状としての力学的な意味についても考察する．

5.2.2 水平投影応力の主応力方向と曲面形状

釣合い方程式を用いた形状設計法における設計パラメータは，応力分布と荷重分布，境界条件である．可展面を得るためのパラメータの組み合わせをあらかじめ知することは，生成する可展面が複雑であるほど難しくなる．ここでは，パラメータのうち水平投影応力に対して制約を与え，曲面形状を荷重が 1 方向のみに伝達される形状とする．荷重伝達方向は水平投影応力の主方向となる．このとき，荷重伝達方向に直交する方向に応力・荷重が一樣であれば，可展面が存在するような境界条件を与えることで，荷重伝達方向の曲線形状を推動させた柱面が得られる．

鉛直方向の釣合い方程式 (2.4) について，右辺の荷重項 f が一樣であり，かつ水平投影応力について次式が成り立つ場合を考える．

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (5.3)$$

このとき，2 階の偏微分方程式である釣合い方程式 (2.4) は放物型となる．水平投影応力の主応力を σ_1, σ_2 とすると，これらは次式で表される．

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_x + \sigma_y, 0 \quad (5.4)$$

主応力のうち一方は水平投影応力の直応力成分の和 $\sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y$ となり，もう一方は $\sigma_2 = 0$ となる．図 5.2 に水平投影応力が負の場合について，応力の各成分と主応力との関係をモールの応力円を用いて表す．

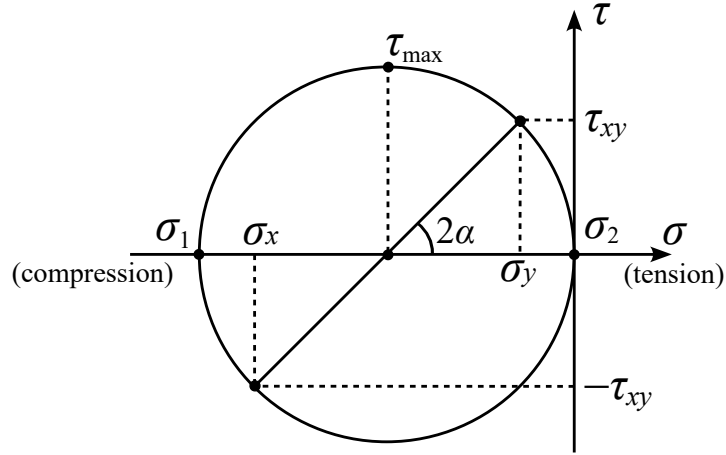


図 5.2: 水平投影応力におけるモールの応力円

主応力方向と x 軸のなす角 α は次のように書ける.

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (5.5)$$

図 5.2 に示すように σ_1, σ_2 の主応力方向に $\hat{x}, \hat{y}$ 軸をとると, 釣合い方程式を満足する曲面と任意の $\hat{x}z$ 平面と交わる曲線は, $\hat{x}z$ 平面内の水平投影応力 σ_1 , 荷重 f , 境界条件により一意に決まり, 主応力が 0 となる $\hat{y}$ 軸方向と相互に影響しない. このように, 主応力の一方が 0 となるように水平投影応力を定義することにより, 荷重が 1 方向のみに伝達される形状を得ることができるため, 得られる可展面の形状を想定しやすくなる.

$\hat{x}\hat{y}z$ 座標系における水平方向, 鉛直方向の釣合い方程式はそれぞれ次のように書ける.

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (5.6)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \hat{x}^2} = f \quad (5.7)$$

このとき, 鉛直方向の釣合い方程式の解は式 (5.7) を解くことで次のように表される.

$$h = \frac{f}{2\sigma_1} \hat{x}^2 + C_1 \hat{x} + C_2 \quad (5.8)$$

ここで, C_1, C_2 は積分定数である.

例えば, 水平投影応力 σ_1 , 荷重 f が曲面を定義する領域内で一様であるとき, 曲面が $\hat{y}$ 方向に直線となる解が存在するような境界条件を与えると, 図 5.3 に示すように曲面形状は $\hat{x}$ 方向を導線方向, $\hat{y}$ 方向を母線方向とする柱面となる. なお, $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$ を満たす水平投影応力を指定することは, 得られる曲面が可展面となることを保証する条件ではなく, 水平投影応力分布・荷重分布が母線方向である $\hat{y}$ 方向に一様でない場合には, 得られる形状が可展面になるとは限らない.

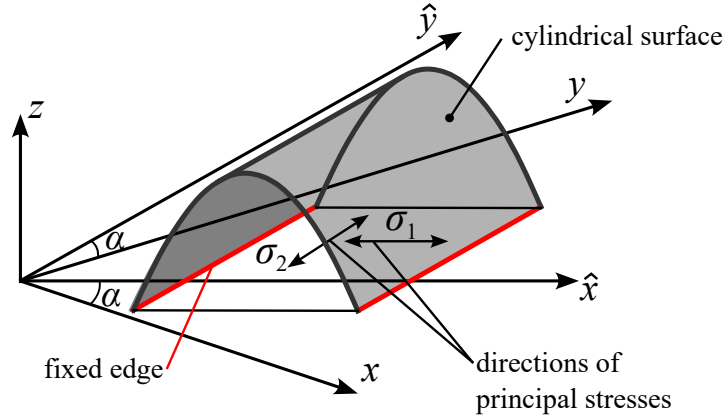


図 5.3: 主応力方向と柱面

5.2.3 可展面形状と形状生成における設計パラメータ

ここでは、可展面形状と設計パラメータの関係を整理する．また荷重を分布荷重と線荷重の和として定義し、線荷重により曲面の勾配が不連続となる領域を作ること、複数の可展面が接続された区分的可展面を生成する手法を提案する．

図 5.3 に示す曲面は水平投影応力、荷重が一樣であることから、式 (5.8) に示すように、導線の形状は放物線に限定される．導線を放物線ではない形状とするためには、水平投影応力や荷重を導線方向に変化させればよい．水平投影応力を変化させる場合は、水平方向の釣合い方程式を満足させるためにせん断応力が生じて水平投影応力の主方向が一樣でなくなるため、荷重を変化させるほうが少ないパラメータで形状を生成できるといえる．ただし荷重を変化させて得られる形状が、力学的に合理的な形状であるとは限らない点に注意が必要である．

式 (5.8) において σ_1 を $\hat{y}$ 方向に線形に変化させると、 $\hat{x}$ 方向の曲線の曲率半径は線形に変化し、錐面を生成できる．あるいは、 $1/f$ を $\hat{y}$ 方向に線形に変化させても錐面を生成できる．また、 x 軸と $\hat{x}$ 軸との間の角度を変更することにより、さまざまな方向に母線を持つ可展面を生成できる．

次に、区分的可展面を生成するため、釣合い方程式の右辺の荷重項を分布荷重と線荷重の和として定義する．線荷重を与えることで曲面の勾配は不連続となる．ここでは、曲面形状の特定の領域に与える線荷重を形状生成のためのパラメータとして、区分的可展面を生成する手法を提案する．シェル曲面に作用する荷重を分布荷重 $\bar{f}^S$ と線荷重 $\bar{f}^L$ の和として表す．線荷重を幅 δw の領域に作用する分布荷重に置換すると、鉛直方向の釣合い方程式 (2.4) の右辺は次のように書ける．

$$f = \bar{f}^S + \bar{f}^L = \bar{f}^S + \frac{\bar{F}^L}{\delta w} \quad (5.9)$$

同様に、差分法により離散化した釣合い方程式 (2.26) の右辺は次のように書ける．

$$f_{i,j} = \bar{f}_{i,j}^S + \bar{f}_{i,j}^L = \bar{f}_{i,j}^S + \frac{\bar{F}_{i,j}^L}{\delta w} \quad (5.10)$$

x, y 軸に平行に線荷重を与えるとき、 δw はそれぞれ $\delta x, \delta y$ とする。

分布荷重を正の値で（鉛直下向きに）与えたとき、線荷重を負の値で（鉛直上向きに）与えることは、曲面に中間支持点や補剛部材を配置することに相当し、荷重の大きさは支持点の反力や補剛部材に伝達される荷重の大きさに相当する。また線荷重を正の値で（鉛直下向きに）与えたとき、水平投影応力が変わらずに曲面が負担する膜応力が大きくなるため、より勾配の大きい曲面形状となる。

5.2.4 離散曲面のガウス曲率

ガウス曲率は曲面の2つの主曲率の積として表される幾何学的不変量である。第1章で述べた通り、可展面はガウス曲率が曲面のいたるところで0であるという特徴を有する。離散ガウス曲率は、離散曲面（多面体）上のガウス曲率であり、本章では、文献 [92] の方法を参考に、曲面を三角形で離散化したときの内部格子点における離散ガウス曲率を用いて可展性を確認する。三角形メッシュによる離散ガウス曲率を用いることで、曲面の主方向と主曲率からガウス曲率を導出する方法に比べて、より少ない計算負荷で可展性を確認できる。

まず、5.2.1 項で示した曲面形状の生成法で得られる矩形に分割された離散曲面を、対角線で分割することで三角形メッシュを生成する。図 5.4 は離散曲面上の内部格子点 v と周囲の三角形を示す。格子点 v に接続する n_v 個の格子点を曲面の外側から見て反時計回りに v_i ($i = 1, \dots, n_v$) とする。また、格子点 v の周囲の領域を Ω_v とし、その面積を A_v とする。この領域 Ω_v においてガウス曲率が一様に分布していると仮定することで、格子点 v における離散ガウス曲率を導出する。

格子点 v , v_i の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_{v,i}$ とする。また、格子点 v , v_i からなる辺を含む三角形の対角を図 5.4 に示すようにそれぞれ $\alpha_{v,i}$, $\beta_{v,i}$ とする。図 5.4 のように格子点 v を囲む三角形がいずれも鋭角三角形のとき、格子点 v に接続する辺の midpoint および格子点 v を囲む三角形の外心を格子点とする領域（ポロノイ領域）として Ω_v を定義する。このとき、面積 A_v は次のように書ける。

$$A_v = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n_v} (\cot \alpha_{v,i} + \cot \beta_{v,i}) \|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_{v,i}\| \quad (5.11)$$

格子点 v の周りの三角形に直角三角形または鈍角三角形が含まれる場合には、Meyer らの手法 [93] と同様に格子点 v における内角に応じて領域 Ω_v の面積 A_v を求める。すなわち、以下のような場合分けを行う。

- 図 5.5 左に示すように、格子点 v を含む三角形が鋭角三角形の場合は、格子点 v と v を含む辺の midpoint 及び三角形の外心からなる四辺形を領域 Ω_v とする。このとき、この三角形における領域 Ω_v に含まれる領域の面積は (5.11) により得る。
- 図 5.5 中央のように格子点 v が直角または鈍角の三角形の場合は、格子点 v および各辺の midpoint からなる四辺形領域を Ω_v とする。このとき、この三角形における領域 Ω_v に含まれる領域の面積は三角形の面積の $1/2$ である。

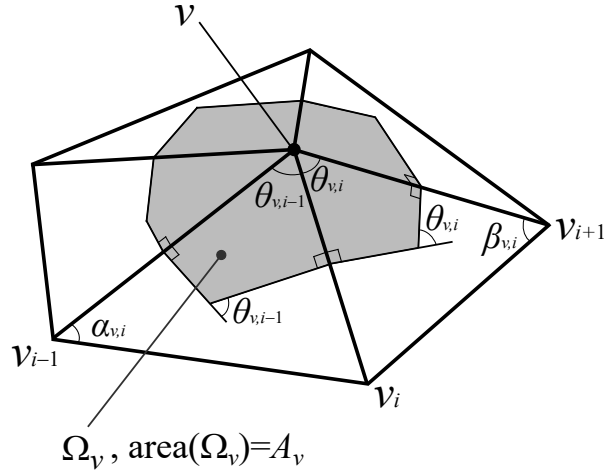


図 5.4: 三角形分割した離散曲面上の格子点 v における角度 $\theta_{v,i}$ とボロノイ領域 Ω_v

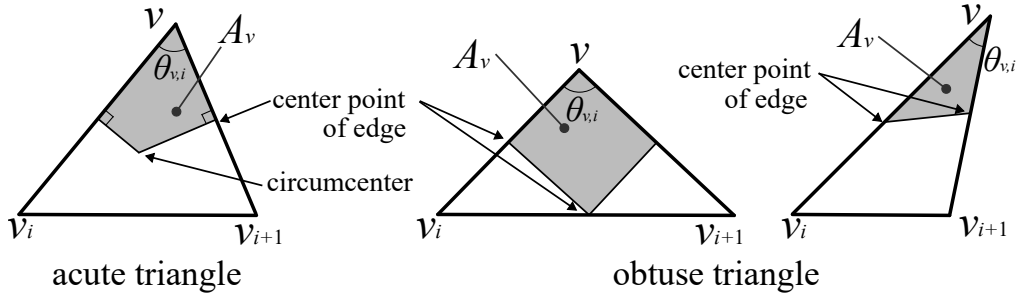


図 5.5: 三角形メッシュの形状に応じた面積 A_v の定義

- 図 5.5 右のように格子点 v が鋭角で、その他の角のうちの 하나가鈍角の三角形のとき、格子点 v と v を含む 2 辺の中点がなす三角形領域を Ω_v とする. このとき、この三角形における領域 Ω_v に含まれる領域の面積は三角形の面積の $1/4$ である.

Ω_v の境界の外角を $\theta_{v,i}$ ($i = 1, \dots, n_v$) とすると、 $\theta_{v,i}$ は格子点 v に接続する辺のなす角に等しい. 領域 Ω_v の内部の点で定義されるガウス曲率を K_{v0} とすると、以下のガウス - ボネの定理 (Gauss-Bonnet theorem) が成立する [67, 93].

$$\int_{\Omega_v} K_{v0} dA_v + \sum_{i=1}^{n_v} \theta_{v,i} = 2\pi \quad (5.12)$$

左辺の第 1 項は領域 Ω_v におけるガウス曲率の和であり、この領域における全曲率である.

多面体のある頂点における内角の和と 2π との差は、一般に角度欠損 (angle defect) と呼ばれる. 点 v における angle defect k_v は次式で表される.

$$k_v = 2\pi - \sum_{i=1}^{n_v} \theta_{v,i} \quad (5.13)$$

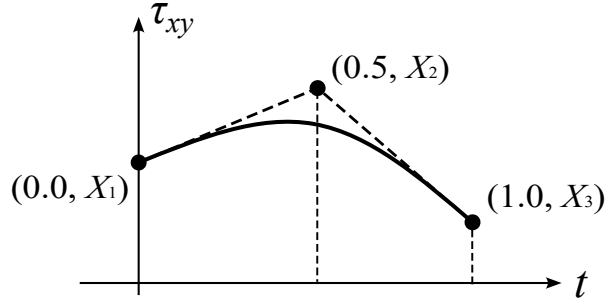


図 5.6: パラメータ t と設計変数 X_i による水平投影応力の定義

格子点 v におけるガウス曲率 K_v が領域 Ω_v に一様に分布していると仮定すると、式 (5.12) より K_v は angle defect を用いて次式で表される。

$$K_v = \frac{1}{A_v} \left(2\pi - \sum_{i=1}^{n_v} \theta_{v,i} \right) \quad (5.14)$$

本論文では、(5.14) により得られる格子点 v におけるガウス曲率を用いて、離散曲面の可展性を評価する。

5.2.5 最適化手法を用いた可展面の形状設計

5.2.2 項で示した単純な可展面は、指定すべき水平投影応力が容易に想定できる。多様な区分的可展面を生成するためには、境界の高さ方向の形状や内部境界の形状に応じて、曲面の可展性が得られる水平投影応力と荷重の組み合わせを指定する必要がある。しかし、生成する可展面が複雑であるほど可展面を得るためのパラメータの組み合わせをあらかじめ知ることは難しくなる。そこで本節では、水平投影応力の主応力の母線方向の分布もしくは荷重分布を定めるパラメータを変数として、ガウス曲率が曲面のいたるところで 0 であるという可展面の特徴を利用して、最適化手法を用いて可展面を生成する手法を提案する。

変数のベクトルを $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 、離散曲面の内部格子点 v の集合を V とする。区分的可展面を生成する際には、可展面を区分する内部境界上の格子点は集合 V から除く。集合 V 内の点において式 (5.14) に基づき格子点 v における K_v を求める。目的関数を集合 V 内の内部格子点のガウス曲率の 2 乗和を $K(\mathbf{X})$ とする。最適化問題を以下のように定式化する。

$$\text{minimize} \quad K(\mathbf{X}) = \sum_{v \in V} \{K_v(\mathbf{X})\}^2 \quad (5.15a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{X}^L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^U \quad (5.15b)$$

$\mathbf{X}^U, \mathbf{X}^L$ はそれぞれ設計変数 $\mathbf{X}$ の上下限値を表す。本章では、水平投影応力もしくは分布荷重を設計変数 $\mathbf{X}$ により定義する。

水平投影応力分布を設計変数で定める場合、せん断応力 τ_{xy} を最適化問題の設計変数 $\mathbf{X}$ を用い

て、パラメータ $t \in [0, 1]$ の関数として次式により定義する．

$$\tau_{xy}(t) = \sum_{i=0}^m X_{i+1} b_i^m(t) \quad (5.16)$$

$b_i^m(t)$ は m 次のバーンスタイン基底関数であり、次式で定義される．

$$b_i^m(t) = \frac{m!}{i!(m-i)!} t^i (1-t)^{m-i} \quad (5.17)$$

図 5.6 に 2 次のバーンスタイン基底関数により定義した τ_{xy} と t の関係を例として示す． t は値を変化させる方向の座標であり、 y 軸方向に変化させる場合は $t = y$ である．水平投影応力のその他の成分は、主応力の一方が 0 となる条件 $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$ を満足するように定義する．ただし、主応力方向を x, y 軸方向にとる場合には、 τ_{xy} が 0 となるため主応力のうち 0 でない σ_1 をパラメータ t の関数として次のように定義する．

$$\sigma_1(t) = \sum_{i=0}^m X_{i+1} b_i^m(t) \quad (5.18)$$

水平投影応力を設計変数で定めるとき、分布荷重は一様分布とする．水平方向の釣合い方程式 (5.6) は、 σ_1 を $\hat{y}$ のみの関数とすれば満たされる．

一方、分布荷重を設計変数で定める場合は、荷重を x, y 方向の関数として定義しても、水平投影応力を一様分布とすれば水平方向の釣合い方程式は満たされる．分布荷重 $\bar{f}^S$ をパラメータ $(s, t) \in [0, 1]^2$ の関数として次のように定義する．

$$\bar{f}^S(s, t) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} X_k b_i^{m_1}(s) b_j^{m_2}(t), \quad k = i + j(m_1 + 1) + 1 \quad (5.19)$$

$b_i^{m_1}(s)$, $b_j^{m_2}(t)$ はバーンスタイン基底関数であり次式で定義される．

$$b_i^{m_1}(s) = \frac{m_1!}{i!(m_1-i)!} s^i (1-s)^{m_1-i}, \quad b_j^{m_2}(t) = \frac{m_2!}{j!(m_2-j)!} t^j (1-t)^{m_2-j} \quad (5.20)$$

パラメータ (s, t) はそれぞれ x, y 方向にとる．荷重を設計変数とする場合は水平投影応力は定数とする．ただし、主応力の一方が 0 となるよう式 (5.3) を満足するように定義する．

なお、本手法は釣合い方程式における荷重や応力を形状生成のためのパラメータとして可展面を生成する手法であり、パラメータである荷重分布が実構造物の荷重条件と異なる場合には、得られる形状は力学的に合理的な形状であるとは限らない点に注意が必要である．

5.3 可展面の展開図の作成

平面に展開可能な曲面である可展面は、展開図を作成することができる．展開図を作成する手法については、膜構造における裁断図の生成や、折紙工学の分野で多くの手法が提案されている [94–96]．本研究では、得られた可展面の精度を曲面の展開図を生成することで確認する．

5.2 節で示した釣合い方程式に基づく曲面の生成法により得られた可展面について、文献 [94] の手法を参考に、三角形メッシュで離散化された曲面を平面に展開することで展開図を作成する。まず、5.2 節で生成された三角形メッシュを水平面に投影する。次に、投影されたメッシュの各格子点の平面座標を変数とし、水平面に投影した三角形メッシュと曲面の三角形メッシュの対応する辺の長さの差の 2 乗和を最小化する最適化問題を解くことで、展開図を生成する。三角形分割したすべての格子点の x, y 座標を設計変数とするが、面全体の剛体変位は拘束する。曲面における三角形要素の i 番目の面の辺の長さをそれぞれ $L_{i,1}^0, L_{i,2}^0, L_{i,3}^0$ とし、対応する展開図における三角形要素の i 番目の辺の長さをそれぞれ $L_{i,1}^P, L_{i,2}^P, L_{i,3}^P$ とする。三角形メッシュを構成する格子点の数を n_c 、三角形要素の数を n_f とする。三角形分割したすべての平面座標 (x_k, y_k) のベクトルを $\mathbf{x}^P$ とし、座標の上下限界を上添字 U, L で表す。曲面における三角形要素と対応する展開図における三角形要素のそれぞれの辺の長さの差 $e_{i,j}(\mathbf{x}^P)$ は次のように書ける。

$$e_{i,j}(\mathbf{x}^P) = L_{i,j}^P(\mathbf{x}^P) - L_{i,j}^0 \quad (5.21)$$

$e_{i,j}$ を曲面における三角形要素のそれぞれの辺の長さで基準化した値の 2 乗和を目的関数 $E(\mathbf{x}^P)$ とし、最適化問題を以下のように定式化する。

$$\text{minimize} \quad E(\mathbf{x}^P) = \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{e_{i,j}(\mathbf{x}^P)}{L_{i,j}^0} \right)^2 \quad (5.22a)$$

$$\text{subject to} \quad x_k^L \leq x_k \leq x_k^U, \quad y_k^L \leq y_k \leq y_k^U \quad (k = 1, 2, \dots, n_c) \quad (5.22b)$$

5.4 数値例題

数値例題として、以下では 6 つのモデル DS1~6 の結果を示す。モデル DS1, 2 は水平投影応力と分布荷重をともに曲面全体で一様とし、主応力のうち一方を 0 とすることで可展面を生成する。モデル DS3 では一様分布荷重に加えて線荷重を与えることで、区分的可展面を生成する。モデル DS1 から 3 は水平投影応力と分布荷重を一様分布とし、柱面からなる可展面および区分的可展面を生成する。

次に、モデル DS4 から 6 として、5.2.5 項で示した最適化手法を用いた可展面の生成手法により区分的可展面を生成する。モデル DS4, 5 では水平投影応力を設計変数 $\mathbf{X}$ により定義し、モデル DS6 では分布荷重を $\mathbf{X}$ で定義する。さらに、得られた可展面に対して、5.3 節で示した方法で展開図を作成し、可展性を確認する。

曲面生成において、曲面形状は荷重と応力の比率により決定されるため無次元化し、長さで荷重の単位は省略する。曲面の水平投影面は $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ の正方形領域とする。格子の分割数は x, y 方向ともに $N = 50$ とする。モデル DS1~6 の平面形状、格子点配置を図 5.7 に示す。5.2 節で示した曲面生成のプログラムは Python3 を用いて作成し、鉛直方向の釣合い方程式を離散化した線形連立方程式は、数値計算ライブラリである NumPy [81] を用いて解く。解が不定となるとき

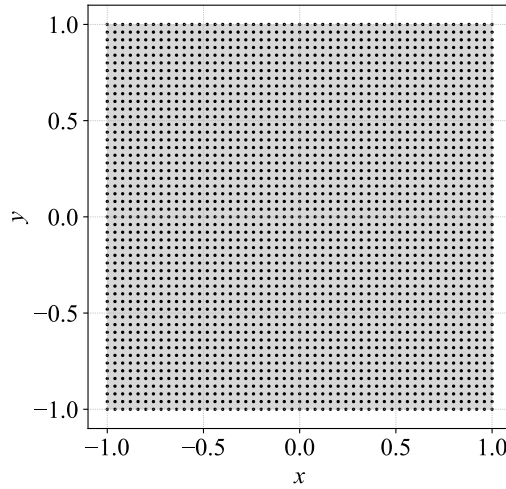


図 5.7: モデル DS1～6: 平面形状

は、式 (5.2) を用いて目標形状に対する偏差量 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ の 2 乗ノルムを最小化する $\mathbf{x}$ を求める。2 乗ノルムが最小となる解の導出には Numpy の `linalg.lstsq` 関数を用いる。

可展面の生成および展開図作成における最適化問題の求解には、Python の数値計算ライブラリである SciPy [97] の内点法 `trust-constr` [98] を用いる。内点法は実行可能領域の内部を逐次探索して最適解を求める最適化手法である。また、ここでは感度係数は差分近似する。最適化アルゴリズムにおける収束判定のためのパラメータは、 1×10^{-5} とする。また、解析結果の図化には Matplotlib [83] を用いる。

5.4.1 一様な水平投影応力と一様な分布荷重による柱面の生成

モデル DS1～3 における水平投影応力と荷重を表 5.1 に示す。すべてのモデルについて主応力のうち一方を 0 とすることで可展面を生成する。モデル DS1, 2 は、水平投影応力と分布荷重を曲面全体で一様とし、線荷重は与えない。モデル DS3 では、一様分布荷重に加えて線荷重を与えることで、区分的可展面を生成する。また z 座標を $h = 0$ に固定する格子点を、モデル DS1, 3 については $x = -1$, $x = 1$ の 2 対辺上の格子点とする。モデル DS2 については正方形領域の 4 隅の格子点のうち $(x, y) = (-1, -1)$, $(1, 1)$ の 2 点の z 座標を $h = 0$ に、 $(x, y) = (-1, 1)$, $(1, -1)$ の 2 点の z 座標を $h = 1.0$ に固定する。

モデル DS2 について、変数の数は $n = (N + 1)^2 - 4 = 2597$ である。一方、式 (5.1) の係数行列 $\mathbf{A}$ の、特異値分解を用いて得られるランクは $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2596 < n$ であった。この例では、形状を定めるために十分な境界条件が与えられておらず、係数行列 $\mathbf{A}$ が正則でないため、目標形状 $\mathbf{x}_0$ を与え、式 (5.2) を解くことで解形状を得る。格子点 (i, j) の x, y 座標を $(x_{i,j}, y_{i,j})$ とし、目標形状 $\mathbf{x}_0$

表 5.1: モデル DS1,2,3: 水平投影応力と荷重

モデル	$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$	$(\bar{f}^S, \bar{F}^L)$
DS1	$(-1, 0, 0)$	$(1, 0)$
DS2	$(-0.5, -0.5, -0.5)$	$(1, 0)$
DS3	$(-1, 0, 0)$	$(2, -1)$

の格子点における z 座標を $\bar{h}_{i,j}$ とする．モデル DS2 の目標形状を次式により定義する．

$$\bar{h}_{i,j} = 1 - \frac{1}{2} |x_{i,j} + y_{i,j}| \quad (5.23)$$

得られた曲面形状を図 5.8 に示す．図中のコントアは曲面の高さ h の分布を示し、赤い丸で示した格子点は、形状生成において z 座標を固定とした格子点を示す．得られた曲面形状のガウス曲率分布を図 5.9 に示す．モデル DS1～3 は、水平投影応力と荷重を指定し、式 (5.1) または式 (5.2) を 1 度解くだけで曲面形状が得られた．曲面の曲率は、一様な分布荷重が作用する範囲において連続である．また線荷重を与えることで勾配が不連続となる内部境界を生成することができた．

各モデルごとの考察を以下に示す．

モデル DS1

モデル DS1 は、水平投影応力の主方向が x 軸方向であり、得られた曲面形状は、 x 方向に導線を、 y 軸方向に母線を有する可展面（柱面）となる．導線の形状は放物線である．次に、モデル DS1 を用いて、分布荷重を導線方向である x 方向に変化させることで曲面形状が変化することを確認する．ここでは分布荷重は力学的な意味を持たない形状生成のためのパラメータとなる．式 (5.24) で定義される分布荷重を与え、その他の条件をモデル DS1 と同様としたモデル DS1a について、 xz 平面における曲面の形状を図 5.10 に示す．

$$\bar{f}^S = 2 \left(1 - \frac{1}{4} (x+1)^2 \right) \quad (5.24)$$

yz 平面に関して非対称な荷重分布を与えることで、モデル DS1a の導線は yz 平面に関して非対称な形状となる．

モデル DS2

モデル DS2 は、水平投影応力の主応力が $\sigma_1 = -1, \sigma_2 = 0$ 、 σ_1 の主方向が x 軸に対して反時計回りに 45 度の角度を持つよう $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (-0.5, -0.5, -0.5)$ とした．得られた可展面（柱面）の導線方向はこれと一致し、直交する主応力 σ_2 に対応する主方向が母線方向となる．なお、本例題の形状生成における線形連立方程式は解が不定であり、提案手法では式 (5.2) を満足する不定解のうち目標形状 $\mathbf{x}_0$ からの偏差量の 2 乗ノルムを最小化する解形状 $\mathbf{x}$ を求めている．したがって目標

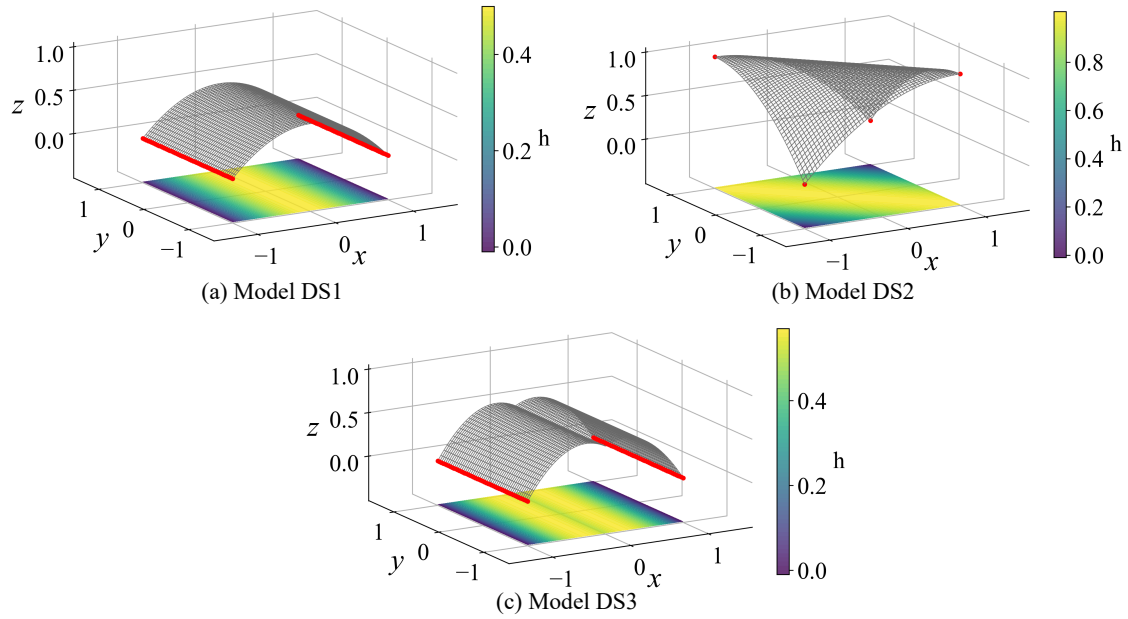


図 5.8: モデル DS1, 2, 3: 曲面形状 (直交投影)

形状 $\mathbf{x}_0$ の与え方に応じて得られる解形状が異なる．本例題のように，主応力 σ_1 に対応する主方向に直線の母線をもつ目標形状 $\mathbf{x}_0$ を与えることで，可展面を得ることができる．

モデル DS3

モデル DS3 は， y 軸上に線荷重を与えたことにより，曲面の勾配が不連続である．母線が軸方向に平行な 2 つの柱面からなる区分的可展面が得られた．また，モデル DS3 と荷重や水平投影応力は同様とし，境界上の格子点位置を変化させたモデル DS3a について，得られる形状とガウス曲率分布を図 5.11 に示す．図 5.11 右に示したガウス曲率分布の Max・Min の値は，内部境界を除く各格子点における離散ガウス曲率の最大値・最小値を示す．モデル DS3a は z 座標を固定とする $x = \pm 1$ の境界上の格子点について， z 座標を線形に変化させ折れ線で定義した．得られる曲面は $x = 0$ および $y = 0$ において区分され，母線が $x = \pm 1$ の境界に平行な 4 つの柱面からなる区分的可展面となった． $x = \pm 1$ の境界の z 座標を線形に変化させて折れ線で定義することで，可展面の母線も境界の形状にしたがって変化していることがわかる．このように，支点となる境界を折れ線で定義することで内部境界を生成することができた．このように，提案手法は荷重や境界の条件を操作することで，設計者の意図した位置で曲面を区分することができる．

5.4.2 荷重分布と曲面形状のパラメトリックスタディ

モデル DS3 を対象とし，荷重条件をパラメータとして得られる曲面形状を確認する．一様な分布荷重 $\bar{f}^S$ と線荷重 $\bar{F}^L$ を変化させたときの曲面形状を図 5.12 に示す．モデル DS3 は母線が y 軸方向に平行な柱面となるので， xz 平面における立面図として図示する．

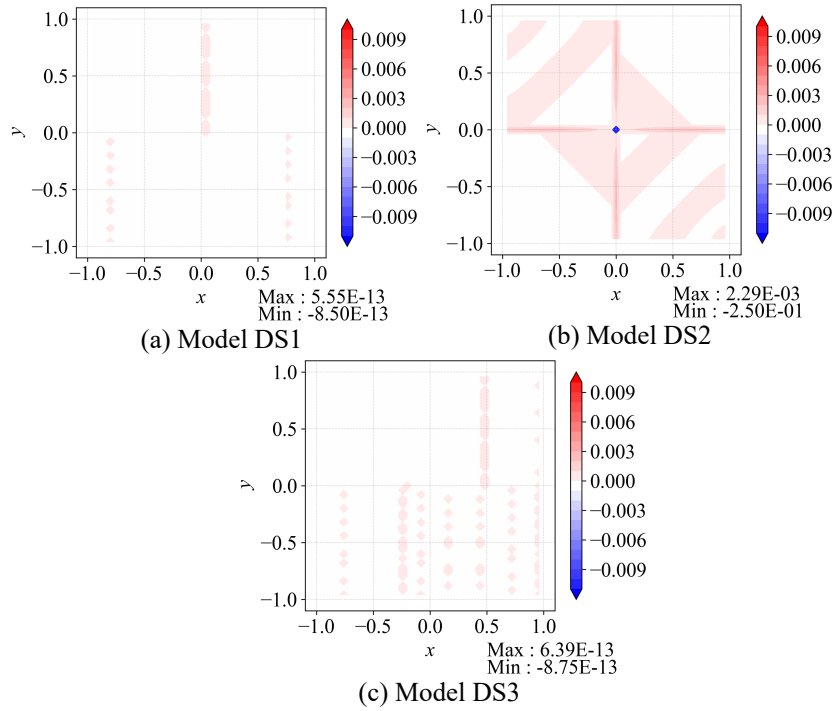


図 5.9: モデル DS1, 2, 3: ガウス曲率分布

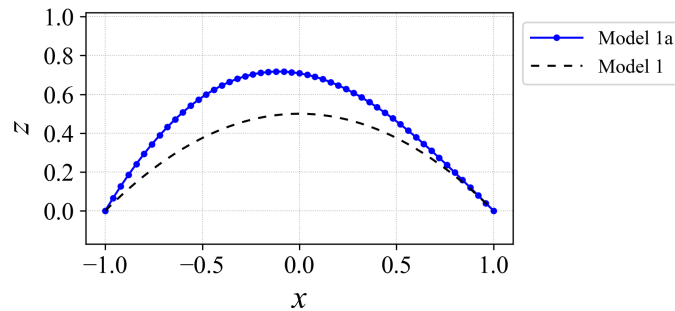


図 5.10: モデル DS1 と DS1a の導線形状の比較

分布荷重 $\bar{f}^S$ を一定値として線荷重 $\bar{F}^L$ を変化させたとき, $\bar{F}^L = 0$ を除いて曲面中央で分割された区分的可展面となるが, $\bar{F}^L$ が正のとき荷重作用位置は上に凸, 負のとき下に凸となる. $\bar{F}^L$ が小さいほどライズが小さくなる.

反対に, 線荷重 $\bar{F}^L$ を一定値として一様な分布荷重 $\bar{f}^S$ の大きさを変化させたとき, $\bar{f}^S$ が大きいほど曲面のライズは大きくなり, 曲面の最も z 座標の大きい頂部の位置は $x = 0$ に近づく.

また, $(\bar{f}^S, \bar{F}^L) = (2, -2), (1, -1)$ のとき, 両側の境界における鉛直反力と $x = 0$ における線荷重の比率が 1 : 2 になるため, $x = 0$ におけるライズは $h = 0$ となる.

このように, 分布荷重と線荷重を変化させることで曲面形状を変化させることができる.

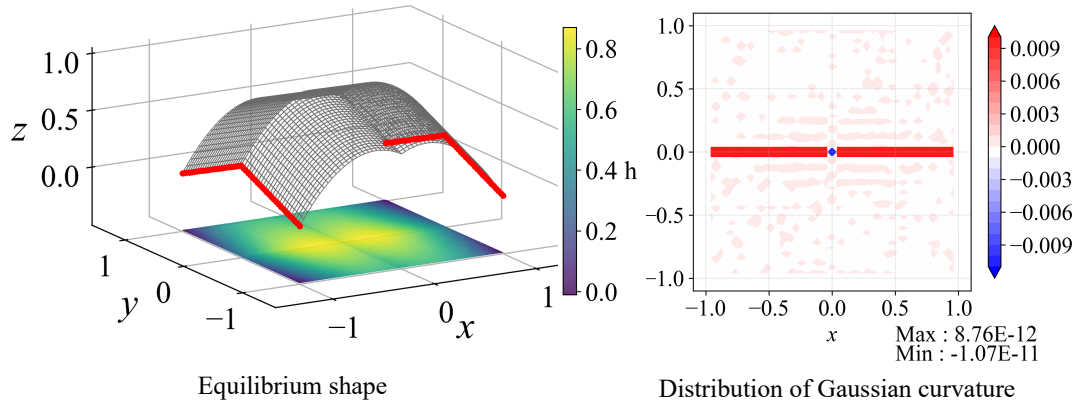


図 5.11: モデル DS3a: 曲面形状（直交投影），ガウス曲率分布

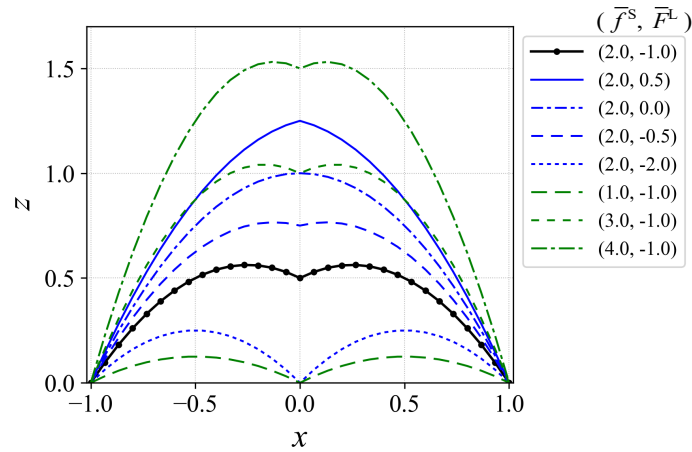


図 5.12: モデル DS3 におけるパラメトリックスタディ

5.4.3 最適化手法を利用した区分的可展面の設計

モデル DS4, 5, 6 では，水平投影応力あるいは分布荷重を設計変数 $\mathbf{X}$ により定義し，5.2.5 項で示した最適化手法により区分的可展面を生成する．モデル DS4, 5, 6 における水平投影応力と荷重を表 5.2 に示す．各モデルの条件に基づく釣合い方程式の変数の数は，式 (5.1) の行列 $\mathbf{A}$ のランクと一致することから，式 (5.1) により曲面形状を生成する．

各モデルごとの考察を以下に示す．

モデル DS4

モデル DS4 は，水平投影応力の 0 でない主応力の方向を x 軸方向とし，パラメータ $t \in [0, 1]$ は y 方向にとり， $t = y$ とする． σ_x を y に関する 2 次のバーンスタイン基底関数 $b_i^2(y)$ ($i = 0, 1, 2$)

表 5.2: モデル DS4, 5, 6 の水平投影応力と荷重

モデル	$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$	$(\bar{f}^S, \bar{F}^L)$
DS4	$(\sigma_x(y), 0, 0)$	$(1, y - 1)$
DS5	$(\sigma_x = \tau_{xy}(t), \sigma_y = \tau_{xy}(t), \tau_{xy}(t))$	$(1, -0.02)$
DS6	$(-1, 0, 0)$	$(\bar{f}^S(x, y), (1 - y))$

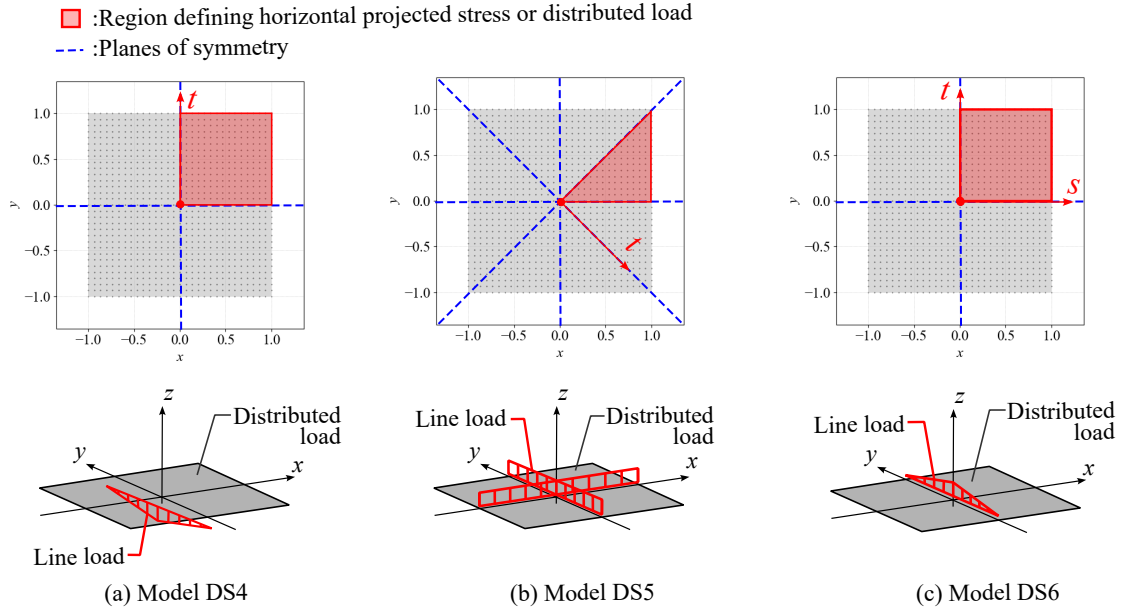


図 5.13: モデル DS4, 5, 6: 適用荷重分布とパラメータ t の定義

を用いて次のように定義する．

$$\sigma_x(y) = X_1 b_0^2(y) + X_2 b_1^2(y) + X_3 b_2^2(y) \quad (5.25)$$

水平投影応力のその他の成分 σ_y, τ_{xy} は 0 とする．設計変数の範囲は $-1.0 < X_i \leq -0.1$ ($i = 0, 1, 2$) とする．モデルの検討条件および水平投影応力の定義範囲を図 5.14(a) に示す．式 (5.25) を用いて平面領域の 1/4 に対して水平投影応力をパラメータによって定義し，モデルの対称性を考慮してその他の領域の水平投影応力を定義する． z 座標を固定する格子点を $x = -1, x = 1$ の 2 対辺とする．また， $x = 0$ の領域に次のように三角形分布の線荷重を与える．

$$\bar{F}^L = |y| - 1 \quad (5.26)$$

最適化問題を解いて得られた曲面形状を図 5.14(a) に，曲面形状のガウス曲率分布を図 5.15(a) に示す．

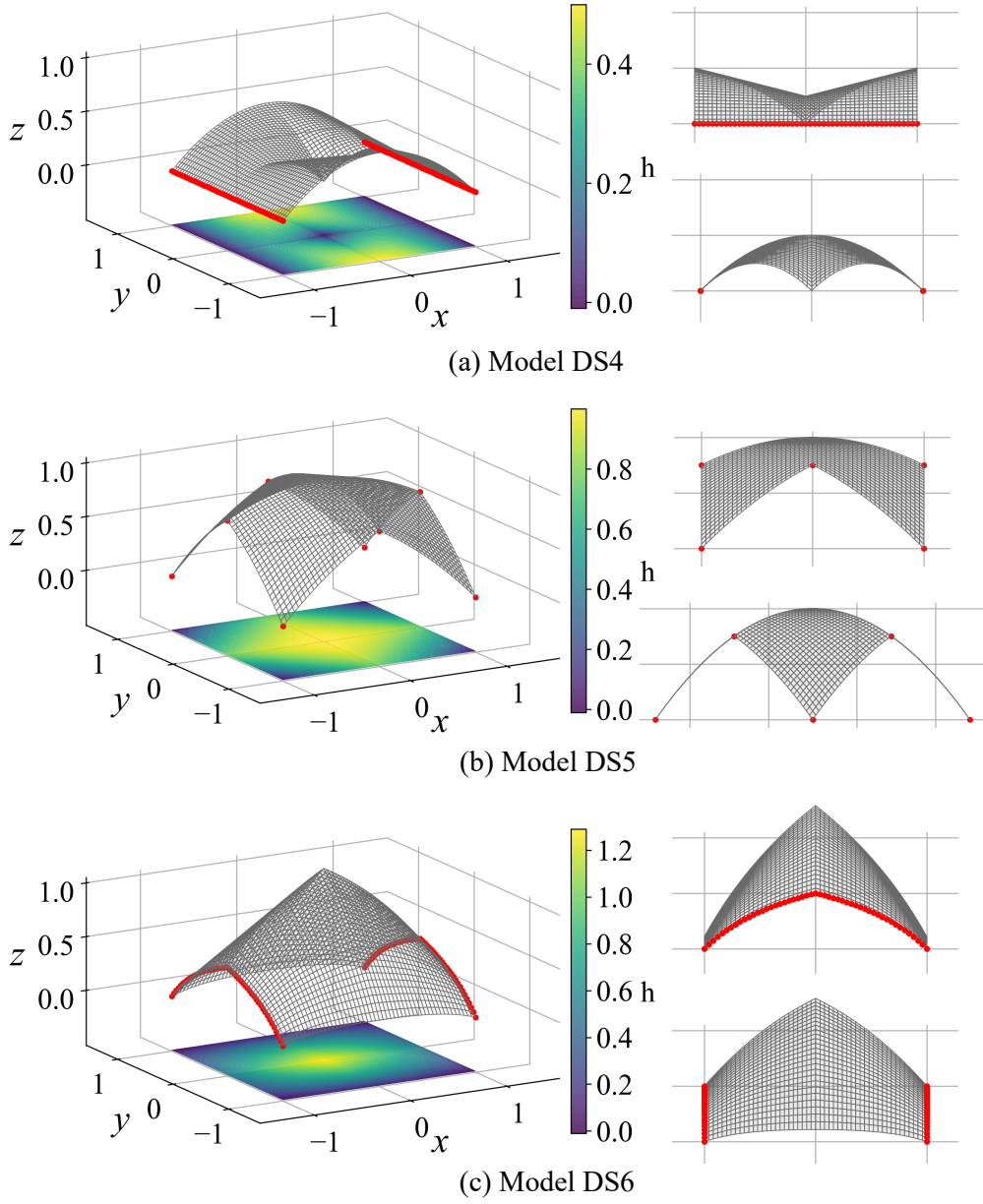


図 5.14: モデル DS4, 5, 6: 曲面形状 (直交投影)

モデル DS5

モデル DS5 は、水平投影応力のせん断応力成分 τ_{xy} を、パラメータ $t \in [0, 1]$ についての 2 次のバーンスタイン基底関数 $b_i^2(t)$ ($i = 0, 1, 2$) を用いて次式のように定義する。パラメータ t は x 軸を時計回りに 45 度回転させた方向にとる。

$$\tau_{xy}(t) = X_1 b_0^2(t) + X_2 b_1^2(t) + X_3 b_2^2(t) \quad (5.27)$$

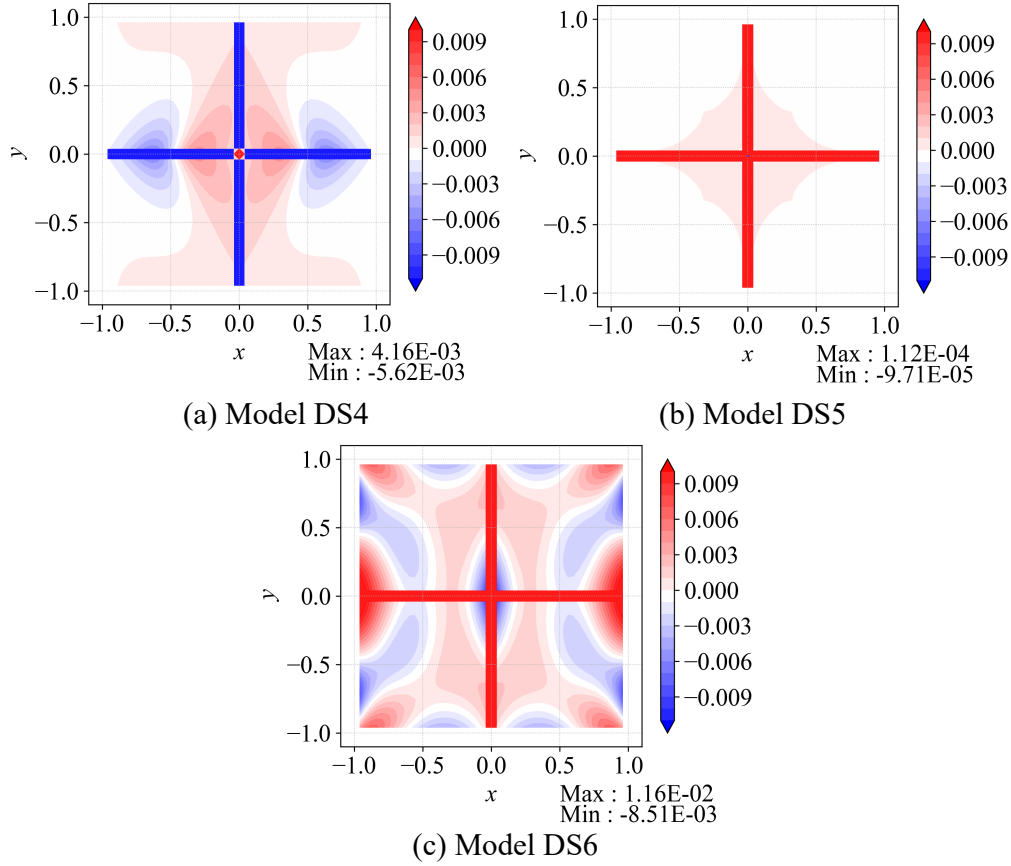


図 5.15: モデル DS4, 5, 6: ガウス曲率分布

設計変数の範囲は $-2.0 < X_i < -0.1$ とする．水平投影応力のその他の成分は， $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$ が成り立つように次のように定義する．

$$\sigma_x(t) = \tau_{xy}(t), \quad \sigma_y(t) = \tau_{xy}(t) \quad (5.28)$$

モデルの検討条件，水平投影応力の定義範囲を図 5.13(b) に示す．式 (5.27), (5.28) を用いて，図 5.13(b) 右側の図に赤色で示した平面領域の 1/8 に対して水平投影応力をパラメータで定義し，モデルの対称性を考慮してその他の領域の水平投影応力を定義する．これにより， xz 平面， yz 平面で分割された 4 つの領域ごとに主応力方向の異なる水平投影応力分布を定義する．また，内部境界となる $x = 0$ および $y = 0$ の領域の水平投影応力は，水平方向の釣合い方程式を満足するよう，内部境界の両側の領域で定義した水平投影応力の合力として，次のように定義する．

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_x = 2\sigma_x(t), \quad \sigma_x = 2\sigma_x(t), \quad (x = 0) \quad (5.29)$$

$$\sigma_y = 2\sigma_y(t), \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_y = 2\sigma_y(t), \quad (y = 0) \quad (5.30)$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad ((x, y) = (0, 0)) \quad (5.31)$$

z 座標を固定する格子点は 4 隅の 4 点と境界の 4 辺の中点とし，4 隅の格子点の z 座標を $h = 0$ に，中点の z 座標を $h = 0.75$ に固定する．また， $x = 0$ および $y = 0$ の領域に表 5.2 に示す線荷重

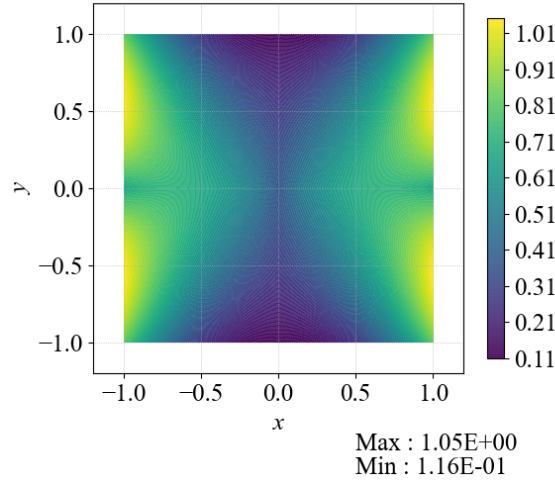


図 5.16: モデル DS6: 分布荷重 $\bar{f}^S$ 分布

$\bar{F}^L$ を与える．最適化問題を解いて得られた曲面形状を図 5.14(b) に，曲面形状のガウス曲率分布を図 5.15(b) に示す．

モデル DS6

モデル DS6 は，分布荷重を x, y 座標の関数として設計変数を用いて定める．水平投影応力は表 5.2 に示す通り一様分布とし，主応力方向を x 軸方向とする．パラメータ $(s, t) \in [0, 1]^2$ は x, y 軸と同じ方向にとり， $s = t = y$ とする． $\bar{f}^S$ を x, y についての 2 次のバーンスタイン基底関数 $b_i^2(x), b_j^2(y)$ ($i, j = 0, 1, 2$) を用いて次のように定義する．

$$\bar{f}^S(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 X_k b_i^2(x) b_j^2(y), \quad k = i + 3j + 1 \quad (5.32)$$

設計変数の範囲は $0 < X_k \leq 2.0$ ($k = 1, \dots, 9$) とする．モデルの検討条件および水平投影応力の定義範囲について図 5.13(c) に示す．式 (29) を用いて平面領域の $1/4$ に対して水平投影応力をパラメータによって定義し，モデルの対称性を考慮してその他の領域の水平投影応力を定義する．また， $x = 0$ の領域に次のように三角形分布の線荷重を与える．

$$\bar{F}^L = -(|y| - 1) \quad (5.33)$$

z 座標を固定とする $x = \pm 1$ の境界上の格子点について， z 座標 h を次式的双曲線で定義する．

$$h = \frac{1}{|y| - 2} + 1 \quad (5.34)$$

最適化問題を解いて得られた曲面形状を図 5.14(c) に，曲面形状のガウス曲率分布を図 5.15(c) に示す．またモデル DS6 の荷重 $\bar{f}^S$ の分布を図 5.16 に示す．

表 5.3: モデル DS4, 5, 6: 初期解と最適解の目的関数, 設計変数, 反復計算回数の比較

モデル	$K(\mathbf{X})$	design variables $\mathbf{X}$	Iteration
DS4 (Init)	2.83×10^2	$(-0.50, -0.50, -0.50)$	-
DS4 (Opt)	4.64×10^{-3}	$(-0.508, -0.752, -0.998)$	52
DS5 (Init)	1.16×10^3	$(-1.00, -1.00, -1.00)$	-
DS5 (Opt)	4.50×10^{-6}	$(-0.500, -0.500, -0.500)$	50
DS6 (Init)	2.84×10^1	$X_i = 1.0 \quad (i = 1, \dots, 9)$	-
DS6 (Opt)	1.77×10^{-2}	shown in Fig.5.16	85

可展面形状の考察

モデル DS4, 5, 6 について, 初期解と最適解の目的関数値, 設計変数値, 最適化に要した反復計算の回数を表 5.3 に示す. 図 5.15 からいずれのモデルも, モデルが区分的可展面の内部境界を除いて曲面全体でガウス曲率が微小な値となり, xz 平面と yz 平面で 4 つに区分された区分的可展面であることがわかる. モデル DS4, 5, 6 の最適解について, 曲面の $-1 < x < 0, -1 < y < 0$ の範囲に含まれる各格子点における, 可展面の導線方向の最大主曲率の分布を図 5.17 に示す. 図中の青線の向きが主曲率方向を示し, 線の太さは曲率の絶対値に比例する. 凡例の線の太さが曲率を示す. 内部境界部分の主曲率方向の記載は省略する. また生成した曲面の, $-1 < x < 0, -1 < y < 0$ の範囲に含まれる各格子点における母線方向 (最小主曲率方向) を図 5.18 に示す.

モデル DS4 は, 線荷重の大きさに応じて曲面中央がくぼんだ曲面形状となる. 線荷重 $\bar{F}^L$ を負の値としているため, 線荷重を与えた y 軸上で下に凸の形状となる. 曲面は x 方向に放物線であり, 放物線の曲率は指定水平投影応力に応じて y 座標の絶対値が小さいほど大きくなる. また図 5.18(a) から, 母線は 1 点で交わっており, 可展面は錐面である. また, $x = 0$ の内部境界は双曲線となる.

モデル DS5 の曲面形状について, 図 5.18(b) から, 各可展面の母線は x, y 軸に対して 45 度または -45 度の角度で交わり, 区分された可展面ごとに平行であることがわかる. このことから, 各可展面は柱面であるといえる.

モデル DS6 の曲面形状について, 図 5.18(c) から各可展面の母線は 1 点で交わらずねじれの関係にあることがわかる. したがって, 得られた可展面は接線曲面であるといえる.

このように, 最適化問題を解いて可展面を得る方法により, 5.4.1, 5.4.2 項に示した例より複雑な形状の区分的可展面を得ることができた. また, 各モデルの内部境界は直線である必要はなく, 応力や荷重条件に応じて曲線となる. 提案手法は, 基底関数を用いて応力もしくは荷重をパラメータ表示することにより, 少ない設計変数で曲面形状を生成することができ, 最適化に要する繰り返し回数が少ないという利点がある.

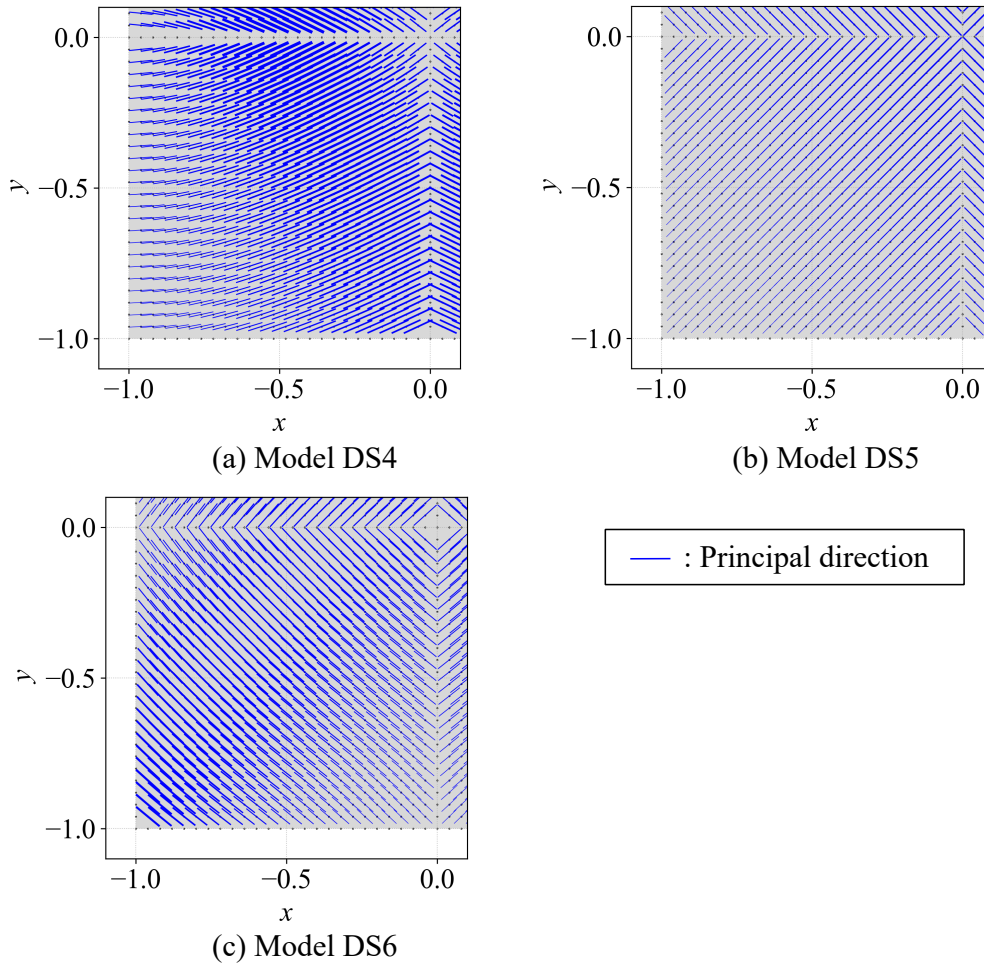
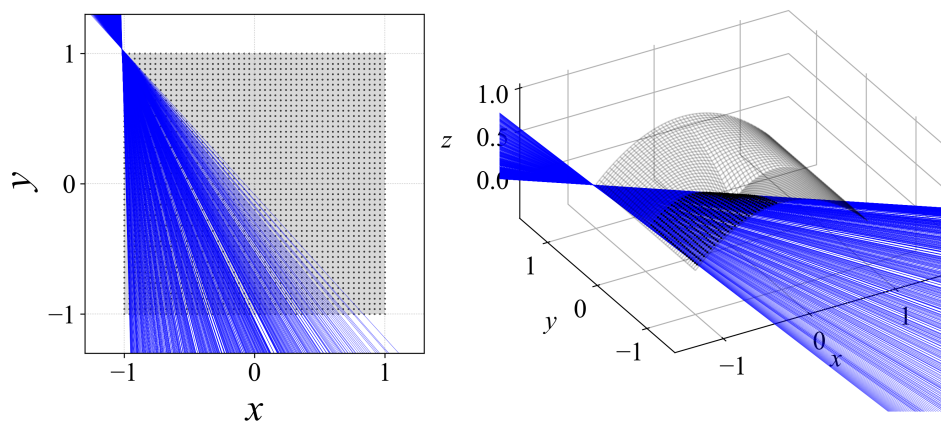


図 5.17: モデル DS4, 5, 6: 可展面の導線方向の最大主曲率の分布

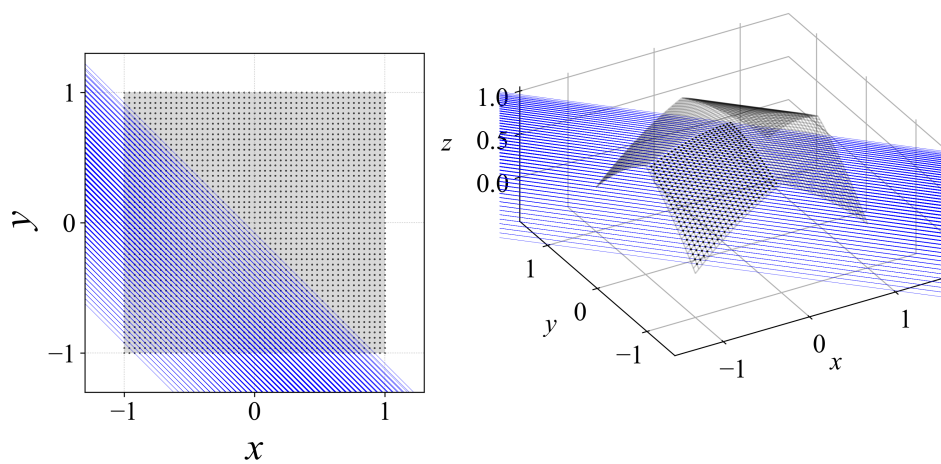
5.4.4 可展面の展開図作成による可展性の検証

本節では、5.4.3 節で得られた可展面の展開図を作成する。モデルの対称性を考慮し、図 5.19 に示す曲面の 1/4 の範囲の展開図を作成する。また、展開図の剛体変位を拘束するため、モデルごとに特定の格子点の x, y 座標に制約を与える。図 5.19 に円で示した点は座標を指定し、四角形、三角形で示した点はモデル DS4, 5, 6 で変位を拘束する点を示し、モデル形状に応じて $x, \bar{x}$ 方向の変位を拘束した。

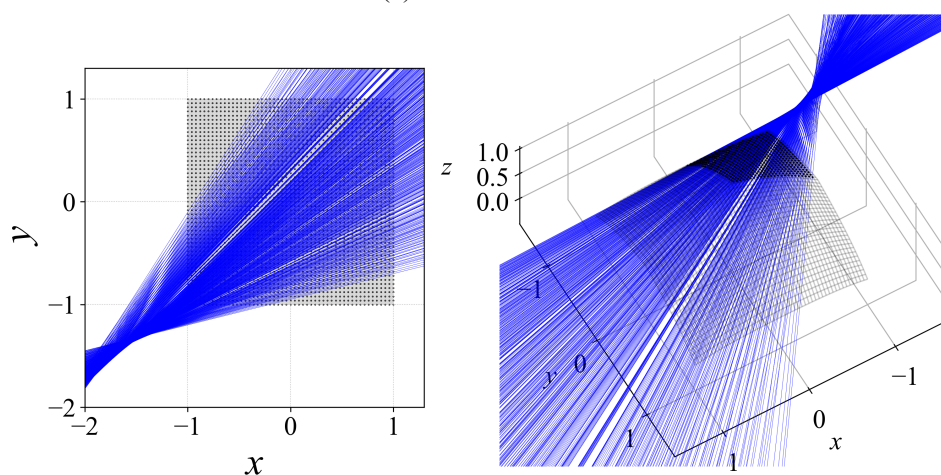
モデル DS4, 5, 6 に対して得られた展開図を図 5.20 に示す。薄い線が元の曲面の水平投影平面を示し、濃い黒線が展開図の形状を示す。また 5.4 に、最適化の結果得られた展開図の目的関数 $E(\mathbf{x}^P)$ と、各辺の長さの誤差の二乗和 E_{ss} 、最大値、平均値および標準偏差を示す。各辺の長さの



(a) Model DS4



(b) Model DS5



(c) Model DS6

図 5.18: モデル DS4, 5, 6: 可展面の母線方向分布

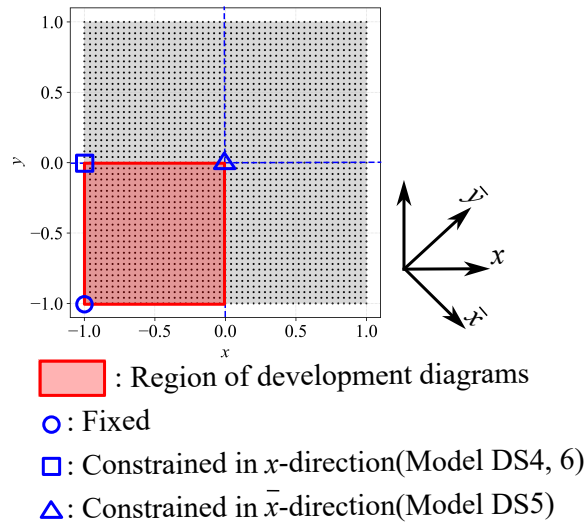


図 5.19: モデル DS4, 5, 6: 展開図を作成する領域と制約条件

表 5.4: モデル DS4, 5, 6: 最適化の結果得られた展開図の誤差指標

モデル	$E(\mathbf{P})$	二乗和 E_{ss}	Max.	平均値	標準偏差
DS4	2.60×10^{-4}	8.74×10^{-7}	3.41×10^{-4}	6.63×10^{-6}	1.38×10^{-5}
DS5	9.14×10^{-6}	5.81×10^{-8}	1.05×10^{-4}	1.23×10^{-6}	3.77×10^{-6}
DS6	1.33×10^{-6}	5.42×10^{-9}	1.95×10^{-5}	6.66×10^{-7}	1.00×10^{-6}

誤差の二乗和 E_{ss} は次の式により求めた.

$$E_{ss}(\mathbf{x}^P) = \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^3 \left(e_{i,j}(\mathbf{x}^P) \right)^2 \quad (5.35)$$

すべてのモデルについて誤差が小さく、辺ごとの誤差のばらつきが小さいことから、精度の良い展開図が得られていることがわかる.

5.5 5 章の結論

本章では、主応力方向と主応力の大きさの分布が曲面形状に与える影響について着目し、シェルの膜理論に基づく釣合い方程式を応用して可展面の形状を設計する手法を提案した. 提案手法は、水平投影応力の主応力と仮想の荷重分布を設計パラメータとして、釣合い方程式を離散化した線形連立方程式を解くことで可展面、または区分的可展面を生成することができる.

本章で得られた成果は以下のとおりである.

1. 釣合い方程式を離散化した線形連立方程式を解くことで曲面形状を得る第 3 章の手法を拡張

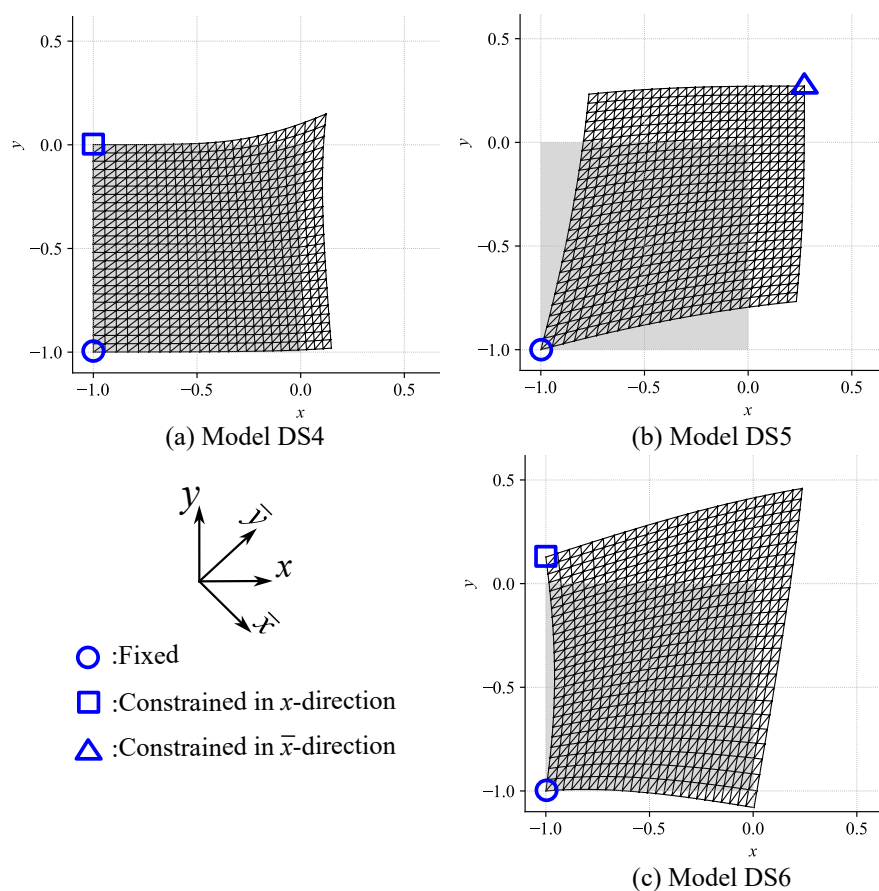


図 5.20: モデル DS4, 5, 6: 展開図

し、水平投影応力の主応力もしくは仮想の荷重の平面分布を指定することにより、区分的可展面を生成する手法を提案した。境界条件や荷重条件により線形連立方程式の解が不定となる場合には、特定の目標形状に対する偏差量の 2 乗ノルムが最小となる解を求めることにより、曲面を生成することができることを示した。

2. 設計パラメータとして用いる水平投影応力に対して制約を与え、主応力のうち一方が 0 になるよう水平投影応力を指定した。荷重伝達方向は水平投影応力の主方向となり、1 方向のみに荷重が伝達される形状を得ることができるため、得られる可展面の形状を想定しやすくなる。
3. 曲面の可展性を離散微分幾何学における angle defect に基づく離散ガウス曲率を用いることで、主曲率と主方向を 2 階の偏導関数に基づいて算出する場合よりも少ない計算コストで、可展性を評価することができる。最適化手法を用いた手法においても離散ガウス曲率の 2 乗和を最小化する問題を解くことで可展面を得る手法を提案した。
4. 水平投影応力分布の主応力と仮想の荷重の分布を基底関数を用いてパラメータ表示し、関数

の係数を設計変数として、曲面のガウス曲率の 2 乗和を最小化する最適化問題を解くことで、単純な柱面ではない錐面や接線曲面からなる複雑な形状を組み合わせた区分的可展面を生成する手法を提案した。提案手法は、数個の少ない設計変数で応力もしくは荷重をパラメータ表示するため、最適化問題のサイズは小さく、最適化に要する繰り返し回数も少ない。一方で、曲面はパラメトリック表示せず、全ての内部格子点の高さが変数である。

5. 数値例題では、一様な分布荷重と滑らかに変化する水平投影応力を指定することにより、曲率が連続的に変化する滑らかな可展面が得られた。微分方程式に基づき曲面を生成することで、angle defect を用いても corrugated surface が生じない滑らかな可展面を生成することが可能であることを確認した。また線荷重を与えて曲面の勾配が不連続となる領域を作ることと、対称性を考慮して 4 つの可展面からなる区分的可展面を提案手法で設計した。主応力を設計パラメータで定義した例において柱面と錐面を、仮想の荷重を設計パラメータとした例において接線曲面を、それぞれ生成できることを示した。区分的可展面における内部境界、およびシェル領域の外周の境界は直線である必要がなく、曲線の内部境界をもつ区分的可展面を生成することができた。
6. 提案手法により生成された区分的可展面に対して、展開図を作成することにより、数値例題において得られた可展面の精度を確認した。例題モデルの結果はいずれも誤差が非常に小さい値となっており、確かに可展面が得られていることを確認した。

第 6 章

結論

6.1 研究の成果

本研究では、連続体シェルの釣合い方程式に基づき、応力分布を設計パラメータとする自由曲面構造の設計手法を提案した。

本研究で得られた成果を第 3 章から第 5 章に分けて以下に示す。

第 3 章では、グラフ曲面として定義した連続体シェル曲面の水平投影応力を指定し、自重に対して膜応力で釣合う自由曲面シェルの形状を設計する方法を提案した。提案手法は膜応力の鉛直方向の釣合い式を有限差分法で離散化して、線形連立方程式を繰り返し解くことでシェル形状を設計することができる。水平投影応力のうちせん断応力を平面座標の関数として定義し、水平方向の釣合い方程式を満たすよう水平投影応力分布を指定することで、多様な曲面形状を有するシェルを生成することが可能となる。また、提案手法で設計したシェルに材料特性を定めて有限要素解析を行い、弾性変形を考慮した場合の水平投影応力分布を一様化する手法を提案した。

数値例題において、提案手法を用いて Takeoka ら [52] の既往の手法と同様のシェルの釣合い形状を求めることで、既往の手法に比べて計算コストを低減できることを示した。せん断応力を平面座標の関数として定義した例題により、曲面形状が非対称となるシェル形状を生成可能であることを確認した。また、水平投影応力の主応力方向を変化させることで、シェル形状を特徴づける主曲率方向を制御し、多様なシェル形状を生成可能であることを示した。水平投影応力を直接指定できることから、シェルの 1 辺を鉛直反力が生じない自由境界として指定した例では、提案手法がアーチ型の自由境界を有するシェル形状の設計に適用可能であることを示した。

また第 3 章では、一様な水平投影応力分布を指定して提案手法で設計したシェル形状を対象として、材料特性を定めて有限要素解析を行うことで、弾性変形を考慮した場合の水平投影応力分布を確認した。形状設計において指定した水平投影応力と有限要素解析により得られた水平投影応力との誤差に対して、誤差を改善する形状補正手法を提案した。提案手法により、一様な水平投影応力分布を指定した場合には、境界付近の領域を除いて水平投影応力分布を一様化することができた。

ライズが十分に小さいシェルでは、水平投影応力と曲面の膜応力の差は小さい。したがって、弾

性変形を考慮した水平投影応力を一様化することで、シェルを等厚断面により構成することが可能となる。構造種別として鉄筋コンクリートによるシェルを想定すると、シェルの設計においてひび割れを生じさせる引張応力の発生は望ましくないが、数値例題に示したように引張応力が生じる範囲は限定的であり、隅部にプレストレスを導入するなどの対応を行うことで、ひび割れを防止することが可能と考えられる。

第4章では、鉛直方向の釣合い方程式が双曲型となる圧縮引張混在型シェルの形状設計法を提案し、波動方程式の初期値境界値問題を参照して、境界条件を適切に設定することで圧縮引張混在型シェルの解形状が得られることを示した。金属系材料や木質材料など引張応力を許容する材料の適用により、圧縮と引張の混在を許容したより多様なシェル形状の設計が可能となる。また、1つの矩形平面領域における形状設計だけでなく、指定した境界形状が特性曲線の方に伝播する双曲型偏微分方程式の性質を利用して、複数の領域からなるシェル曲面形状を接続することで、区分的に滑らかなシェルの形状設計手法を提案した。

まず、釣合い方程式が双曲型となるシェルについて、境界条件と水平投影応力分布が解の存在と不定性に影響を与えることを、双曲型偏微分方程式の一つである波動方程式の初期値境界値問題を参照して考察した。波動方程式の初期値境界値問題の理論に基づき、解が存在するための条件を整理し、数値例題において波動方程式の解との比較による提案手法の検証を行った。双曲型偏微分方程式において初期値・境界値に適合する解形状を逐次求める陽解法に比べて、安定性に関する付加的な条件がなく、解が不定となる問題についても適用可能である点において、提案手法は優れている。また、釣合い方程式を離散化した線形連立方程式の係数行列のランクを用いて解の存在や不定性について判定する方法を提案し、解の不定性への対応と滑らかな解形状の設計のため、正則化項とスムージング項を導入した。さらに、境界条件における解形状が特性曲線に沿って伝播する双曲型偏微分方程式の性質を利用し、複数の領域でシェル曲面を逐次生成し、これらを接続する手法を提案した。

数値例題では、まず提案手法によって得られる解形状と、1次元波動方程式の2階中心差分による陽解法による解を比較することで、提案手法の解の妥当性を検証した。解が不定となるような境界条件を定めた例題により、正則化項が有効であること、およびスムージング項が滑らかな解形状を得るために有効であることを確認した。また、双曲型偏微分方程式である鉛直方向の釣合い方程式の解について、重ね合わせの原理が成り立つことを示した。荷重項をシェルの自重とした場合についても検証を行い、第3章で提案した手法と同様の繰り返し計算によって荷重項を逐次更新し、シェル形状を生成する手法について収束解を得ることができた。さらに、複数の領域で圧縮引張混在型シェルを生成し、これらを接続する手法について例を示した。この提案手法により、各シェル曲面の境界を G^0 連続となるよう接続することが可能となり、リズミカルな意匠をもつシェル曲面形状を生成可能であることを示した。得られた形状の主曲率分布を確認することで、指定した境界形状がシェル曲面内を特性曲線の方に伝播することを確認した。

提案手法は、1つのシェル領域の形状生成において線形連立方程式を1度解くだけで解形状を得ることができるため、繰り返し計算を必要とする既往の手法 [54,56] に比べて計算コストが少ない。

一方でパラメトリック曲面を用いないことから形状表現の自由度が高く、これらの点は提案手法の優れた点である。

第5章では、釣合い方程式を離散化した線形連立方程式を解くことで曲面形状を得る第3章の手法を応用し、水平投影応力の主応力もしくは仮想の荷重の平面分布を設計パラメータとして区分的可展面を生成する手法を提案した。設計パラメータとして用いる水平投影応力に対して制約を与え、主応力のうち一方が0になるよう水平投影応力を指定する手法を提案した。提案手法は、荷重が1方向のみに伝達される形状を得ることができるため、得られる可展面の形状を想定しやすくなる。また、曲面の可展性を離散微分幾何学における angle defect に基づく離散ガウス曲率を用いて評価し、一様な分布荷重と滑らかに変化する水平投影応力を指定することにより、曲率が連続的に変化する滑らかな可展面が得られる。離散ガウス曲率を用いた可展性の評価を採用することで、パラメトリック曲面を用いた際にガウス曲率の計算のために必要な基底関数の高階微分が不要となる。

また、水平投影応力分布の主応力と仮想の荷重の分布を基底関数を用いてパラメータ表示し、関数の係数を設計変数として、曲面の離散ガウス曲率の2乗和を最小化する最適化問題を解くことで、単純な柱面ではない錐面や接線曲面からなる複雑な形状を組み合わせた区分的可展面を生成する手法を提案した。提案手法は、数個の少ない設計変数で応力もしくは荷重をパラメータ表示するため、最適化問題のサイズは小さく、最適化に要する繰り返し回数も少ないという利点をもつ。一方で、曲面はパラメトリック表示せず、全ての内部格子点の高さが変数であることから、曲面を表現する際の自由度は高い。

数値例題では、一様な分布荷重と滑らかに変化する水平投影応力を指定することにより、曲率が連続的に変化する滑らかな可展面が得られた。微分方程式に基づき曲面を生成することで、angle defect を用いても corrugated surface が生じない滑らかな可展面を生成することが可能であることを確認した。また、対称性を考慮して4つの滑らかな可展面からなる区分的可展面を提案手法で設計した。主応力を設計パラメータで定義した例において柱面と錐面を、仮想の荷重を設計パラメータとした例において接線曲面を、それぞれ生成できることを示した。また、提案手法により生成された区分的可展面に対して、展開図を作成することにより、数値例題において得られた可展面の精度を確認した。

提案手法で得られた形状のうち導線が放物線の柱面は、本手法を用いずとも、放物線を母線方向に推動させることで幾何学的に生成することができる。しかし提案手法は荷重をパラメータとすることでより多様な導線形状の柱面を得ることが可能であり、内部境界や外周部の境界が曲面となる区分的可展面にも適用できる。さらに数値例題で示したように、導線形状を推動させた柱面だけでなく、錐面や接線曲面を生成することも可能である。このように、得られる形状の自由度が大きい点は、本手法の利点といえる。

6.2 今後の展望

第3章から第5章に示した提案手法について、今後の展望を以下に示す。

第3章では、連続体シェルの鉛直方向の釣合い方程式に基づく曲面形状の設計手法を提案した。有限要素解析に基づき水平投影応力を一様化する手法において、境界に平行な方向の直応力は、横ひずみ等の弾性変形や面外せん断力の影響により境界付近では指定値に一致しない。また、シェル隅部の断面において面外曲げモーメントによる引張応力が生じることがわかっている。これらの境界の近傍における応力の誤差についての検討については、今後の課題である。

また、一般に曲面を対象とした形状設計手法において適合条件を考慮することは難しい。シェルのライズが小さい場合は、投影応力が適合条件を満たせば膜応力も適合条件を概ね満たすと考えられる。第3章では、有限要素解析と形状設計手法を組合せて応力を一様化する手法を提案し、指定水平投影応力のうちせん断応力が0となる一様応力分布について検討した。水平投影応力の直応力・せん断応力の各成分を平面座標の関数として定義した場合には、形状設計手法と有限要素解析の応力の誤差が大きくなると考えられるが、適合条件の影響の定量的検討については今後の課題としたい。

第4章において、提案した手法で得られた形状は自重あるいは指定外力に対して面内応力のみで釣合う形状であり、力学的合理性が確保される。一方で、形状設計の過程でシェルの剛性や変形を考慮していないため、シェルの力学性状を把握するために有限要素解析による変形や曲げモーメントの影響について検証する必要がある。

また第4章では、長方形平面を有するグラフ曲面のシェルに限定したが、第2章に示したパラメトリックな表現を用いることにより、曲線の境界を有するシェルにも拡張可能である。さらに、自由境界を実現する水平投影応力の分布を指定することで、曲線境界への拡張と合わせてより多様な形状を生成することが可能となる。Mikiら[54,56]の研究においてパラメトリック曲面を用いた自由境界・曲線境界に適用可能な手法はすでに提案されており、本研究の手法においても同様のアプローチが有効と考えられるが、これについては今後の課題としたい。

第5章に示した可展面の生成手法において、得られる形状は荷重に対して膜応力のみで釣合うシェル形状であるため、形状生成においてパラメータとして用いた荷重が実構造物に作用する荷重と同等であるとみなせる場合には、得られる形状は力学的に合理的な形状である。第3章に示したようにライズの小さいコンクリートシェルなど自重が水平投影面積に対して一様とみなせる場合には、一様分布荷重を指定して合理的な形状を生成できる。さらに、荷重や応力を変数とすることで、得られる形状と変数の定性的な関係が容易に想定できるという利点がある。

本手法で得られる可展面形状は、シェルの鉛直方向の釣合い方程式に基づいて可展面を生成していることから、形状生成において想定した境界条件、荷重条件に対してシェルの膜応力で釣合う。

一方で、実構造物と異なる荷重条件を与えた場合や、曲面を生成する際の境界条件と整合しない支持条件の構造となる場合は、提案手法で得られた可展面形状による構造は、必ずしも力学的に合理的な形状とはならない。得られた可展面について有限要素解析を用いた力学的特性の検討には至っておらず、可展面の力学的特性の把握は今後の課題である。

また本章では、長方形平面を有するグラフ曲面のシェルに限定したが、第2章に示したパラメトリックな表現を用いることにより曲線の境界を有するシェルにも拡張可能であり、曲線境界を有する可展面を生成する手法への展開が考えられる。

参考文献

- [1] 大崎 純, 竹内 徹, 山下哲郎. シェル・空間構造の基礎理論とデザイン. 京大出版会, 2019.
- [2] 坪井善昭, 佐々木睦朗, 大崎 純, 植木隆司, 竹内 徹, 河端昌也, 川口健一, 金箱温春. 力学・素材・構造デザイン. 建築技術, 2012.
- [3] 坪井善勝. 曲面構造: シェルの理論とその応用. 丸善, 1965.
- [4] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. University Press, Cambridge, 1927.
- [5] Sigrid Adriaenssens, Philippe Block, Diederik Veenendaal, and Christopher Williams. *Shell structures for architecture: form finding and optimization*. Routledge, 2014.
- [6] Alphonse Zingoni. *Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering*. ICE Publishing, second edition edition, 2017.
- [7] Philippe Block, Matt Dejong, and John Ochsendorf. As hangs the flexible line: Equilibrium of masonry arches. *Nexus Network Journal*, Vol. 8, pp. 13–24, 2006.
- [8] Santiago Huerta. Structural design in the work of gaudí. *Architectural Science Review*, Vol. 49, No. 4, pp. 324–339, 2006.
- [9] Jos Tomlow. Gaudí's reluctant attitude towards the inverted catenary. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Engineering History and Heritage*, Vol. 164, No. 4, pp. 219–233, 2011.
- [10] Heinz Isler. Concrete shells derived from experimental shapes. *Structural Engineering International*, Vol. 4, No. 3, pp. 142–147, 1994.
- [11] Pál. Csonka. *Theory and practice of membrane shells*. VDI Verlag, 1987.
- [12] Matthias Rippmann. *Funicular Shell Design: Geometric approaches to form finding and fabrication of discrete funicular structures*. Doctoral thesis, ETH Zurich, Zurich, 2016.
- [13] Daniel Piker. Kangaroo: Form finding with computational physics. *Architectural Design*, Vol. 83, No. 2, pp. 136–137, 2013.
- [14] Philippe Block and John Ochsendorf. Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium. *Journal of the International Association for shell and spatial structures*, Vol. 48, pp. 167–173, 2007.
- [15] 佐々木睦朗. フラックス・ストラクチャー Flux structure. TOTO 出版, 2005.

- [16] Xavier Tellier. *Morphogenesis of curved structural envelopes under fabrication constraints*. Doctoral dissertation, Université Paris-Est, 2020.
- [17] 早川健太郎, 軸丸芳揮, 横須賀洋平, 可香谷隆, 林 和希, 堺 雄亮. シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチとその建築曲面設計への応用. Technical Report Vol. 83, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2021.
- [18] Ekkehard Ramm and Gerhard Mehlhorn. On shape finding methods and ultimate load analyses of reinforced concrete shells. *Engineering Structures*, Vol. 13, No. 2, pp. 178–198, 1991.
- [19] 木村俊明, 大森博司. 形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 640, pp. 1091–1098, 2009.
- [20] 藤田慎之輔, 大崎 純. ひずみエネルギーとパラメトリック曲面の代数不変量を考慮したシェルの形状最適化. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 639, pp. 857–863, 2009.
- [21] 永田洸大, 本間俊雄. 優良解探索機能を導入した群知能による自由曲面シェル構造の形態. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 78, No. 684, pp. 345–354, 2013.
- [22] 下田昌利, 米倉正人, 劉 陽. 最大応力最小化を目的とするシェル構造体のフリーフォルム最適化. 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 821, pp. 14–00389, 2015.
- [23] 大山晶平, 諸岡繁洋. 球形シェル境界部の上下面の形状変更による応力度低減効果. 構造工学論文集 B, Vol. 68B, pp. 186–193, 2022.
- [24] Stefano Gabriele, Valerio Varano, Giulia Tomasello, and Davide Alfonsi. R-Funicularity of form found shell structures. *Engineering Structures*, Vol. 157, pp. 157–169, 2018.
- [25] 塩見裕幸, 山本憲司. FEM 解析から得られる水平膜力分布を用いた吊り下げ膜の形状解析. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 87, No. 802, pp. 1193–1200, 2022.
- [26] 塩見裕幸, 山本憲司. 偏心低減法を用いたフニクラシェルの形状解析. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 88, No. 809, pp. 1156–1164, 2023.
- [27] 打樋勇人, 山本憲司. 曲げ歪エネルギー率を用いた自由曲面シェルの形状評価に関する研究. 構造工学論文集. B, No. 62, pp. 61–68, 2016.
- [28] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for CAGD : A Practical Guide*. Elsevier, 2002.
- [29] Karl Culmann. *Die graphische Statik*. Verlag Meyer & Zeller, Zürich, 1864.
- [30] J. Clerk Maxwell. On reciprocal figures and diagrams of forces. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 27, No. 182, pp. 250–261, 1864.
- [31] Luigi Cremona. *Elements of projective geometry*. Clarendon Press, 1875.
- [32] Mostafa Akbari, Armin Mirabolghasemi, Hamid Akbarzadeh, and Masoud Akbarzadeh. Geometry-based structural form-finding to design architected cellular solids. *Proceedings - SCF 2020: ACM Symposium on Computational Fabrication*, pp. 1–11, 2020.
- [33] Pierluigi D’Acunto, Jean Philippe Jasienski, Patrick Ole Ohlbrock, Corentin Fivet, Joseph Schwartz, and Denis Zastavni. Vector-based 3D graphic statics: A framework for the design of spatial structures based on the relation between form and forces. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 167, pp. 58–70, 2019.

- [34] Masoud Akbarzadeh, Tom Van Mele, and Philippe Block. On the equilibrium of funicular polyhedral frames and convex polyhedral force diagrams. *Computer-Aided Design*, Vol. 63, pp. 118–128, 2015.
- [35] Alessandro Beghini, Lauren L. Beghini, Joshua A. Schultz, Juan Carrion, and William F. Baker. Rankine’s theorem for the design of cable structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2013 48:5, Vol. 48, pp. 877–892, 2013.
- [36] Yao Lu, Márton Hablicsek, and Masoud Akbarzadeh. Algebraic 3D graphic statics with edge and vertex constraints: A comprehensive approach to extend the solution space for polyhedral form-finding. *Computer-Aided Design*, Vol. 166, p. 103620, 2024.
- [37] Etienne Vouga, Mathias Höbinger, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Design of self-supporting surfaces. *ACM Trans. Graph*, Vol. 31, No. 4, 2012.
- [38] Daniele Panozzo, Philippe Block, and Olga Sorkine-Hornung. Designing unreinforced masonry models. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 32, No. 4, 2013.
- [39] A. Pucher. Die berechnung der dehnungsspannungen von rotationsschalen mit hilfe von spannungsfunktionen. *Int. Vereinig. Brücken-u. Hochbau Abh.*, Vol. 5, pp. 275–299, 1938.
- [40] Wilhelm Flügge. *Stresses in Shells*. Springer Berlin Heidelberg, 1960.
- [41] Maurizio Angelillo, Enrico Babilio, and Antonio Fortunato. Singular stress fields for masonry-like vaults. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 25, pp. 423–441, 2013.
- [42] Masaaki Miki, Takeo Igarashi, and Philippe Block. Parametric self-supporting surfaces via direct computation of Airy stress functions. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 34, No. 4, pp. 89.1–89.12, 2015.
- [43] George Biddell Airy. II. On the strains in the interior of beams. *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 12, pp. 304–306, 1863.
- [44] Stephen Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959.
- [45] Yang Xia, Angelos Mantzaflaris, Bert Jüttler, Hao Pan, Ping Hu, and Wenping Wang. Design of self-supporting surfaces with isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 353, pp. 328–347, 2019.
- [46] Thomas J. R. Hughes, John A. Cottrell, and Yuri Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 39, pp. 4135–4195, 2005.
- [47] Yu-Chou Chiang and Andrew Borgart. A form-finding method for membrane shells with radial basis functions. *Engineering Structures*, Vol. 251, p. 113514, 2022.
- [48] Martin Dietrich Buhmann. Radial basis functions. *Acta Numerica*, Vol. 9, pp. 1–38, 2000.
- [49] Claudia Chianese, Luciano Rosati, and Francesco Marmo. Isogeometric form finding of membrane shells by optimised Airy stress function. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 426, p. 116946, 2024.

- [50] 堺 雄亮, 大崎 純. 膜応力の平面投影成分を用いた自由曲面シェルのノンパラメトリック形状設計法. 日本建築学会技術報告集, Vol. 27, No. 66, pp. 1098–1103, 2021.
- [51] Carlo Olivieri, Maurizio Angelillo, Antonio Gesualdo, Antonino Iannuzzo, and Antonio Fortunato. Parametric design of purely compressed shells. *Mechanics of Materials*, Vol. 155, p. 103782, 2021.
- [52] Riree Takeoka, Makoto Ohsaki, and Yusuke Sakai. Non-parametric design of free-form shells with curved boundaries and specified reaction forces. *Engineering Structures*, Vol. 255, p. 113892, 2022.
- [53] Dermot O'Dwyer. Funicular analysis of masonry vaults. *Computers & Structures*, Vol. 73, No. 1, pp. 187–197, 1999.
- [54] Masaaki Miki and Toby Mitchell. Interactive exploration of tension-compression mixed shells. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 41, No. 6, pp. 263.1–263.14, 2022.
- [55] Noah Burger and David P. Billington. Felix Candela, elegance and endurance: An examination of the Xochimilco shell. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 47, No. 3, pp. 271–278, 2006.
- [56] Masaaki Miki, Emil Adiels, William Baker, Toby Mitchell, Alexander Sehlström, and Chris J. K. Williams. Form-finding of shells containing both tension and compression using the Airy stress function. *International Journal of Space Structures*, Vol. 37, No. 4, pp. 261–282, 2022.
- [57] Masaaki Miki and Toby Mitchell. Alignment conditions for nurbs-based design of mixed tension-compression grid shells. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 43, No. 4, pp. 81.1–81.19, 2024.
- [58] 西森裕人, 本間俊雄, 横須賀洋平. 自由曲面グリッドシェル構造の部材長一様化と接合角を考慮した形態創生. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 81, No. 721, pp. 565–574, 2016.
- [59] Romain Mesnil, Cyril Douthe, Olivier Baverel, and Bruno Leger. Marionette meshes: Modelling free-form architecture with planar facets. *International Journal of Space Structures*, Vol. 32, pp. 184–198, 2017.
- [60] Jinglan Cui, Yanfeng Zheng, Makoto Ohsaki, and Yaozhi Luo. Shape optimization of piecewise developable free-form grid surface using plate components. *Engineering Structures*, Vol. 245, p. 112865, 2021.
- [61] Yang Liu, Helmut Pottmann, Johannes Wallner, Yong-Liang Yang, and Wenping Wang. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. In *ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, SIGGRAPH '06, pp. 681–689, New York, NY, USA, 2006. Association for Computing Machinery.
- [62] Jingyao Zhang and Makoto Ohsaki. A design tool for globally developable discrete architectural surfaces using Ricci flow. *Japan Architectural Review*, Vol. 6, p. e12410, 2023.
- [63] Jinglan Cui and Makoto Ohsaki. Shape design of curved surface of membrane structure using developable surface. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 59, pp. 199–214, 2018.

- [64] Alexander I Bobenko and Yuri B Suris. *Discrete differential geometry: Integrable structure*, Vol. 98. American Mathematical Soc., 2008.
- [65] Ulrich Pinkall and Konrad Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental Mathematics*, Vol. 2, No. 1, pp. 15–36, 1993.
- [66] Mathieu Desbrun, Konrad Polthier, Peter Schröder, and Ari Stern. Discrete differential geometry: an applied introduction. *ACM Siggraph Course*, Vol. 7, No. 1, 2006.
- [67] John M. Sullivan. Curvatures of smooth and discrete surfaces. *Discrete Differential Geometry*, Vol. 38, pp. 175–188, 2008.
- [68] Tim Hoffmann, Andrew O. Sageman-Furnas, and Max Wardetzky. A discrete parametrized surface theory in $\mathbb{R}^3$. *International Mathematics Research Notices*, Vol. 2017, No. 14, pp. 4217–4258, 2016.
- [69] Kazuki Hayashi, Yoshiki Jikumaru, Makoto Ohsaki, Takashi Kagaya, and Yohei Yokosuka. Discrete gaussian curvature flow for piecewise constant gaussian curvature surface. *Computer-Aided Design*, Vol. 134, p. 102992, 2021.
- [70] Caigui Jiang, Cheng Wang, Florian Rist, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Quad-mesh based isometric mappings and developable surfaces. *ACM Trans. Graph.*, Vol. 39, No. 4, pp. 128.1–128.13, 2020.
- [71] Kentaro Hayakawa, Makoto Ohsaki, and Jingyao Zhang. Meshless non-parametric shape design of piecewise approximately developable surfaces using discretized local gauss map. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 65, pp. 5–14, 2024.
- [72] Makoto Ohsaki and Kentaro Hayakawa. Non-parametric shape design of free-form shells using fairness measures and discrete differential geometry. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 62, pp. 93–101, 2021.
- [73] Oded Stein, Eitan Grinspun, and Keenan Crane. Developability of triangle meshes. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 37, No. 4, pp. 77.1–77.14, 2018.
- [74] Makoto Ohsaki, Kentaro Hayakawa, and Jingyao Zhang. Nonparametric shape optimization of piecewise developable surfaces for maximum stiffness using discrete differential geometry. *Proceedings of IASS Annual Symposia*, Vol. 2023, No. 9, pp. 1–7, 2023.
- [75] 日本建築学会 シェル・空間構造運営委員会（編）. コンクリートシェルの黎明期を支えた理論・技術・施工先人の手法をどう学ぶか, 2009 年度日本建築学会大会 (東北) パネルディスカッション資料. 日本建築学会, 2009.
- [76] A. Gesualdo, C. Cennamo, A. Fortunato, G. Frunzio, M. Monaco, and M. Angelillo. Equilibrium formulation of masonry helical stairs. *Meccanica 2016 52:8*, Vol. 52, pp. 1963–1974, 2016.
- [77] 菊地文雄, 齊藤宣一. 数値解析の原理: 現象の解明をめざして. 岩波数学叢書. 岩波書店, 2016.
- [78] 岡 康之, 平山浩之, 鈴木俊夫, 藤ノ木健介. 工科系のための偏微分方程式入門. 学術図書出版社, 2023.
- [79] 佐野 理. 基礎系 数学 偏微分方程式. 丸善出版, 2015.

- [80] Fritz John. *Partial Differential Equations*. Springer US, 1978.
- [81] Charles R. Harris, K. Jarrod Millman, Stéfan J. van der Walt, et al. Array programming with NumPy. *Nature*, Vol. 585, No. 7825, pp. 357–362, 2020.
- [82] Minjie Zhu, Frank McKenna, and Michael H. Scott. OpenSeesPy: Python library for the OpenSees finite element framework. *SoftwareX*, Vol. 7, pp. 6–11, 2018.
- [83] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, Vol. 9, No. 3, pp. 90–95, 2007.
- [84] Taku Nakajima and Makoto Ohsaki. Form finding and structural analysis of free-form shells with specified horizontal projected stress distribution. *Proceedings of IASS Annual Symposia*, No. 10, pp. 1–10, 2023.
- [85] 富田佳宏. 連続体力学の基礎. 養賢堂, 第2版, 2022.
- [86] 半谷裕彦, 川口健一. 形態解析：一般逆行列とその応用. 計算力学と CAE シリーズ. 培風館, 1991.
- [87] 寒野善博. 最適化手法入門. データサイエンス入門シリーズ. 講談社, 2019.
- [88] Arthur E. Hoerl and Robert W. Kennard. Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, Vol. 12, No. 1, pp. 55–67, 1970.
- [89] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder, and Alan H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '99, pp. 317–324, USA, 1999.
- [90] Leif Kobbelt, Swen Campagna, Jens Vorsatz, and Hans-Peter Seidel. Interactive multi-resolution modeling on arbitrary meshes. In *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '98, pp. 105–114, New York, NY, USA, 1998. Association for Computing Machinery.
- [91] 山口陽平, 梅谷俊治, 東 正毅. 離散ラプリアンを用いたメッシュデータの平滑化 (第1報). 精密工学会学術講演会講演論文集, Vol. 2003A, pp. 24–24, 2003.
- [92] 早川健太郎, 大崎 純. 離散的な曲面の幾何学的不変量を用いた膜構造の形状設計. 日本建築学会構造系論文集, Vol. 86, No. 783, pp. 772–782, 2021.
- [93] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, and Alan H. Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In Hans-Christian Hege and Konrad Polthier, editors, *Visualization and Mathematics III*, pp. 35–57. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [94] Makoto Ohsaki, Jun Fujiwara, and Fumiyoshi Takeda. Approximate cutting pattern optimization of frame-supported and pneumatic membrane structures. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 16, pp. 883–896, 2020.
- [95] Tomohiro Tachi. Origamizing polyhedral surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 16, No. 2, pp. 298–311, 2010.
- [96] Jun Mitani and Hiromasa Suzuki. Making papercraft toys from meshes using strip-based approximate unfolding. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 23, No. 3, pp. 259–263, 2004.

- [97] Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, Vol. 17, pp. 261–272, 2020.
- [98] Richard H. Byrd, Mary E. Hribar, and Jorge Nocedal. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 9, No. 4, pp. 877–900, 1999.

付録 A

1 次元波動方程式の初期値境界値問題

次の 1 次元波動方程式の初期値境界値問題を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < 1, t > 0) \\ h(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) & (0 < x < 1) \\ h(0, t) = \varphi(0), \quad h(1, t) = \varphi(1) & (t > 0) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

この問題の解 $h(x, t)$ を, 変数分離法と重ね合わせの原理を用いて求める [78]. c は正定数である. まず, 解が次に示す形をしていると仮定する.

$$h(x, t) = X(x)T(t) + \{\varphi(0) + x(\varphi(1) - \varphi(0))\} \quad (\text{A.2})$$

式 (A.2) のように, 解 $h(x, t)$ を変数 x のみの関数 $X(x)$ と変数 t のみの関数 $T(t)$ の積の形に分解できると仮定する方法を変数分離法という. ここで, $X(x) \neq 0, T(t) \neq 0$ とする. 式 (A.1) の第 1 式に式 (A.2) を代入すると, 次式を得る.

$$X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} - c^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} T(t) = 0 \quad (\text{A.3})$$

式 (A.3) は, $X(x) \neq 0, T(t) \neq 0$ を満たす x, t に対して, 次のように変形できる.

$$\frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \gamma \quad (\text{A.4})$$

ここで γ は x, t のいずれにもよらない定数である. 式 (A.4) から次の 2 つの常微分方程式が得られる.

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = c^2 \gamma T(t), \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \gamma X(x) \quad (\text{A.5})$$

式 (A.5) の第 2 式は $X(x)$ についての常微分方程式であり, この方程式の一般解は次のように書ける.

$$(i) \ \gamma = \lambda^2 > 0 \text{ のとき: } \quad X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} \quad (\text{A.6})$$

$$(ii) \ \gamma = 0 \text{ のとき: } \quad X(x) = C_1 + C_2 x \quad (\text{A.7})$$

$$(iii) \ \gamma = -\lambda^2 < 0 \text{ のとき: } \quad X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (\text{A.8})$$

C_1, C_2 は定数である．この式の境界条件は式 (A.1) から $X(0) = 0, X(1) = 0$ である． $\gamma \geq 0$ のとき $X(0) \equiv 0$ 以外に解がなくなるため， $\gamma = -\lambda^2 < 0$ とする．このとき常微分方程式の一般解は，

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (\text{A.9})$$

と書ける．式 (A.9) が式 (A.1) の境界条件を満足するとき $\sin \lambda = 0$ でなければならない．よって， $\lambda = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) として解 $X_n(x)$ は次のように書ける．

$$X_n(x) = C_2 \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.10})$$

次に， $T(t)$ についての常微分方程式である式 (A.5) の第 1 式を解く． $\gamma = -(n\pi)^2$ から常微分方程式は，

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -(cn\pi)^2 T(t) \quad (\text{A.11})$$

と書ける．この方程式の一般解は次のように書ける．

$$T(t) = T_n(t) = A_n \cos cn\pi t + B_n \sin cn\pi t \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.12})$$

A_n, B_n は ($n = 1, 2, \dots$) に応じて決まる定数である．以上により，次に示す関数 $h_n(x, t)$ は，式 (A.1) の波動方程式と境界条件を満たす特解となる．

$$h_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = (A_n \cos cn\pi t + B_n \sin cn\pi t) \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.13})$$

これは $n = 1, 2, \dots$ で成り立つ．式 (A.1) は線形の偏微分方程式であるから，重ね合わせの原理により

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos cn\pi t + B_n \sin cn\pi t) \sin n\pi x \quad (\text{A.14})$$

とおくと，式 (A.14) も式 (A.1) の波動方程式を満たす． A_n, B_n ($n = 1, 2, \dots$) は初期条件を満足するように定める．式 (A.1) の初期条件は，式 (A.14) を用いて次のように書ける．

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} cn\pi B_n \sin n\pi x \quad (\text{A.15})$$

これらの右辺は奇関数のフーリエ級数展開であるため， $\varphi(x), \psi(x)$ がともに奇関数であれば A_n, B_n はそれぞれ $\varphi(x), \psi(x)$ のフーリエ係数として求められる．ここで， $\varphi(x), \psi(x)$ を次式により奇関数に拡張する．

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ -\varphi(-x) & (-1 \leq x < 0) \end{cases}, \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ -\psi(-x) & (-1 \leq x < 0) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

このとき， $A_n, cn\pi B_n$ は次のように求められる．

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x dx, \\ cn\pi B_n &= \int_{-1}^1 \tilde{\psi}(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin n\pi x dx \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

さらに, $A_n = \varphi_n$, $cn\pi B_n = \psi_n$ とし, 式 (A.2) の右辺の線形項を加えることで, 1 次元波動方程式の初期値境界値問題の解 $h(x, t)$ が次のように得られる.

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos cn\pi t \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{\sin cn\pi t}{cn\pi} \sin n\pi x + \{\varphi(0) + x(\varphi(1) - \varphi(0))\} \quad (\text{A.18})$$

$$\varphi_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x dx, \quad \psi_n = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin n\pi x dx \quad (\text{A.19})$$

ここで, 三角関数の積和公式を用いると, 式 (A.18) は次のように書ける.

$$\begin{aligned} h(x, t) = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \{\sin(n\pi(x - ct)) + \sin(n\pi(x + ct))\} \\ & + \frac{1}{2c\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \{\cos(n\pi(x - ct)) - \cos(n\pi(x + ct))\} + \{\varphi(0) + x(\varphi(1) - \varphi(0))\} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

波動方程式の解は $x - ct = \text{const.}$ に沿って伝播する進行波と, $x + ct = \text{const.}$ に沿って伝播する後退波の重ね合わせとなる.

発表論文リスト

本論文に関する発表論文

全文査読論文（3 編）

1. 中嶋 拓, 大崎 純, 三木 優彰: 圧縮と引張が混在する自由曲面シェルの双曲型釣合い方程式に基づく形状設計, 日本建築学会構造系論文集, Vol.90, No.831, pp.568–578, 2025. (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.90.568>)
2. 中嶋 拓, 大崎 純: シェルの釣合い方程式を用いた区分的可展面の形状生成法, 日本建築学会構造系論文集, Vol.89, No.822, pp.897–907, 2024. (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.89.897>)
3. 中嶋 拓, 大崎 純: 指定水平投影応力分布を有する自由曲面シェルの形状設計, 日本建築学会構造系論文集, Vol.88, No.808, pp.945–953, 2023. (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.88.945>)

国際会議論文（2 編）

1. T. Nakajima and M. Ohsaki, Form generation of piecewise developable surfaces with curved boundaries based on equilibrium equations of membrane shells, Proc. 14th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures (APCS 2025), Kanazawa, Japan, Paper No. C000010 (PS1-1_2FB-01), 2025.
2. T. Nakajima and M. Ohsaki, Form finding and structural analysis of free-form shells with specified horizontal projected stress distribution, Proc. IASS Symposium 2023, Melbourne, Australia, International Association for Shell and Spatial Structures, pp.1–10, 2023.

口頭発表（3 編）

1. 中嶋 拓, 大崎 純, シェルの釣合い方程式における応力分布を変数とする区分的可展面の形状生成, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), B1, pp. 727–728, Paper No. 20369, 2024.
2. 中嶋 拓, 大崎 純, 水平投影応力の主方向を変数とする自由曲面シェルの形状設計, 日本建

築学会大会学術講演梗概集 (近畿), B1, pp. 989–990, Paper No. 20479, 2023.

3. M. Ohsaki, Y. Sakai, T. Nakajima and R. Takeoka, Shape design of free-form shells with specified projected membrane forces, International Congress on Industrial and Applied Mathematics 2023, No.02924, 2023.

その他の発表論文（共著含む）

全文査読論文

1. 白石 彩華, 弾 健太郎, 中嶋 拓, 福本 義之, 大住 和正, 鈴木 直子, 宮本 裕司, 地震副断層による地盤変位を考慮した杭基礎設計法の提案と試設計, 日本建築学会技術報告集, Vol.27, No.67, pp.1207–1212, 2021.
2. M. Ohsaki and T. Nakajima, Optimization of link member of eccentrically braced frames for maximum energy dissipation, Journal of Constructional Steel Research, Vol.75, pp.38–44, 2012.
3. M. Ohsaki, T. Nakajima, J. Fujiwara and F. Takeda, Configuration optimization of clamping members of frame-supported membrane structures, Eng. Struct., Vol.33, pp. 3620–3627, 2011.
4. T. Kinoshita, M. Ohsaki and T. Nakajima, Topology optimization of compliant mechanisms for vertical seismic isolation of spatial structures, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol.50(2), pp. 89–96, 2009.

国際会議論文

1. M. Ohsaki and T. Nakajima, Optimization of energy dissipation property of eccentrically braced steel frames, Proc. 9th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WC-SMO9), Shizuoka, Paper No. 081_1, 2011.
2. T. Nakajima, M. Ohsaki, J. Fujiwara and F. Takeda, Configuration optimization of clamping members of frame-supported membrane structures, Proc. IASS Symposium 2010, Shanghai, China, International Association for Shell and Spatial Structures, pp.661–672, 2010.
3. J. Fujiwara, T. Nakajima, M. Ohsaki and F. Takeda, Continuum shape optimization of clamping members of membrane structures under stress constraints, Proc. IASS Symposium 2010, Shanghai, China, International Association for Shell and Spatial Structures, pp.673–683, 2010.
4. T. Nakajima, M. Ohsaki, J. Fujiwara and F. Takeda, Configuration optimization of anchoring devices of frame-supported membrane structures for maximum clamping force, Proc. 6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems (CJK-OSM6), Kyoto, Japan, Paper No. J02, 2010.
5. J. Fujiwara, T. Nakajima, M. Ohsaki and F. Takeda, Shape optimization of clamping members of frame-supported membrane structures under stress constraints, Proc. 6th China-Japan-Korea

Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems (CJK-OSM6), Kyoto, Japan; Paper No. J20, 2010.

6. T. Kinoshita, M. Ohsaki and T. Nakajima, Topology optimization of compliant mechanisms for seismic isolation of spatial structures, Proc. 9th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structure (APCS 2009), Paper No. 30, 2009.

口頭発表

1. 弘中 敏之, 芋野 匡俊, 中嶋 拓, 弾 健太郎, データマイニングによる連結制振構造のダンパー配置に関する考察 その1: 入力変数と出力変数の考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.225–226, 2024.
2. 芋野 匡俊, 弘中 敏之, 中嶋 拓, 弾 健太郎, データマイニングによる連結制振構造のダンパー配置に関する考察 その2: 特徴量の導入および効果的な特徴量について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.227–228, 2024.
3. 宮脇 正尚, 中村 吉秀, 三谷 淳, 山口 温弘, 中嶋 拓, 免震材料の特性のばらつき評価に関する確率分布を用いた考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.801–802, 2024.
4. 弾 健太郎, 中嶋 拓, 多目的最適化手法を用いた連結制振構造の最適ダンパー配置, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.297–298, 2023.
5. 谷 翼, 中嶋 拓, 永野 正行, 魚骨モデルを用いた超高層 RC 造建物の大振幅地震応答とスリップ特性に伴う応答増幅 その1: 整形な平面を有する実建物モデルを用いた検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.881–882, 2022.
6. 中嶋 拓, 谷 翼, 永野 正行, 魚骨モデルを用いた超高層 RC 造建物の大振幅地震応答とスリップ特性に伴う応答増幅 その2: 中央に吹き抜けのある実建物モデルを用いた検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.883–884, 2022.
7. 飯田 里緒, 谷 翼, 中嶋 拓, 永野 正行, 魚骨モデルを用いた超高層 RC 造建物の大振幅地震応答とスリップ特性に伴う応答増幅 その3: 平均的な部材特性を有する修正魚骨モデルの大振幅応答, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.885–886, 2022.
8. 中西 悠, 白井 和貴, 笹元 克紀, 貞許 美和, 中嶋 拓, 岡野 創, 履歴ダンパー付き 20 層 RC フレーム構造の地震応答性状に関する解析的検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.791–792, 2021.
9. 弾 健太郎, 中嶋 拓, 大住 和正, 宮本 裕司, 断層変位を考慮した群杭基礎の変形解析 その2 群杭モデルの解析手法の検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.513–514, 2020.
10. 中嶋 拓, 中塚 光一, 花村 浩嗣, 岡田 郁夫, 熊谷 由章, 熊谷 祥吾, 緩衝装置を含めた免震建物衝突設計手法の検討 (その4) 免震フェンダー適用時の時刻歴応答解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.549–550, 2016.
11. 大住 和正, 安井 雅明, 寺井 亮, 岡田 郁夫, 中嶋 拓, 三輪田 吾郎, 緩衝装置を含めた免震建物衝

突設計手法の検討 (その 3) 免震フェンダーの適用効果, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.547-548, 2016.

12. 大住 和正, 安井 雅明, 福本 義之, 熊谷 由章, 中嶋 拓, 佐野 剛志, 緩衝装置を含めた免震建物衝突設計手法の検討:(その 1) 設計手法の提案, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.493-494, 2015.
13. 中嶋 拓, 大崎 純, 偏心ブレース架構のエネルギー消費性能最適化, 計算工学講演会論文集, Vol.16, Paper No. D-5-2, 2011.
14. 大崎 純, 中嶋 拓, 繰返し载荷を受ける偏心ブレース架構のリンク部材形状最適化, 日本建築学会・情報システム技術委員会 第 34 回情報システム利用技術シンポジウム, pp.127-130, 2011.
15. 中嶋 拓, 大崎 純, 偏心ブレース架構のエネルギー消費性能最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.607-608, 2011.
16. 中嶋 拓, 大崎 純, 偏心ブレース架構のエネルギー消費性能を考慮したリンク部材形状最適化, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 構造系 (51) pp.457-460, 2011.
17. 中嶋 拓, 大崎 純, 木下拓也, 柔構造のトポロジー最適化による上下方向免震装置の設計, Dynamics and Design Conference 2010, 日本機械学会, 2010.
18. 中嶋 拓, 大崎 純, 藤原 淳, 武田 文義, 骨組膜構造物の定着部拘束力最大化のための形状最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.907-908, 2010.
19. 藤原 淳, 中嶋 拓, 大崎 純, 武田 文義, 骨組膜構造物の定着金物の応力制約下での形状最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.909-910, 2010.
20. 中嶋 拓, 大崎 純, 藤原 淳, コンプライアントメカニズムを用いた骨組膜構造物の定着部拘束力最大化のための形状最適化, コロキウム構造形態の解析と創生 2009, 日本建築学会, pp.47-52, 2009.
21. 中嶋 拓, 大崎 純, 木下 拓也, 柔構造のトポロジー最適化による免震装置の設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.355-356, 2009.
22. 中嶋 拓, 大崎 純, 木下 拓也, 柔構造のトポロジー最適化による免震装置の設計, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 構造系 (49) pp.121-124, 2009.

謝辞

本論文は、私が博士課程の3年間で行った研究をまとめたものです。研究の成果を論文としてまとめることができたのは、多くの方々のご指導、ご助言、ご理解のおかげです。ここに、深く感謝の意を表します。

大学と大学院の修士課程からの恩師であり指導教員の京都大学教授 大崎 純先生には、懇切なるご指導ご鞭撻を賜りましたことを厚くお礼申し上げます。2022年3月に博士後期課程への編入学の相談に伺った際には、先生のもとで曲面構造に関する研究に取り組みたいという私の希望を快くお聞き入れくださり、また今日に至るまで、社会人としての業務を行いながらの研究に苦慮しておりました私に対し、継続的に的確なご助言を賜り、研究を推進するための多大な示唆を与えてくださいました。さらに、JST CRESTの共同研究グループの研究集会への参加や、国際会議での研究発表など、貴重な機会を数多く与えていただき、かけがえのない経験を積むことができました。ここに深甚なる感謝の意を表します。

京都大学教授 荒木 慶一先生、同教授 谷 昌典先生には、本論文の審査・公聴会において研究に対する貴重なご意見、ご指摘を賜りました。先生方から頂戴したご助言は、本研究の主張をより明確にし、論文の質を高める上で大変参考になりました。深く感謝の意を表します。

本論文の第4章の内容は、東京大学助教 三木優彰先生との共同研究をもとに執筆しました。三木先生には、圧縮引張混在型のシェルに関連する先生の先行研究について、大変丁寧にご教示いただきました。共同研究の過程では、ご懇切な指導とともに、示唆に富む数多くの貴重なご助言を頂戴しました。ここに深く感謝いたします。

本論文の基礎をなす、水平投影応力分布に基づくシェル曲面の形状設計法について、ソニーコンピュータサイエンス研究所の堺雄亮氏と、竹中工務店の竹岡里玲英氏が取り組まれた研究成果が、本研究に着手する貴重な契機となりました。お二人の研究成果を基盤として研究を進められたことは、私にとってこの上ない助けとなりました。堺氏には、論文の内容について研究集会等で度々議論いただく機会を賜り、多岐にわたるご助言を頂戴いたしました。心より感謝を申し上げます。

京都大学建築構造学講座の准教授 張 景耀先生、同講師 林 和希先生、日本大学助教の早川健太郎先生には、建築空間構造分野の第一線でご活躍される研究者として、本研究内容に関して極めて有益なご意見を数多く頂戴しました。また、京都大学大学院におけるゼミや研究活動に関する細かな質問に対しても、常に親身になってご対応頂きました。秘書の齊木彩文氏には、研究活動に関連する様々な事務手続きについて、ご協力を頂きました。皆様に厚く感謝の意を表します。

大阪産業大学准教授 和多田遼先生，近畿大学准教授 藤田慎之輔先生は，実務を経験されながら大崎先生のもとで学位を取得された研究室の先輩であり，研究と実務を横断してご活躍されるお二人の姿は，同門の後輩である私にとって大変な励みになりました．和多田先生には建設会社の設計部に在籍しながら学位取得された先輩として多くのご助言を賜りました．藤田先生には，研究集会で本研究に関する貴重なご意見を賜り，また本論文の第3章の有限要素解析に関する参考資料を提供頂きました．心より感謝を申し上げます．

大林組大阪本店構造設計部の上司・同僚の皆様には，ご理解と多大なるご協力を賜りました．特に私が編入学するにあたり，勤務先である大林組の当時の上司でいらした福本義之氏，古島正博氏には，業務において多大なご配慮を賜りました．そのおかげで，社会人として博士課程を修めるという貴重な機会を得られましたこと，心より感謝申し上げます．

そのほか，ここには書ききれなかった多くの方々からのご助力に感謝の意を表します．

最後に，この長きにわたる私の学位取得への挑戦を，日々，心身ともに支え続けてくれた最愛の妻と二人の娘に，心から感謝の気持ちを捧げます．

本当に，ありがとうございました．

2025 年 8 月

中嶋拓