

Ankeny-Artin-Chowla 型の合同式について

(純 4 次及び純 6 次体の場合)

京大理 亀井真人 (Masato Kamei)

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を、 d を判別式とする実二次体とし、 K の類数、基本単数をそれぞれ h , $\varepsilon = \frac{s+t\sqrt{d}}{2}$ と表わす。 d を割る奇素数 p をとり、 $m = \frac{d}{p}$ とおく。 $\text{mod } d$ の Dirichlet 指標 $(\frac{\cdot}{d})$ を p -part $(\frac{\cdot}{p})$ と m -part $\chi(\cdot)$ の積に分解する。この時、Ankeny, Artin, Chowla [1] により、 $h \frac{\varepsilon}{2} \equiv B_{\frac{d-1}{2}, \chi} \pmod{p}$ となる事が知られている。ここで $B_{\frac{d-1}{2}, \chi}$ は一般 Bernoulli 数である。

本稿の目的は次の ①②である。

① A-A-C の結果を純 4 次体、純 6 次体の場合に拡張する事。

純 3 次体の場合の結果は伊藤博氏の論文 [3] で得られている。本稿も伊藤氏の方法によるものである。その際得られる結果 (定理 6) は、複素数の巾根の選び方から生じる不定性を持っている。そこで、

② 特殊な場合についてその巾根を決定し、それにより①の結果を精密化する事。

純3次体の場合には、③の議論は自明となる。以下では純4次体の場合を主に解説し、純6次体の場合は結果のみを記す。まず、①の結果を導ぐ過程の概略を述べよう。

$L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $M = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, i)$, $K = \mathbb{Q}(i)$ とおく。誘導指標に対する Artin L -関数の関係より、

$$L(s, \chi, L_1/k_1) = L(s, \rho, M/K) = L(s, \bar{\rho}, M/K)$$

を得る。ここで、 χ は $\text{Gal}(L_1/k_1)$ の位数2の指標、 ρ は $\text{Gal}(M/K)$ の位数4の指標である。適当な L_1 の単数 η_3 と M の積田単数 η_e を選べば、 $L'(0, \chi, L_1/k_1) = h \log \eta_3$, $L'(0, \rho, M/K) = \log \eta_e$ (h は L_1/k_1 の相対類数) と表わされ、 $\eta_3^h = \eta_e$ となる。 K における m の素因数 π をとり、 η_3, η_e を局所体 $\bar{K}_\pi$ の元と見なして Kummer 対数微分をとれば、

$h \times (\eta_3 \text{ の係数の分数式}) \equiv (\text{一般 Hurwitz 数}) \pmod{(\text{付値 ideal})}$ なる式を得る。これが①に対する我々の結果である。§2までで正確に記述する。

§1 $L'(0, \chi, L_1/k_1)$ 及び $L'(0, \rho, M/K)$

$m = ab^2c^3$, $a \neq 1$, b, c は平方因子を持たない正整数で、 $a, b, c, 6$ はどの2つも互いに素であるとする。拡大 L_1/k_1 の相対単数を η_0 , k_1 の基本単数を ε とおき、 L_1 の単数 η_3 を

$$\eta_3 = \begin{cases} \eta_0 & \dots \sqrt{\varepsilon}\eta_0 \text{ が } L_1 \text{ の単数の時} \\ \eta_0^2 & \dots \text{その他} \end{cases}$$

と定まると、相対単数基準 $R_{L/K}$ は $R_{L/K} = \log \eta_3$ で表わされる。これより $L'(0, \chi, L/K) = h \log \eta_3$ が従う。

f を P の導数とする。($f \in \mathbb{N}$ とする。) $\mathbb{Q}_K = \mathbb{Z}[i]$ の f を法とする ray class group を $\mathcal{C}(f)$ と書けば、partial ζ -関数を用いて

$$L'(0, P, M/K) = \sum_{c \in \mathcal{C}(f)} P(c) \zeta'(0, c) \quad \dots (1)$$

となる。 $\zeta = \zeta'$ 、 $\varphi_f(c) \in$ Siegel-Ramachandra-Robert の類不変量とすると $\zeta'(0, c) = -\frac{1}{2f} \log |\varphi_f(c)|$ である。 $L(0, P, M/K) = L(0, \overline{P}, M/K)$ を思い出せば、(1) の右辺の和は $P(c) = \pm 1$ なる c についてのみ考えればよい事がわかり、

$$L'(0, P, M/K) = \frac{1}{12f} \log \frac{\prod_{P(c)=-1} \varphi_f(c) \overline{\varphi_f(c)}}{\prod_{P(c)=1} \varphi_f(c) \overline{\varphi_f(c)}} \quad \dots (2)$$

を得る。さて、 $c, c' \in \mathcal{C}(f)$ に対して、 $\varphi_f(c)^{\sigma_{c'}} = \varphi_f(cc')$

($\sigma_{c'}$ は c' に対応する $\text{Gal}(K_f/K)$ の元)、及び $\varphi_f(cc)/\varphi_f(c')$ が K_f ($K \bmod f$ の maximal ray class field) の単数の $12f$ 乗となつて

いる事が知られてゐる。従つて、 $P(c_f) = -1$ となる $\gamma \in \mathbb{Q}_K$ を

とり $\eta_f = \frac{\varphi(cc_f)}{\varphi(c)}$ とする K_f の単数 η をとると、

$$L'(0, P, M/K) = \frac{1}{12} \log (N_{K_f/K} \eta \overline{\eta}) \quad \dots (3)$$

となる。この η は具体的に以下のように書かれる。(Robert [7] 参照)

$E: y^2 = 4x^3 - 4x$ を $\mathcal{O}_K$ を準同型環として持つ楕円曲線とし、
 $\Omega \mathcal{O}_K = \mathcal{L}$ を E に対応する周期格子とする。(すなわち、 $\gamma: \mathbb{C}/\mathcal{L} \rightarrow E$
 $\gamma(z) = (p(z), p'(z))$ が同型となる格子である。) $\Omega \in \mathbb{R}_+$ として
よし。 $\sigma(z)$ を Weierstrass σ -関数とし、 $\theta(z)$ 及び $\phi(z, \alpha)$
 $(\alpha \in \mathcal{O}_K)$ を $\theta(z) = \Delta(\mathcal{L}) \sigma^3(z)$, $\phi(z, \alpha) = \theta(\alpha z) / \theta(z)^{N\alpha}$ で定
める。この時 $\phi(z, \alpha)$ は楕円函数であり、

$$\phi(z, \alpha) = \alpha^{12} \Delta(\mathcal{L})^{1-N\alpha} \prod_{\beta \in \alpha^{-1}\mathcal{L}/\mathcal{L}} (p(z) - p(\beta))^6$$

となる。有限添字集合 J 及び $\beta_j \in \mathcal{O}_K$, $m_j \in \mathbb{Z}$ ($j \in J$) を

$$N\delta - 1 + \sum_{j \in J} m_j (N\beta_j - 1) = 0$$

$$p(C_{\beta_j}) = 1, \quad (\beta_j, \delta) = 1$$

となるように選ぶ。ここで $\tau = \frac{\Omega}{f}$ とすると

$$\eta = \phi(\tau, \delta) \prod_{j \in J} \phi(\tau, \beta_j)^{m_j}$$

となる。対数微分を取り際、 η が p 関数の特殊値で表わされて
いる事が重要となる。

§2 一般 Hurwitz 数, Kummer 対数微分、及び主定理

χ を $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$ の mod f の原始指標、 τ を $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ の原始十分点
としよう。($K, \mathcal{L}$ 以外は先の記号と無関係とする。) 非負整数

k に対し $G_{R, \chi, \tau}$ を Lichtenbaum [4] にある一般 Hurwitz 数とする。 $G_{R, \chi, \tau}$ は Weierstrass S -関数を用いて定義される数であるが、我々は次の等式を利用する。

命題 1 $\chi(-1) = 1$ の時、 $\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \bmod f \\ (\alpha, f)=1}} \chi(\alpha)^{-1} \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha) - P(\alpha\tau)} = - \sum_{R=0}^{\infty} G_{R, \chi, \tau} \tau^{R-1}$

以後、前節までの記号を用いる。 ψ を E の虚数乗法に対応する量指標とする。この時、 f と素な k の ideal $\mathfrak{o}$ に対し、 $\psi(\mathfrak{o})$ は $\mathfrak{o}$ の一つの生成元となす。 $\mathfrak{o} = (\alpha)$ の時 $\alpha^* = \psi(\mathfrak{o})$ と定めると α^* は $\alpha^* \equiv 1 \pmod{(H)^3}$ となる $\mathfrak{o}$ の生成元である。

α を割る $\mathfrak{o}_k$ の素数 π をとる。(つまり、 π は m を丁度 1 回だけ割り切る。) $\pi = \pi^*$ としよ。 $m, f = \text{cond } p, p = (\frac{m}{f})_4, \tau = \frac{\alpha}{f}$ を π -part と π と素な part に分解する。

- $m = \pi m_2$
- $f = \pi f_2$
- $P(\cdot) = (\frac{m}{\cdot})_4 = \chi_1(\cdot) \chi_2(\cdot), \text{ cond } \chi_1 = \pi, \text{ cond } \chi_2 = f_2$
- $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2 \pmod{\alpha}, \tau_1: \pi \text{ 等分点}, \tau_2: f_2 \text{ 等分点}$

$G_{R, \chi_2} = G_{R, \chi_2, \tau_2}, G_{R, \chi_1} = G_{R, \chi_1, \tau_1}$ を一般 Hurwitz 数とする。

補題 2 i) $G_{R, \chi_2}, G_{R, \chi_1} \in K_{f_2}$ (conductor f_2 の max. ray class field)

ii) $G_{R, \chi_2} / \sqrt[4]{m_2}, G_{R, \chi_1} / \sqrt[4]{m_2^3} \in K(\sqrt{2})$

iii) $m = p, p: \text{有理素数}, p \equiv 3 \pmod{4}, \pi = -p$ の時は

$$G_{R, \chi_2} / \sqrt{2}, G_{R, \chi_1} / \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

命題 1 に $\text{Gal}(K^{ab}/K)$ を作用させると ii) が示される。iii) は直接計算により示される。

さて、概略に述べたように、 K_f の楕円曲線 γ の Kummer 対数微分が G_{R, X_2} 及び G_{R, X_2+} で表わされる事を示そう。 K に E の α 等分点の座標を付加してできる体を $K(E_\alpha)$ と書く。 $K(E_f)$ を $\mathbb{Q}_p(\overline{\mathbb{Q}_p}$ の完備化) に埋め込み、この埋め込みに関する $K(E_f)$, $K(E_{f+2})$, $K(E_\pi)$, K の完備化をそれぞれ K_2 , K_0 , K_p , K_f で表わす。 K_2/K_0 , K_p/K_f は完全分岐拡大、 K_2/K_p , K_0/K_f は不分岐拡大である。 Λ を K_p の素元とすれば、 $K_p = K_f(\Lambda)$, $K_2 = K_0(\Lambda)$ となる。 Coates-Wiles [2] により、 $\mathcal{O}_{K_f}$ 上の 3 つの形式群

G_a : formal additive group

$\hat{E}$: formal group of kernel of reduction mod $\mathfrak{p}$

Σ : basic Lubin-Tate group

を考え、 $\rho: G_a \rightarrow \hat{E}$ $w: \hat{E} \rightarrow \Sigma$ を K_f 上の同型写像とする。

$\lambda_1 = \frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)}$, $\Lambda_1 = w(\lambda_1)$ とおけば、 λ_1, Λ_1 は K_p の素元であり、 $\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ が成り立つ。以後、拡大 K_2/K_0 に対する

Kummer 対数微分 $\varphi_k: K_2^\times \rightarrow \mathcal{O}_{K_2}/\mathfrak{o}_2 \mathcal{O}_{K_2} \quad (1 \leq k \leq g-1, \quad g = \pi \pi)$

を $\varphi_k = \varphi_{k, \Lambda_1}$ で定義する。

注意 3 埋め込み $K(E_p) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ によ、 $\tau \lambda_1 = \frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)}$ は $\mathbb{Q}_p$ の元とみなせ。これにより Λ_1 は $\pi + X^{g-1} = 0$ の根のうち $\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$

となる $\mathbb{C}_p$ の元として一意に定まるが、単に $\mathbb{Q}$ の元としては λ_1 に対応すべき $\pi + X^{2-1} = 0$ の根は定まらない。これが ① に関する不定性である。

以上の準備の下で次の定理が成り立つ。

定理 4

$$\varphi_k(\eta_c) = \begin{cases} -\frac{1}{4} G_{\frac{3}{2}}(\eta_c) \pmod{\mathfrak{q}} & \dots k = \frac{2-1}{4} \\ -\frac{1}{4} G_{\frac{3}{2}(2-1)}(\eta_c) \pmod{\mathfrak{q}} & \dots k = \frac{3}{4}(2-1) \\ 0 \pmod{\mathfrak{q}} & \dots \text{その他の } k \end{cases}$$

(証明) Coates-Wiles [2] により、

$$\varphi_k(\phi(\tau, \mu\tau_2, \delta)) = \left(\begin{array}{l} z^{\frac{d}{4k}} \log(\phi(z + \mu\tau_2, \delta)) \text{ の } z=0 \text{ での Taylor} \\ \text{展開の } z^k \text{ の係数} \end{array} \pmod{\mathfrak{q}} \right)$$

$$2 = 3 \text{ として、 } N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta)^{16} = \prod_{\substack{\alpha \pmod{f} \\ (\alpha, f)=1}} \phi(\alpha\tau, \delta)^{1+P(\alpha)+P^2(\alpha)+P^3(\alpha)} \quad \text{より、}$$

$$16 \varphi_k(N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta))$$

$$= \sum_{\mu \in (\mathfrak{O}_K/\mathfrak{f}_2)^*} \sum_{\nu \in (\mathfrak{O}_K/\mathfrak{f}_2)^*} (1 + \chi_1(\nu)\chi_2(\mu) + \chi_1^2(\nu)\chi_2^2(\mu) + \chi_1^3(\nu)\chi_2^3(\mu)) \varphi_k(\phi(\nu\tau, \mu\tau_2, \delta))$$

$$\varphi_k(\phi(\nu\tau, \mu\tau_2, \delta)) = \varphi_k(\phi(\tau, \mu\tau_2, \delta)^{\sigma_\nu}) = \nu^k \varphi_k(\phi(\tau, \mu\tau_2, \delta)) \quad \text{を用い}$$

て、 $\varphi_k(N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta))$ の計算を $\phi(z + \mu\tau_2, \delta)$ の対数微分の Taylor

展開に帰着させれば

$$16 \varphi_k(N_{K/\mathbb{H}} \phi(\tau, \delta)) = \begin{cases} 12(P(\delta) - N\delta) G_{k, \chi_2} & k = \frac{1}{4}(2-1) \\ 12(P(\delta) - N\delta) G_{k, \chi_2^{-1}} & k = \frac{3}{4}(2-1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る。これより定理が従う。

次に $\eta_3 = s + t\sqrt{m} + u\sqrt{m} + v\sqrt{m^3}$ とおく。 $\Delta_1^{8-1} = -\pi$ だが、
 したがって、 $\sqrt{m} = \Delta_1^{\frac{8-1}{4}} \xi$ と ξ を定義すれば $\xi^4 = -m_2$ である。

これより、 $\eta_3 = s + t\xi \Delta_1^{\frac{8-1}{4}} + u\xi^2 \Delta_1^{\frac{8-1}{2}} + v\xi^3 \Delta_1^{\frac{3(8-1)}{4}}$ 。

$L \subset M \subset K_2$ によつて、 $\eta_3 \in K_2$ の単数と考え、 $\varphi_k(\eta_3)$ を求めたい。
 (勿論 π の値は Δ_1 の取り方及び M の $\mathbb{F}$ 上の素 ideal $\mathfrak{Q}$ の取り方によつて異なる。) Coates-Wiles [2] によつて $\varphi_k(\eta_3)$ は、

$f(T) = s + t\xi T^{\frac{8-1}{4}} + u\xi^2 T^{\frac{8-1}{2}} + v\xi^3 T^{\frac{3(8-1)}{4}}$ の対数微分の係数として与えられる。従つて

定理 5 i) $\varphi_{\frac{8-1}{4}}(\eta_3) = -\frac{1}{4} st\xi$

ii) $\varphi_{\frac{3(8-1)}{4}}(\eta_3) = -\frac{1}{4} (3su - tv)\xi^3$

iii) $\varphi_k(\eta_3) = 0 \quad \text{for } k \neq \frac{8-1}{4}, \frac{3(8-1)}{4}$

定理 4 との比較によつて

定理 6 $K(E_f)$ の (π) 上の素 ideal $\mathfrak{Q}$ を一つ固定して Δ_1 を決める。

この時

i) $k = \frac{N\pi-1}{4} \Rightarrow hst \equiv G_{k, \chi_2} / \xi \pmod{\mathfrak{Q}}$

ii) $k = \frac{3}{4}(N\pi-1) \Rightarrow h(3su - tv) \equiv G_{k, \chi_2} / \xi^3 \pmod{\mathfrak{Q}}$

ただし、 $\xi = \sqrt{m} / \Delta_1^{\frac{N\pi-1}{4}}$ は $-m_2$ の 4 乗根のうちのひとつであり、
 $\mathfrak{Q}$ に依存して決まる。

実際に $\mathfrak{Q}$ を固定した時 ξ が何になるかを決定するのは、 K 上で 4 乗剰余の Gauss 和の偏角を決定するのと同様の難しさがある。(もっとも、 h の divisibility を知るだけなら ξ の選

び方とは無関係) $m = p$: 有理素数, $p \equiv 3 \pmod{4}$ の時は
 $\pi = -p$ となるので π は 1 の 4 乗根である。この場合の Ω と π
 の関係を次節以降で調べる。

§3 $\frac{1}{4}$ -set

p を法 4 で 3 と同値な有理素数, $\pi = -p$ とおく。 E に対する
 $P(\Omega)$, $P'(\Omega)$ の π -等分点の値について $\prod_{\alpha \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*} P(\frac{\alpha}{\pi}\Omega) = \pi^2$,
 $\prod_{\alpha \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*} P'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega) = (-64)^{\frac{p-1}{4}} \pi^{-3}$ が成り立つ。 $8 = N\pi = p^2$ とおく
 と

$$\prod_{\alpha \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*} \frac{-2P(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}{P'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)} = -p/16^{\frac{p-1}{2}} \in -\mathbb{R}_+$$

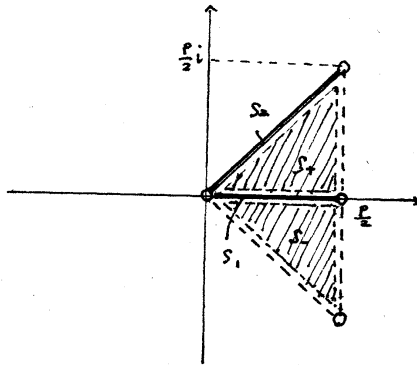
Matthews [5] にあて、 $\frac{1}{4}$ -set を導入しよう。 $(\mathcal{O}_K/\pi)^*$ にお
 ける $(\mathcal{O}_K/\pi)^*/\mu_4$ の完全代表系 S を $\frac{1}{4}$ -set と呼ぶ。 n のとき、
 $(\mathcal{O}_K/\pi)^* = S \cup (iS) \cup (-S) \cup (-iS)$ となる。 $G(S) = \prod_{\alpha \in S} \frac{-2P(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}{P'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}$ と
 $G(S)$ を定義すると、 $\beta \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*$ に対して $G(\beta S) = (\frac{\beta}{\pi})_4 G(S)$ が
 成立する。 $n = 2$ 、 $(\cdot)_4$ は 4 乗剰余記号である。従って、

$$G(S)^4 = G(S)G(iS)G(-S)G(-iS) = -p/16^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\therefore G(S) = \pm \frac{\sqrt[4]{p}}{2^{\frac{p-1}{2}}} \zeta_8 \quad \text{または} \quad \pm i \frac{\sqrt[4]{p}}{2^{\frac{p-1}{2}}} \zeta_8$$

$\alpha(S) \in (\mathcal{O}_K/\pi)^*$ を、 $\alpha(S) = \prod_{\beta \in S} \beta$ と定義すれば、 $\alpha(S)$ は $(\mathcal{O}_K/\pi)^*$
 における 1 の原始 8 乗根であり、 $G(S)$ は $\alpha(S)$ にしかよらない。
 $n = 2$ 、 $G(S) = G_{\alpha(S)}$ と書く。 $\alpha \in \mu_4$ に対して $G_{\alpha\beta} = \alpha G_\beta$ と

、 $\mathbb{Z}$ 上の α として、特殊な S について $\alpha(S)$ と $G(S)$ を決めれば G_p ($\beta \in \mu_8 - \mu_4$) は決まる。 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}'$ 、次のように $S \subseteq \mathbb{Z}$ とする。



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$S_1 = \{a \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2}\}$$

$$S_2 = \{(1+i)a \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2}\}$$

$$S_3 = \{a+bi \mid 2 \leq a \leq \frac{p-1}{2}, 0 < b < a\}$$

$$S_4 = \{a-bi \mid 2 \leq a \leq \frac{p-1}{2}, 0 < b < a\}$$

$\alpha = a$ のとき $\beta \in S$ に関して $\rho(\frac{p}{2}\alpha)$, $\rho'(\frac{p}{2}\alpha)$ の偏角のみに注意すると、 $G(S) \in \mathbb{Z}_p^{\frac{p-1}{2}} \mathbb{R}_+$ がわかる。従って

$$G(S) = \mathbb{Z}_p^{\frac{p-1}{2}} \frac{4\sqrt{p}}{2^{\frac{p-1}{2}}}$$

他方 $\alpha(S)$ に関しては $N: \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^* \cong \mathbb{Z}$

○ $p \equiv 3 \pmod{8}$ の時

$(\frac{2}{p}) = -1$ より $N(a+ai) = 2a^2$ は平方非剰余、従って

$N: S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{F}_p^*$ は全単射であり、 $N: S_+ \rightarrow \mathbb{F}_p^*$ は $\frac{p-3}{8} : 1$

の全射となる。 $\alpha = a$ のとき

$$\begin{aligned} \alpha(S) &= \prod_{\alpha \in S} \alpha = \left(\prod_{\alpha \in S_1} \alpha \right) \left(\prod_{\alpha \in S_2} \alpha \right) \left(\prod_{\alpha \in S_+} N\alpha \right) \\ &= (-1)^{\frac{p-3}{8}} (1+i)^{\frac{p-1}{2}} \end{aligned}$$

○ $p \equiv 7 \pmod{8}$ の時

$(\frac{2}{p}) = 1$ より $N(a+ai) = 2a^2$ は平方剰余、従って $N: S_+ \rightarrow \mathbb{F}_p^*$

は平方剰余の上 $\wedge (\frac{p+1}{8} - 1) : 1$ 非剰余の上 $\wedge \frac{p+1}{8} : 1$ となる。

とあり。

$$\begin{aligned}
 \alpha(S) &= \left(\prod_{\alpha \in S_1} \alpha \right) \left(\prod_{\alpha \in S_2} \alpha \right) \left(\prod_{\alpha \in S_+} N\alpha \right) \\
 &= \left(\prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} a \right) \left(\prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} (1+i)a \right) \left(\prod_{\beta \in \mathbb{F}_p^{\times 2}} \beta \right)^{\frac{p-1}{2}} \left(\prod_{\beta \in \mathbb{F}_p^{\times} - \mathbb{F}_p^{\times 2}} \beta \right)^{\frac{p+1}{2}} \\
 &= (-1)^{\frac{p+1}{2}} (1+i)^{\frac{p-1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{両者を合わせて } \alpha(S) = (-1)^{\left[\frac{p+1}{2} \right]} (1+i)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{\pi}$$

を得る。

§4 π の決定

π , P を前節通りとすると $f = \text{cond } P = 4P$ となり, $4\tau_1 = \frac{-1}{\pi} \Omega \pmod{\mathcal{O}}$ となる。 $\lambda_1 = \frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)}$, $\Delta_1 = w(\lambda_1)$ であり, λ_1, Δ_1 は K_F の素元で $\lambda_1^{2-1} + \pi \equiv 0$, $\lambda_1 \equiv \Delta_1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ が成立している。さて, Λ を K_F 上の既約方程式 $T^{2-1} + \pi = 0$ の根としよう。ただし, Λ が K_F の肉体の中で何になるかは問題としない。この時, $T^{2-1} + \pi = 0$ は $K_F(\Lambda)$ で完全分解され, 根の全体は $\{\Lambda, \zeta\Lambda, \dots, \zeta^{2-1}\Lambda\}$ となる。 ζ は 1 の原始 $2-1$ 乗根である。埋め込み $K_F(\lambda_1) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定して $\lambda_1 \in \mathbb{C}_p$ と見なす。すると, 1 になる埋め込み $K_F(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ に対しても $K_F(\lambda_1) = K_F(\Lambda)$ となるが, Δ_1 が $\{\Lambda, \dots, \zeta^{2-1}\Lambda\}$ のどの元になるかは埋め込みによる。この事を代数体の level で考えよう。以下, 全ての代数体は $\mathbb{C}$ の部分体と考える。

$$(\mathbb{C}_p/\pi\mathbb{C}_p)^{\times} \cong \text{Gal}(K(\lambda_1)/K) \cong \text{Gal}(K_F(\lambda_1)/K_F)$$

により, $(\mathbb{Q}/\pi\mathbb{Q})^* \ni v$ に対応する $\text{Gal}(K_8(\lambda_1)/K_8)$ の元を σ_v と書く。 $K_8(\lambda_1) = K_8(\Lambda)$ より $\sigma_v \in \Lambda$ にも作用させれば,

$$\lambda_1^{\sigma_v} = \left(\frac{-2P(\tau_1)}{P'(\tau_1)} \right)^{\sigma_v} = \frac{-2P(v\tau_1)}{P'(v\tau_1)}$$

$$\Lambda^{\sigma_v} = \tau_v \Lambda, \quad \tau_v \in \mathcal{M}_{g-1}, \quad v \equiv \tau_v \pmod{p}$$

となる。従って, 前節の $\frac{1}{4}$ -set S に対し,

$$\prod_{v \in S} \lambda_1^{\sigma_v} = \prod_{v \in S} \Lambda^{\sigma_v} \pmod{p^{\frac{p-1}{4}+1}}$$

$$\text{i.e.} \quad G(-\frac{1}{4}S) \equiv \alpha(S) \Lambda^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p^{\frac{p-1}{4}+1}}$$

これより $G(S)/\alpha(S) \equiv \Lambda^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p^{\frac{p-1}{4}+1}}$ が得られる。前節の結果と合わせて

$$\begin{aligned} \tau &= 4\sqrt{p}/\Lambda^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\left[\frac{p+1}{8}\right]} (1+i)^{\frac{p-1}{2}} 2^{\frac{p-1}{2}} / \tau_8^{\frac{p-1}{2}} \\ &\equiv \begin{cases} -\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{p-3}{4}} \pmod{p} & \text{if } p \equiv 3, 7 \pmod{16} \\ \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{p-3}{4}} \pmod{p} & \text{if } p \equiv 11, 15 \pmod{16} \end{cases} \end{aligned}$$

最終的には

定理 7 $p \equiv 3 \pmod{4}$, $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $h = h_{L_1}/h_{K_1}$, $\mathcal{N}_3 = s + t\sqrt{p} + u\sqrt{p} + v\sqrt{p^3}$, $k_0 = \frac{p-1}{4} \leq 0$ と、 $p \in \mathbb{Z}$ とし

$$\text{i)} \quad hst \equiv 2^{\frac{p+1}{4}} G_{k_0, x_2} / \sqrt{2} \times \begin{cases} 1 & p \equiv 3, 15 \pmod{16} \\ -1 & p \equiv 7, 11 \pmod{16} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad h(3sv - tu) \equiv 2^{\frac{p+1}{4}} G_{3k_0, x_2} / \sqrt{2} \times \begin{cases} 1 & p \equiv 11, 15 \pmod{16} \\ -1 & p \equiv 3, 7 \pmod{16} \end{cases}$$

(i) ii) 共 右辺は有理数なので合同式は意味を持つ。)

例 8 $p = 7$ とすると,

$$\eta_3 = 43 + 26\sqrt{7} + 16\sqrt{11} + 104\sqrt{77}$$

$$h_{K_1} = 1, \quad h_{L_1} = 2, \quad h = 2$$

$$\therefore hst \equiv 3, \quad h(3sv - tu) \equiv 5 \pmod{7}$$

$$G_{12, \kappa_2} = \sqrt{2} \times 11232/25 \equiv \sqrt{2} \pmod{7}$$

$$G_{36, \kappa_2} = \sqrt{2} \times 1447788874210204192/127679296875 \equiv 4\sqrt{2} \pmod{7}$$

$$\therefore -2^{\frac{p+1}{2}} G_{12, \kappa_2}/\sqrt{2} \equiv 3, \quad -2^{\frac{p+1}{2}} G_{36, \kappa_2}/\sqrt{2} \equiv 5 \pmod{7}$$

§5 純6次体の場合

$L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{m})$, $m = ab^2c^3d^4e^5$, $a \neq 1$, b, c, d, e , は正整数、square free $\mathbb{Z}$, $a, \dots, e$, 6 は $\mathbb{Z}$ の 2 つも互いに素とする。 L_1 の部分体を $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$, $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[2]{m})$ とおき、 K_1, F_1 の基本単数を $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ とおく。 L_1 の単数群を $\mathcal{O}_{L_1}$ と書く。 $\eta_0 \in N_{L_1/K_1}$, $\eta_0 = 1$, N_{L_1/F_1} $\eta_0 = 1$ となる 1 より大きい最小の L_1 の単数とし、 $\mathcal{O}_0 = \{1\} \times \varepsilon_2^{\mathbb{Z}} \times \varepsilon_3^{\mathbb{Z}} \times \eta_0^{\mathbb{Z}}$ とおく。 $\mathcal{O}$ を割る $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ の素数 π をとり、 $E: y^2 = 4x^3 - 1$ に対する量指標 ψ に関し、 $\psi(\pi) = \pi$ を仮定する。 $\rho = (\frac{m}{\cdot})_6$ の π と素な part κ_2 と適当な $(\text{cond } \kappa_2)$ -等分点 τ_2 に対して $G_{K, \kappa_2^{\pm 1}} = G_{K, \kappa_2^{\pm 1}, \tau_2}$ を一般 Hurwitz 数とすると、 $-\frac{m}{\pi}$ の適当な 6 乗根 ξ に対し、

定理 9

- $\frac{h_{L_1}}{h_{K_1} h_{F_1}} \frac{6}{|\mathcal{O}_{L_1} : \mathcal{O}_0|} \tau \equiv G_{K_0, \kappa_2}/\xi \pmod{8}$
- $\frac{h_{L_1}}{h_{K_1} h_{F_1}} \frac{6}{|\mathcal{O}_{L_1} : \mathcal{O}_0|} (5x - tw) \equiv G_{5K_0, \kappa_2^{-1}}/\xi^5 \pmod{8}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}''$ $k_0 = \frac{N\pi-1}{6}$ $\mathbb{Z}''$ あり、 $\mathfrak{g}$ は (π) 上の素 ideal である。

特に $P \equiv -1 \pmod{9}$ かつ $P \equiv 1 \pmod{4}$ の時は $\chi_2 = \text{trivial}$,

$\chi = 1$ となり、合同式が不定性なく記述される。

文献

- [1] N. Ankeny, E. Artin and S. Chowla: The class number of real quadratic fields. Ann. of Math (2) 56 (1952) 479-493
- [2] J. Coates and A. Wiles: On the conjecture of Birch and Swinnerton-Pyer. Invent Math 39 223-251 (1977)
- [3] H. Ito: Congruence relations of Ankeny-Artin-Chowla type for pure cubic fields. preprint
- [4] S. Lichtenbaum: On p-adic L-functions associated to elliptic curves. Invent. Math 56 (1980) 19-55
- [5] C.R. Matthews: Gauss sums and elliptic functions, II. The Quartic sum. Invent Math 54 (1979) 23-52
- [6] K. Nakamura: Class number calculation and elliptic units I, II, III. Proc. Japan Acad 57A(1981) 56-59, 117-120, 363-366.
- [7] G. Robert: Unités elliptiques. Bull. soc. Math. France. Memoire 36 (1974)
- [8] M. Kamei: Congruence Relations of Ankeny-Artin-Chowla Type for pure Quartic and Sextic Fields 修論. 1984