

超曲面の関数体の体論と幾何

新潟大理 吉原久夫
(Hisao Yoshihara)

§ 1. 超越拡大に対する体論

k : 基礎体

K/k : 有限生成拡大体

これが超越的のとき少し詳しく調べてみる。

K_m : 極大有理的中間体

$\text{tr. deg}_k K = n$ とおく。

$n \leq 2$, $\text{ch } k = 0$ なら K_m の部分体は有理的である。

— 次の問題を考察する。 —

- (1) いつ K/K_m はガロワ拡大か？
- (2) L を K/K_m のガロワ閉包とすると、 L はいかなる体か？
- (3) $\text{Gal}(L/K_m)$ を求めよ。
- (4) 同値と法として埋め込み $K_m \hookrightarrow K$ はどの

くらいあるか？

幾何学的考察とする。以下 $ch \bar{K} = 0$, $\bar{K} = \overline{K}$ と仮定する。

$$dr(K) = \min \left\{ [K : K_m] \mid K_m : \begin{array}{l} \text{極大有理} \\ \text{的中間体} \end{array} \right\}$$

と置き, K の非有理次数という。 K をモデルとする代数多様体にも定義して, 双有理不変量となる。

定理 0.

- (1) $n = 1$ (難波 [6]). K は smooth model C を $\mathbb{P}^2$ にとつとる。 $d = \deg C (\geq 3)$ とすると,
 $dr(K) = d - 1$. しかもこのときの K/K_m は, $\exists p \in C$
 projection $\pi_p : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ で与えられる。
- (2) $n = 2$ (— [8], Cortini [1]). K は smooth model S を $\mathbb{P}^3$ にとつとる。 $d = \deg S (\geq 3)$ とすると,
 $dr(K) = d - 1$ または $d - 2$.

この結果をふまえて次の考察をする。

$V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の $d (\geq 4)$ 次 smooth hypersurface とし, $P \in \mathbb{P}^{n+1}$ から hyperplane H への射影

$\pi_P : V \longrightarrow H$ を考える。これにおいて体の拡大
 $\pi_P^* : k(H) \hookrightarrow k(V)$ が得られる。この拡大は H
 の選定の方によらないで、 P のみに依存するので、次の
 定義ができる。

$$K_P := k(H) \cong k(\mathbb{P}^n)$$

$$L_P : K/K_P \text{ のガロワ閉包}$$

$$G_P := \text{Gal}(L_P/K_P)$$

これを点 P でのガロワ群という。

$$g(P) : L_P \text{ の smooth model の genus.}$$

注意 1. 定理 0 より, $n=1$ または 2 のとき K_P は極大有理的中間体である (但し, $d=4, n=2, P \notin V$ は除いて)

定義 1. K/K_P がガロワ拡大のとき P を Galois point という。この個数を $\delta(V)$ [resp. $\delta(V^c)$] for $P \in V$ [resp. $P \notin V$] と表わす。

問題 (続き)

- (5) $\mathbb{P}^{n+1}$ 上のガロワ点の分布と $\delta(V), \delta(V^c)$ を求めよ。

§ 2. 1 次元 のとき

$$d^* = d(d-2)(d^2-3)/2 \quad \text{とある.}$$

C^* と C の multi-tangent line の和 とある. このとき $\deg C^* \leq d^*$ である。

定理 2.1 $P \in C \setminus C^*$ のとき,

- (i) $G_P \cong \mathfrak{S}_{d-1}$ ($d-1$ 次対称群)
- (ii) $g(P) = (d-1)! (d+2)(d-3)/4 + 1$
- (iii) K_P と K の中間体はない。

定理 2.2 $P \in \mathbb{P}^2 \setminus (C \cup C^*)$ のとき,

- (i) $G_P \cong \mathfrak{S}_d$
- (ii) $g(P) = (d-1)! (d^2 - d - 4)/4 + 1$
- (iii) K_P と K の中間体はない。

とくに C が $\mathbb{Q}$ 上定義されているとき, $P = (a, b) \in C$ に対して $\deg P = \max \{ [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}], [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] \}$ とある. このとき

定理 2.3 $P \in C$ が $\deg P > dd^*$ ならば

定理 2.1 の (i) ~ (iii) が成立する。

次に $P \in C^*$ のうちで一番特別な場合, ガロワ点のときの考察をする。

定理 2.4

$$(i) \quad d=4, P \in C \implies \delta(C) = 0, 1 \text{ 或 } 4$$

$$(ii) \quad d \geq 5, P \in C \implies \delta(C) = 0 \text{ 或 } 1$$

P が ガロワ点 なら G_P は 位数 $d-1$ の巡回群

$$(iii) \quad d \geq 4, P \notin C \implies \delta(C) = 0, 1 \text{ 或 } 3$$

P が ガロワ点 なら G_P は 位数 d の巡回群

さらに 最大値を与える curve は 次の通り unique である。(射影同値になる)

$$(i)' \quad \delta(C) = 4 \iff C: y + x^4 + y^4 = 0$$

$$(iii)' \quad \delta(C) = 3 \iff C: x^d + y^d = 1$$

注意 2.1 (三浦) C が 特異点をもつと上の定理は成立しない。例えは" $y(x^2+y^2)^m + x^{m+1} + y^{m+1}$

$+ y = 0$ に対して $P = (0,0)$ は ガロワ点 であって,

$G_P \cong D_{2m}$ (位数 $2m$ の二面体群)。実際,

$$\text{生成元は } \begin{cases} (x, y) \mapsto (e_m x, e_m y), & e_m = e^{\frac{2\pi i}{m}} \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \end{cases}$$

特異点が無いときは G_P の元は射影変換から惹き
おこされたものであるが、特異点があるときの例のように、
そうはならない。§1の問題(1)~(5)を V に特異点
を許るとき考察することは興味深いことである。

上記では P が $\mathbb{G}_m$ と cyclic のときのみ調べたのであ
るが、その間の群について調べるのも面白いと思う。

例 2.2 (1) $F(d)$: $x^d + y^d = 1$ に対して、
 $d-1$ が素数なら $\forall P \in F(d)$ に対して $G_P \cong \mathbb{G}_{d-1}$.

しかし $F(5)$ については、 P が flex なら $G_P \cong D_8$
かつ $g(P) = 16$. 更に K/K_P の中間体 K' で、 $g(K') =$
 2 , $t^2 = 1 - 4s^5$, $K' = k(t, s)$, となる t のが存在す
る。 P が flex でなければ $G_P \cong \mathbb{G}_4$, 中間体はない。

(2) $d = 4$ のとき [4] に詳細な結果がある。 $F(4)$
について、
(例 2.3)

(i) $P \in F(4)$ のとき、 $G_P \cong \mathbb{G}_3$ で

(1) P が flex なら $g(P) = 9$ (12個の flex
がある)

(0) P が flex でなければ $g(P) = 10$.

(ii) $P \notin F(4)$ のとき

(1) ガロワ点は $(100), (010), (001)$.

(0) 12 個の点で $G_P \cong D_8$

(1) 上の 15 個以外の点で $G_P \cong S_4$

§3. 曲面のとき.

まだ概略しか分っていない。 $d=4$ のときのみ詳しく分っている。

定理 3.1

(1) $d=4 \Rightarrow \delta(S) = 0, 1, 2, 4 \text{ or } 8$

(2) $d \geq 5 \Rightarrow \delta(S) = 0, 1, \text{ or } 2$

(3) $d \geq 4 \Rightarrow \delta(S^c) \leq 4$

$$\text{等号} \Leftrightarrow S : x^d + y^d + z^d = 1$$

しかもガロワ点での群はすべて巡回群である。

さて、 $d=4$ のときについて：

$P \in S$ がガロワ点なら $T_P \cap S$ (T_P は P での接平面) は 4 本の異なる直線 l_i ($i=1, \dots, 4$) になる。

このとき $D = l_1 + l_2 + l_3$ とおくと、 $D^2 = 0$, $(D, l_4) = 3$, $h^0(D) = 2$ となり $|D|$ により

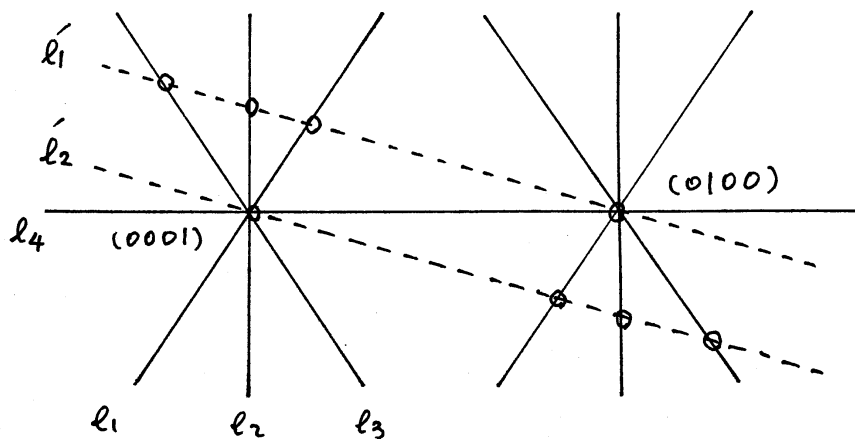
$$f = f_{|D|} : S \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{elliptic surface}$$

が得られる。 $e(S) = 24$ と singular fiber を調べる

と $\delta(S) \leq 8$ が得られる。

定理 3.2 $\delta(S) = 8$ とする必要十分条件は S が次の曲面 S_8 に射影同値とすることである：

$$S_8 : XY^3 + ZW^3 + X^4 + Z^4 = 0$$

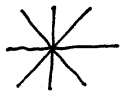


実線は S_8 上の直線を表わし、²¹⁴ $\circ$ はガロワ点を表わす。破線は S_8 上にはない直線を表わしている。

S_8 は Picard 数 20 の singular K3 surface で、この上に 64 本の直線がのっている（これは 4 次曲面の上に存在しうる最大数である）。

注意 3.3 (1) C_4 と S_8 の関係。

曲線と曲面の各々で δ の最大値を与えるものを C_4 と S_8 とする。 $C_4 : y + x^4 + y^4 = 0$ である。

前頁の図の直線 l'_2 と含む平面で S_8 を切つて得られる linear system を考える。4 個のガロワ点 π base point になり、それらを 1 回 π blow-up して fiber space $\tilde{f} : \tilde{S}_8 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が得られる。4 個の singular fiber は $\mathbb{P}^1$ が  という形に交わっているもので、それ以外の fiber は π として C_4 である。^{genus 3 のファイバー} _{ニヨン}

(2) $\mathcal{L}(S_8)$: 射影変換から惹き起された S_8 の自己同型群, $G(S_8)$: 8 個のガロワ点でのガロワ群の π の惹き起す自己同型により生成された群, とあると, $\# \mathcal{L}(S_8) = 2^7 \cdot 3^2$, $\# G(S_8) = 2^5 \cdot 3^2$ しかも $G(S_8)$ は $\mathcal{L}(S_8)$ の正規部分群 ([2]).

(3) (高橋 [7]), $d=4$ のとき, $\forall p \in S$ に対して $\kappa(L_p) = 2$ (小平次元) である。

(4) $d \geq 4$, $\delta \geq 2 \implies \dim(S) = d-2$ が成立する。

§4. 高次元のとき.

§1 の状況の下に, 次の座標系をとる.

(i) $P = (1:0:\dots:0)$

(ii) $X_1 = 0$ は V に接しない.

(iii) $\{X_0 = 0\} \cap V$ の各既約成分に対して, $\exists Q \in W$,

PQ を通る line は Q で V に接しない。

このとき $x_i = X_i / X_0$ ($i = 1, \dots, n+1$)

$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(X_0, X_1, \dots, X_{n+1}) / X_0^d$ とおき,

さらに, $x = x_1$, $x_i = t_{i-1} x$, とおく。

$$f^*(t_1, \dots, t_n, x) = \begin{cases} f(x, xt_1, \dots, xt_n) / x & \text{if } P \in V \\ f(x, xt_1, \dots, xt_n) & \text{if } P \notin V \end{cases}$$

として, $\Delta(\pi_P)$ を f^* の x に関する判別式とする。

定理 4.1 $\Delta(\pi_P)$ の各成分が被約なら $G_P \cong \mathbb{G}_{d-1}$ [resp. $\mathbb{G}_d$] if $P \in V$ [resp. $P \notin V$] である。

この応用として次が得られる。

定理 4.2 次の条件を満たす因子 $D \subset \mathbb{P}^{n+1}$ が存在する。

(1) $P \in V \setminus D$ なら $G_P \cong \mathbb{G}_{d-1}$.

(2) $P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus (V \cup D)$ なら $G_P \cong \mathbb{G}_d$

さて $P \in D$ のうちで一番特別なガウスの点のとき,
 $\sigma \in \text{Gal}(K/K_P)$ とする。 σ は V の H 上の双有理変

換 σ^* を惹き起すか, 実は, これは射影変換の制限であることがわかり, V の自己同型になる。

1, 2 次元のときと同じく次が成立する。

定理 4.3 P がガロワ点なら, G_P は巡回群である。

次にガロワ点の個数を調べる。

定理 4.4 $d \geq 5$ のとき, $\delta(V) \leq [\frac{n}{2}] + 1$.

但し $[\]$ はガウス記号, 等号は V が次で定義される多様体と射影同値のときが必要十分。

$$X_{m+1} X_0^{d-1} + \cdots + X_{2m+1} X_m^{d-1} + G(X_{m+1}, \dots, X_{n+1})$$

ここで, G は d 次の斉次式である。

定理 4.5 $d \geq 4$ のとき $\delta(V^c) \leq n+2$.

等号は V が Fermat variety

$$X_0^d + X_1^d + \cdots + X_{n+1}^d = 0$$

と射影同値のときが必要十分。

これによって Fermat variety の特長付けが得る

れた。あるいは, “超曲面が Fermat variety と射影同値である必要十分条件は, ^{そこ} 外のガロワ点の個数が最大値となることである”

— 終わりに 問いをあげておく。 —

(I) $P \in D$ での ガロワ群 を 求めよ。

(II) V が 特異点 を もつとき, §1 の 問題 (1) ~ (5) を 考察 せよ。

REFERENCES

1. R. Cortini, Degree of irrationality of smooth surface of $\mathbb{P}^3$, to appear.
2. M. Kanazawa, T. Takahashi and H. Yoshihara, The group generated by automorphisms belonging to Galois points of the quartic surface, to appear.
3. K. Miura, Field theory for function fields of singular plane quartic curves, to appear in *Bull. Austral. Math. Soc.*
4. K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, *J. Algebra*, **226** (2000), 283–294.
5. ———, Field theory for the function field of the quintic Fermat curve, *Comm. Algebra*, **28** (2000), 1979–1988.
6. M. Namba, “Geometry of projective algebraic curves,” Marcel Dekker, New York, Basel, 1984.
7. T. Takahashi, Minimal splitting surface determined by a projection of a smooth quartic surface. to appear.
8. H. Yoshihara, Degree of irrationality of an algebraic surface, *J. Algebra*, **167** (1994), 634–640.
9. ———, Field theory for function fields of plane curves, to appear.
10. ———, Galois points on quartic surfaces, to appear.