

## Analytic structure について

東京電機大 鶴 見 和 之  
東京教育大理 神 保 敏 弥

### § 1. 序

$A$  を単位元を持つ可換な Banach algebra とし,  $A$  の maximal ideal space を  $M_A$ ,  $A$  の総ての元の Gelfand transform の algebra を  $\hat{A}$  とするとき,  $x \in M_A$  に対して,  $x$  の或る近傍  $U$  と,  $\mathbb{C}^n$  内の開集合内の解析的集合  $V$  と,  $V$  から  $U$  の中への連続写像  $\tau$  が存在し, 任意の  $f \in \hat{A}$  に対し  $f \circ \tau$  が  $V$  上で正則であるとき,  $x$  に於て analytic structure が存在すると言う。ただしここには自明な場合 ( $\dim V = 0$ ,  $\tau(V) = \{x\}$ ) を除き,  $0 \in V$ ,  $\tau(0) = x$  と仮定する。

$K$  を  $M_A$  の compact 集合とし,  $K$  の  $A$ -convex hull を  $\text{Hull}_A(K)$  とし,  $\text{Hull}_A(K) \setminus K \neq \emptyset$  のときには,  $\text{Hull}_A(K) \setminus K$  内には analytic structure が存在するだろうと予想されたが, 1963年に G. Stolzenberg は  $K \subset \mathbb{C}^2$ ,  $A = P(K)$  について反例を与えた。更に Gleason part 等に対しては analytic structure の存在が一般には保証されたいという事を J. Garnett が示した。従ってどんな条件下で analytic

structure が存在するかを調べる事は興味深い問題である, その存在については以下の様な場合に考察される:

1).  $A$  の maximal ideal が代数的に有限生成: Gleason,

この一般化は Browder.

2). part と representing measure: Wermer, Hoffman, O'Neill, Lumer, Sidney.

3).  $\mathbb{C}^n$  内での smooth curve と polynomially convex set: Wermer, Björk, Alexander.

4).  $\hat{A}$  から解析的集合上の正則函数の芽の元の茎への準同型: Clayton.

5).  $f \in \hat{A}$  を固定し原像  $f^{-1}(z)$  が有限個の点の時に注目したもの: Bishop, Björk, Wermer.

6). point derivation space: Grownover, これは 1), 2) と密接に結びついている.

逆に analytic structure が存在する場合には興味ある函数論的性質が導かれる.

## § 2. Analytic structure

$A$ : 単位元を持つ可換な Banach algebra.

$M_A$ :  $A$  の maximal ideal space で weak-\* topology をもつとする.

$\hat{A}$ :  $A$  の総ての元の Gelfand transform の algebra.

定義:  $x \in M_A$  に対し, analytic structure が存在するとは  
 $\Leftrightarrow \exists$  analytic variety  $V$  in some open subset of  $\mathbb{C}^n$ ,  $\exists$  continuous mapping  
 $\tau: V \xrightarrow{\text{into}} M_A$  such that  $\forall f \in \hat{A}$  に対し  $\tau$ ,  $f \circ \tau$  が  $V$  上で正則である。  
 ただし  $\dim V \neq 0$ ,  $\tau(V) \neq \{x\}$  であり,  $0 \in V$ ,  $\tau(0) = x$  とする。

最近 D. Clayton [9] は  $\hat{A}$  から或る analytic variety 上の正則関数の germ の algebra への nontrivial homomorphism が存在するとき, analytic structure が存在することを多変数関数論の基本性質と inverse limit の概念を用いて証明した。更に  $A$  を locally- $A$  function の germ の algebra にしてもよい事を示した。以下の定理と証明を記す。

定理 2.1.:  $W: \mathbb{C}^n$  内の或る open set 内の subvariety,  $0 \in W$ .

$H_0(W)$ :  $0$  の近傍で正則な関数を  $W$  上に制限して得られる germ の algebra.

$h: \hat{A} \longrightarrow H_0(W)$  の nontrivial homomorphism.

$\Rightarrow$  次の条件を満たす  $W$  内の  $0$  の或る近傍  $W'$  から  $M_A$  の中への continuous mapping  $\tau$  が存在する:

(a)  $\hat{f} \circ \tau$  は holomorphic on  $W'$ , (b)  $h(\hat{f}) = \gamma_0(\hat{f} \circ \tau)$ , for  $\forall f \in A$ ,  
 ここで  $\gamma_0(\hat{f} \circ \tau)$  は  $\hat{f} \circ \tau$  の  $H_0(W)$  内の germ.

証明. (1)  $\Omega$  を次の条件を満たす  $\hat{A}$  の異なる有限個の元よりなる組  $(f_1, \dots, f_n)$  の全体とする, 即ち,  $e$  を  $H_0(W)$  上の evaluation

mapping とし, homomorphism  $e \circ h$  によって定まる点を  $p$  とする

と,  $f_j(p) = 0, \|f_j\| < 1, j = 1, \dots, n$ .

$\alpha := (f_1, \dots, f_n), \beta := (g_1, \dots, g_m)$  に対し,  $\alpha$  の元が  $\beta$  に含まれる  
とき,  $\alpha < \beta$  と定義するあると  $\mathcal{O}$  は direct set とする.  $\alpha$  は又

$M_n$  から  $\mathbb{C}^n$  の写像ともみられることが出来る. 以下  $X := M_A$  とお

く. 下記の notation を用いる:

$$X_\alpha := \{ \alpha(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x)) \mid x \in X \},$$

$$D_\alpha := \{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| < 1, j = 1, \dots, n \}.$$

${}_n\mathcal{O}(D_\alpha)$ :  $D_\alpha$  で正則な総ての函数の algebra.

$$V_\alpha := \{ z \in D_\alpha \mid F(z) = 0 \text{ for } \forall F \in {}_n\mathcal{O}(D_\alpha) \text{ with } F \circ \alpha = 0 \}.$$

$H(V_\alpha)$ :  $V_\alpha$  上で正則な総ての函数の algebra.

(2)  $A'$  を以下の条件を満たす  $\hat{A}$  の dense subalgebra とする:

$$\mathcal{O}' := \{ \alpha = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O} \mid f_j \in A', j = 1, \dots, n \} \text{ とするとき, } \alpha \in \mathcal{O}',$$

$f \in H(V_\alpha)$  ならば  $f \circ \alpha \in A'$  である.

$$\text{今 } \alpha < \beta \text{ ならば } \pi_{\alpha\beta}(X_\beta) = X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}(V_\beta) \subset V_\alpha, \pi_{\alpha\beta}(\overline{V}_\beta) \subset \overline{V}_\alpha$$

であるから, 各 inverse limit  $\varprojlim \{X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \mathcal{O}'\}, \varprojlim \{V_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \mathcal{O}'\},$

$$\varprojlim \{\overline{V}_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \mathcal{O}'\} =: X' \text{ は自然に } X \text{ と homeomorphic とする. このとき,}$$

$i$  を  $X \rightarrow X'$  を自然な写像とし,  $\pi_\alpha: X' \rightarrow \overline{V}_\alpha$  を自然な projection

とする. 今

$A(V_\alpha)$ :  $\overline{V}_\alpha$  上で連続で,  $V_\alpha$  で正則な総ての函数の algebra.

$$A(X') := \{ f \circ \pi_\alpha \in C(X') \mid \alpha \in \mathcal{O}', f \in A(V_\alpha) \}. \text{ とおく. } i \text{ の}$$

adjoint mapping  $i^*: A(X') \rightarrow A'$  は isomorphism ととり,  $i$  は位相同形と取る。

(3) 一方  $\forall \alpha \in \mathcal{O}$  に対し  $h_\alpha := h \circ \alpha^*$  とすると,  $\forall f \in H(V_\alpha)$  に対し  $h_\alpha(f) = r_\alpha(\varphi_\alpha^* f)$  を満す正則写像  $\varphi_\alpha := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  が存在す

る。

$$\begin{array}{ccc}
 H(V_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & H_0(W) \\
 \swarrow \alpha^* & \xleftarrow{\exists \varphi_\alpha} \exists W_j \subset W & \nearrow h \\
 V_\alpha & \xleftarrow{\alpha} & X \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & \hat{A}
 \end{array}$$

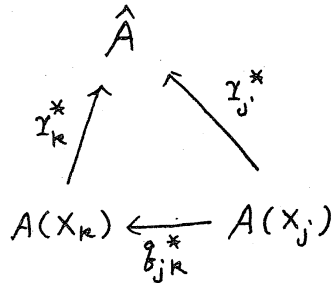
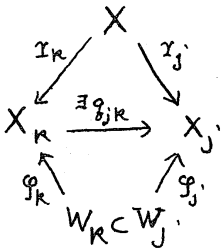
す。  $\{W_j\}$  は次の条件を満す  $\mathcal{O}$  の正統基とある:  $W_j \supseteq W_{j+1}$ .

$f \in H(W_j), f = 0$  on some  $W_k \Rightarrow f = 0$  on  $W_j$

(4) 次に  $\mathcal{O}_j := \{\alpha \in \mathcal{O} \mid W_j \text{ に対し上記の写像 } \varphi_\alpha \text{ が存在するもの}\}$  とおく。この  $\mathcal{O}_j$  に対しと同様に inverse limit を考える。  $X_j := \varprojlim \{V_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_j\}$ ,  $p_{j\alpha}: X_j \rightarrow \overline{V}_\alpha$  を自然に projection,  $A(X_j) := \{p_{j\alpha}^* f \mid f \in A(V_\alpha), \alpha \in \mathcal{O}_j\}$  とすると,  $\forall j$  に対し  $p_{j\alpha} \circ \pi_j = \alpha$ , for  $\forall \alpha \in \mathcal{O}_j$ , である様は一意的な連続写像  $\pi_j$  が存在し, 更に, 連続写像  $\varphi_j: W_j \rightarrow X_j$  がとれ  $p_{j\alpha} \circ \varphi_j = \varphi_\alpha$  を満すものが唯一つ存在する。

$$\begin{array}{ccccc}
 & \exists \pi_j & X_j & \xleftarrow{\exists \varphi_j} & W_j \\
 & \searrow & \downarrow p_{j\alpha} & \swarrow & \\
 X & \xrightarrow{\alpha} & \overline{V}_\alpha & \xleftarrow{\varphi_\alpha} & 
 \end{array}$$

(5) 次に  $j \leq k$  に対して, 左下図が可換となる一意の写像が存在する.



前グラフ定理と,  $\hat{A} \subseteq i_j^*(\overline{A(X_j)})$  より, 或る  $j$  に対して  $\hat{A} \subseteq i_j^*(\overline{A(X_j)})$  となり,  $i_j^*(\overline{A(X_j)})$  を前の  $A'$  とすれば,  $i_j$  も  $g_{j,k}$  ( $k \geq j$ ) も共に位相同形となる. 従って  $\tau := i_j^{-1} \circ g_j$  とおけば条件を満たす写像  $\tau$  が得られる.

定理 2.2. :  $S_\varphi$ : locally-A function の  $\varphi$  での総ての germ の algebra,  $R_\varphi: S_\varphi \xrightarrow{\text{into}} H_0(W)$ : nontrivial homeomorphism.  
 $\Rightarrow \exists$  continuous mapping  $\tau: \{0$  の或る近傍  $V \subset W\} \xrightarrow{\text{into}} X$ ,  
 such that a),  $\tau(0) = \varphi$ , b)  $\hat{f} \circ \tau$ : holomorphic on  $V$ ,  
 c)  $R_\varphi \tau_\varphi(\hat{f}) = \tau_0(\hat{f} \circ \tau)$  for  $\forall \tau_\varphi(\hat{f}) \in S_\varphi$ .

証明.  $R := R_\varphi \circ \tau_\varphi$  とおき定理 2.1 を用いればよい.

### § 3. Point derivation と analytic structure.

$\mathcal{O}(A, \varphi)$ :  $\varphi \in M_A$  での総ての point derivation の線形空間.

$\mathcal{O}_c(A, \varphi)$ :  $\varphi \in M_A$  での総ての連続 point derivation の線形空間.

このとき, point derivation の空間と maximal ideal  $\ker \varphi$  との間には

次の関係がある, すなわち,  $\mathcal{O}(A, \varphi)$  は  $(\ker \varphi / (\ker \varphi)^2)^*$  に同形であり,  
 $\mathcal{O}_c(A, \varphi)$  は  $(\ker \varphi / \overline{(\ker \varphi)^2})^*$  と同形である. 故に  $\mathcal{O}(A, \varphi)$  の次元  
 は  $\ker \varphi$  内の  $(\ker \varphi)^2$  の余次元である.

$\dim \mathcal{O}(A, \varphi) = 1$  のとき, R. M. Grownover [11] は  $\varphi$  を含む  
 analytic disk が存在するため十分条件を与えた.

補題 3.1.  $\dim \mathcal{O}(A, \varphi) = 1$  のときは次の条件を満たす  $\varphi$  の  
 ノルム近傍  $\mathcal{U}$  が存在する:

- a)  $f \in (\ker \varphi) \setminus (\ker \varphi)^2$ ,  $\|f\| \leq 1 \Rightarrow \exists$  定数  $K_1, K_2 > 0$  such that  
 $K_1 \|g_1 - g_2\| \leq |g_1(f) - g_2(f)| \leq K_2 \|g_1 - g_2\|$  for  $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{U}$ .
- b)  $D_\psi \in \mathcal{O}_c(A, \psi)$ ,  $\psi \in \mathcal{U}$ ,  $D_\psi \neq 0 \Rightarrow D_\psi(f) \neq 0$ ,  $\ker \psi = \mathbb{C}(f - \psi(f))$   
 $+ \overline{(\ker \psi)^2}$

定理 3.1.  $\dim \mathcal{O}(A, \varphi) = 1$ ,  $\mathcal{U}$ : 上述の近傍

$\mathcal{U}_\varepsilon := \{\psi \in M_A \mid \|\psi - \varphi\| \leq \varepsilon\}$ , 或る  $\varepsilon > 0$  に対し  $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{U}$  で  
 $\varphi \notin \partial(A|_{\mathcal{U}_\varepsilon})$ .  $\partial B$  は  $B$  の Silov 境界.

$\Rightarrow \varphi$  を含む analytic disk が存在する (即ち,  $V$  を単位開円板,  
 $\tau$  を 1-1 連続写像 (ノルム位相で) とする analytic structure が存  
 在する).

証明. まず  $M_{\overline{(A|_{\mathcal{U}_\varepsilon})}} = \mathcal{U}_\varepsilon$  である. 補題 3.1. により,

$\delta := \inf \{|\hat{f}(\psi)| \mid \psi \in \partial(A|_{\mathcal{U}_\varepsilon})\} > 0$  であるので  $\hat{f}(\mathcal{U}_\varepsilon)$  は, 円板  
 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\} =: D_\delta$  を含む. 今  $V := (\hat{f}|_{\mathcal{U}_\varepsilon})^{-1}(D_\delta)$ ,  $\tau := (f|_V)^{-1}$ ,  
 $\mathcal{O} := \{\hat{g} \circ \tau \mid g \in A\}$  とすると,  $\mathcal{O}$  は maximum modulus algebra

且つ,  $\pi \in \mathcal{O}_L$  であるので,  $\mathcal{O}_L$  の任意の函数が  $D_\pi$  の内部で正則となる。

maximal ideal が代数的に有限生成のときには, 良く知られている A.M. Gleason の次の結果 [12] がある。

定理 3.2.  $\ker \varphi$  が代数的に有限生成であるときは,  $\varphi$  に於て analytic structure が存在する。ただし  $\tau$  は位相同形であり,  $\tau(V)$  は  $\varphi$  の weak-\* 近傍である。

この定理の後定より  $(\ker \varphi)^2$  は  $\ker \varphi$  の中で有限余次元を持つこととなるが, A. Browder [7] はこれを更に一般化した。

定理 3.3.  $B := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k h_k \mid g_k, h_k \in \ker \varphi, \|g_k\| \leq 1, \|h_k\| \leq 1, \sum |\mu_k| < \infty \right\}$  とし,  $B$  の  $\ker \varphi$  内での余次元を有限の  $n$  とする。  
 $\Rightarrow \varphi$  には次の様な analytic structure が存在する:  $\tau$  は位相同形で,  $\tau(V)$  は  $\varphi$  のノルム近傍である。

証明. 後定により  $\forall f \in \ker \varphi$  に対して,  $f_1, \dots, f_n \in \ker \varphi$  が存在して,  $f = \sum \lambda_j f_j + g, g \in B$  と表せる。ただし  $\|f_j\| \leq 1$  とする。

Baire の category theorem を用いて,  $f = \sum \lambda_j f_j + \sum \mu_k g_k h_k$ ,  $\sum |\lambda_j| + \sum |\mu_k| \leq C$ , なる定数  $C$  が存在することがわかり, 更に  $\|f\| \leq 1$  なる  $f \in \ker \varphi$  は或る  $\varepsilon > 0$  に対して  $f = \sum_{i=1}^n a_i \dots \mu_n f_i \dots f_n^{\mu_n} + \tilde{f}$ ,  $|\psi(\tilde{f})| \leq (2C)^{-n-1}$ ,  $\psi \in \{\|\psi - \varphi\| \leq \varepsilon\}$  と表わせることにより,

$\hat{f} \circ \tau$  の正則性が言える。もう少し言うと,  $\sigma$  を十分小にとり,

$U := \{\psi \in M_A \mid \|\psi - \varphi\| \leq \varepsilon, |\hat{f}_j(\psi)| < \sigma\}$ ,  $\tau := ((\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)|_U)^{-1}$ ,

$V := \{(\hat{f}_1(\psi), \dots, \hat{f}_n(\psi)) \mid \psi \in U\}$  とすれば求める結果を得る.

#### § 4. holomorphic convexity と analytic structure

この節では analytic structure は,  $\mathcal{C}$  が位相同形であるとする.  
 3. function algebra  $\overset{(A)}{\text{on } X}$  に対して, 次の notation を用いる.

$\hat{A}$  もただちに  $A$  とかき,  $\forall$  閉集合  $K \subset M_A$  に対して,

$$\text{Hull}_A(K) := \{x \in M_A \mid |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ for } \forall f \in A\}.$$

$A(K)$ :  $A|_K$  ( $A$  の  $K$  への制限) により生成された  $K$  上の function algebra.

この時,  $M_A$  の閉集合と, Šilov 境界について次の事が成り立つ.

定理 4.1.:  $A$ : function algebra on  $X$ ,  $\Delta := M_A \setminus \partial A$  ( $\neq \emptyset$ ).

$A_1 := A(\text{Hull}_A(b\Delta))$  ここで  $b\Delta$  は  $\Delta$  の位相境界.

閉集合  $W \subset M_A$  は,  $A$  が  $\forall x \in W$  で analytic structure を持つとする.

$$\Rightarrow \partial A_1 \subset (b\Delta \setminus W).$$

次に  $A$  を function algebra on  $X$ ,  $W \subset M_A$  を局所閉集合とする.

$H_A(W)$ : 次の様な  $f \in C(W)$  の集合とする. 即ち,  $\forall x \in W$  に対し

$x$  の近傍  $U \subset M_A$  が存在し, 次の事を満す列  $\{g_n\} \in A$

$$\text{がとれる, 即ち } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{W \cap U} = 0$$

定義.  $V$  を  $W$  の局所閉部分集合とするとき,

$V$  が  $A_W$ -analytic variety であるとは

$\Leftrightarrow \forall x \in V$  に対して,  $x$  の近傍  $U \subset W$  がとれ, 次の2条件を

満ち函数族  $\{f_i\}_{i \in I} \subset C(U)$  がとれる. 即ち:

$$\textcircled{1} U \cap V = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \text{ for } \forall i \in I\}, \quad \textcircled{2} f_i|_{U \setminus V} \in H_A(U \setminus V).$$

次に, 閉集合  $U \subset M_A$ ,  $bU$  の局所閉集合  $V$  に対して,

$V$  が  $U$ -analytic variety at  $bU$  であるとは

$$\Leftrightarrow U \cup V \text{ が局所閉集合で, } V \text{ が } A_{U \cup V}\text{-analytic variety である.}$$

この analytic variety に対して, 次の事実が成り立つ.

定理 4.2.  $A$  を function algebra on  $X$  とし,  $U \subset M_A \setminus \partial A$  を閉集合とあるとき,  $\forall x \in bU$  に対して,  $x$  の閉近傍  $W$  がとれ,  $W$  が  $A_{U \cup W}$ -analytic variety

$$\Rightarrow U \subset \text{Hull}_A(bU \setminus W)$$

系.  $A$  を function algebra on  $X$  とし,  $\Delta := M_A \setminus X (\neq \emptyset)$ ,

$V$ :  $b\Delta$  の相対閉集合,  $V$ :  $\Delta$ -analytic variety

$$\Rightarrow \Delta \subset \text{Hull}_A(b\Delta \setminus V).$$

定理 4.3.  $A$  を function algebra on  $X$  とし,  $B$  を function algebra on  $M_A$  such that  $A \subset B$  とする.  $V$ : closed  $B_{M_A}$ -analytic variety in  $M_A$ .  
更に,  $B|_{(M_A \setminus V)}$  は uniform dense subalgebra of functions from  $H_A(M_A \setminus V)$  を含む.

$$\Rightarrow V = \text{Hull}_A(V).$$

系.  $A$  を function algebra on  $X$  とし,  $\Delta := M_A \setminus X (\neq \emptyset)$  とする.  
 $W \subset X$  を閉集合,  $K \subset W$  を compact 集合とし  $\text{Hull}_A(K) \cap W = K$  とする.  
更に  $b\Delta \cap W$  が  $\Delta$ -analytic variety とする

$$\Rightarrow K = \text{Hull}_A(K) = M_{A(K)}.$$

これらの系より次の定理が導かれる。

定理 4.4. :  $X$  を reduced analytic space とし,  $\mathcal{O}(X)$  を  $X$  上の正則関数の algebra とするとき,  $A$  を  $X$  の点を分離する  $\mathcal{O}(X)$  の subalgebra とする. 今  $K$  を compact  $\mathcal{O}(X)$ -convex set in  $X$  such that  $\hat{K}_A := \{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ for } \forall f \in A\}$  が  $X$  の compact 集合.

$$\Rightarrow K = \hat{K}_A = M_{A(K)}$$

analytic variety について次の事実が成り立つ。

定理 4.5. :  $A$  を function algebra on  $X$  とし,  $\Delta := M_A \setminus X (\neq \emptyset)$  とするとき,  $W$  を  $X$  の開集合とし  $A$  は  $W$  の各点で analytic structure を持つならば,

$$\Rightarrow b\Delta \cap W : \Delta\text{-analytic variety}$$

次に  $\mathbb{C}^m$  の compact 集合上での function algebra についての analytic structure を考察する. これについて G. Stolzenberg [19] の定理がある.

定理 4.6. :  $X : \mathbb{C}^m$  の compact polynomially convex set.

$K : \mathbb{C}^m$  の有限個の滑らかな曲線の合併とする.

$\Rightarrow (X \cup K)^\wedge \setminus (X \cup K)$  は  $\mathbb{C}^m \setminus (X \cup K)$  の 1 次元 analytic set が又は空である. ここで  $\hat{K}$  は  $K$  の polynomially convex hull である.

定理 4.7. :  $K_i (i=1, \dots, s)$  を  $\mathbb{C}^m$  の arc で  $z_1$  は各  $K_i$  上で局

断片的に 1-1 とする. 今  $K := \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$  とすると,

$\Rightarrow \hat{K} \setminus K$  は  $\mathbb{C}^n \setminus K$  の 1 次元 analytic subset または空集合である.

特に単位円周上の function algebra について次の事実が成り

立つ

定理 4.8.  $A$  は function algebra on  $T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$  とする.

今  $A$  は局所的に 1-1 なる函数を含むとすると.

$\Rightarrow$  次の何れかである

a).  $M_A = T$  で  $A = C(T)$ .

b).  $M_A \neq T$ ,  $M_A \setminus T$  は 1 次元 analytic space の構造をもつ.

この時は  $A$  の函数は  $M_A \setminus T$  上で正則函数である.

一般に  $M_A \setminus X$  ( $\neq \emptyset$ ) には analytic structure は入らな. これは G. Stolzenberg が  $\mathbb{C}^2$  の polynomially convex set に対して示し, 更に J. Wermer は rationally convex set に対して示した. ここでは

G. Stolzenberg の例の作り方を示す:

$\{p_i\}_{i=1,2,\dots}$  を集合  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$  の稠密な可算部分集合とし,  $U := \{z := (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$ ,  $K_i := \{z \in U \mid (z_1 - p_i)(z_2 - p_i) = 0\}$  とする. 函数列  $\{F_i\}$  を次の様に帰納的に定める:

$$F_1(z) := p_1^{-2} (z_1 - p_1)(z_2 - p_1).$$

$$L_1 := \left\{ z \in U \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} F_1(z) \leq \frac{1}{2} \right\}. \quad \text{と置く.}$$

今, すでに  $F_1, \dots, F_j$  が  $F_j(0) = 1$ ,  $F_j(K_j) = 0$  である様に作られたとし,

$$L_j := \left\{ z \in U \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} F_j(z) \leq \frac{1}{2} \right\} \quad \text{と置く.}$$

$$\text{今 } G_{j+1}(z) := p_{j+1}^{-2} (z_1 - p_{j+1})(z_2 - p_{j+1})$$

$$E_{j+1}(z) := \exp(F_j(z) - 1)$$

とおき,  $\max_{L_j \cup K_{j+1}} |(E_{j+1})^{N_j} G_{j+1}| < \frac{1}{4}$  とする様に正整数  $N_j$  をとり,

$$F_{j+1} := (E_{j+1})^{N_j} G_{j+1} \quad \text{と置く.}$$

次にこの  $F_i$  によって定められた超平面  $\{z \in U \mid F_i(z) - 1 = 0\}$  の原点を通る1つの連結成分を  $V_i$  とすれば, 列  $\{V_i\}$  は次の距離の意味で収束する部分列  $\{V_{i_k}\}$  を含む, その極限集合を  $V$  とする. ここで  $\mathbb{C}^m$  の compact 集合に次の距離を入れる, 即ち compact 集合  $S, T$  に対して,

$$\text{distance}(S, T) := \max_{s \in S} \left\{ \min_{t \in T} |s - t| \right\} + \max_{t \in T} \left\{ \min_{s \in S} |t - s| \right\}.$$

とある. ここで  $|s - t|$  は  $\mathbb{C}^m$  のユークリッド距離.

今  $X := V \cap bU$  とおけば,  $\hat{X} \setminus X \neq \emptyset$  で, polynomially convex hull  $\hat{X}$  には analytic structure が入らないう事が示される.

## 文 献

- [1]. H. Alexander: Uniform algebras on curves, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 1269 — 1272.
- [2] H. Alexander: Polynomial approximation and analytic structure, Duke Math. Jour. 38 (1971) 123 — 135.
- [3] R. Arens: The problem of locally-A functions in a commutative

- Banach algebra  $A$ , Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 24 — 36.
- [4] J-E. Björk : Analytic structures in the maximal ideal space of a uniform algebra, Arkiv för Math. 8 (1970) 239 — 244.
- [5] J-E. Björk : Holomorphic convexity and analytic structures in Banach algebras, Arkiv för Math. 9 (1971) 39 — 54.
- [6] A. Browder : Introduction to function algebras, W. A. Benjamin (1969).
- [7] A. Browder : Point derivations and analytic structures in the spectrum of a Banach algebra, Jour. Functional Analysis 7 (1971) 156 — 164.
- [8] D. Clayton : Local analytic structure in Banach algebras, Indiana Univ. Math. Jour. 20 (1970) 507 — 513.
- [9] D. Clayton : A local characterization of analytic structure in a commutative Banach algebra, Lecture Notes in Math. 184 (1970).
- [10] R. M. Crownover : Principle ideal which are maximal in a Banach algebras, Studia Math. 33 (1969) 299 — 304.
- [11] R. M. Crownover : One-dimensional point derivation spaces in Banach algebras, Studia Math. 35 (1970) 249 — 259.
- [12] A. M. Gleason : Finitely generated ideals in Banach algebras, Jour. Math. Mech. 13 (1964) 125 — 132.
- [13] R. Gunning and H. Rossi : Analytic functions of several complex variables, Printice-Hall.
- [14] H. Rossi : The local maximum modulus principle, Ann. Math. 72.

(1960) 1—11.

- [15] W. Rudin : Analytic and maximum modulus principle , Duke Math. Jour. 20 (1953), 449 — 458.
- [16] W. Rudin : Function theory in Polydisks, W. A. Benjamin (1969).
- [17] S. J. Sidney : Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968) 119 — 127.
- [18] G. Stolzenberg : A hull with no analytic structure, Jour. Math. Mech. 12 (1963). 103 — 111.
- [19] G. Stolzenberg : Uniform approximation on smooth curves, Acta Math. 115 (1966) 185 — 198.
- [20] J. Wermer : On an example of Stolzenberg, Lecture Notes in Math. 184 (1970) 79 — 84.
- [21] J. Wermer : Banach algebras and several complex variables, Markham Publ. Company. (1971).