

Hua の不等式に関する Pearce-Pečarić の論文への注意

信州大学 理学部 高木 啓行 (Hiroyuki Takagi)

Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University

山形大学 工学部 三浦 毅 (Takeshi Miura)

山形大学 工学部 高橋 眞映 (Sin-Ei Takahasi)

Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University

[4] で, C. Pecaric と J. Pečarić は, Hua の不等式に関連した不等式を 2 つ示した.

Pearce-Pečarić の不等式 A ([4, Theorem 2.1]). f を, 区間 $[0, \infty)$ 上の非減少凸関数とする. このとき, 任意の $\alpha > 0$, $\delta, z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ に対して,

$$f\left(\left|\delta - \sum_{i=1}^n z_i w_i\right|\right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n |w_i| f(\alpha |z_i|) \geq \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n |w_i|}{\alpha} f\left(\frac{\alpha |\delta|}{\alpha + \sum_{i=1}^n |w_i|}\right)$$

が成り立つ.

Pearce-Pečarić の不等式 B ([4, Theorem 2.2]). 任意の $\alpha > 0$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\delta, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(1) \quad \left|\delta - \sum_{i=1}^n a_i z_i\right|^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 + \left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2\right) \geq \frac{\alpha |\delta|^2}{\alpha + \sum_{i=1}^n a_i^2}$$

が成り立つ.

ここでは, [5] で用いた論点から, これらの不等式をみてみたい. 実際, 不等式 A については, 設定をノルム空間に一般化する. 不等式 B については, 誤りのあることを指摘し, 正しい不等式をみちびく.

§1. われわれの不等式

1965 年, L. Hua は, 数論の研究の中で次の不等式を用いた.

Hua の不等式 ([3]). 任意の $\delta, \alpha > 0$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\left(\delta - \sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\alpha \delta^2}{n + \alpha}$$

が成り立つ.

この不等式は, 次の数学者たちによって, さまざまな形で一般化された.

C.-L. Wang (J. Math. Anal. Appl., **166** (1992), 345–350.)

C.E.M. Pearce and J.E. Pečarić (J. Math. Anal. Appl., **188** (1994), 700–702.)

S.S. Dragomir and G.-S. Yang (Tamkang J. Math., **27** (1996), 227–232.)

J.E. Pečarić (Tamkang J. Math. **33** (2002), 265–268.)

彼らの結果は, ひとつの論法で証明できることを, 講演者たちはつきとめた. その詳細は [5] に述べたが, ここに簡単に再録しよう.

われわれの不等式 ([5, Corollary 2]). $(G, +)$ を半群とし, φ, ψ を, G 上の非負値関数で, 次の2条件をみたすものとする.

- φ は劣加法的である (つまり, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ ($x, y \in G$)).
- ある正の定数 λ について, $\varphi(x) \leq \lambda \psi(x)$ ($x \in G$) が成り立つ.

また, f を $[0, \infty)$ 上の非減少凸関数とする. このとき, 任意の $a, b \in G$ に対して,

$$(2) \quad f(\varphi(a)) + \lambda f(\psi(b)) \geq (1 + \lambda) f\left(\frac{\varphi(a+b)}{1 + \lambda}\right)$$

が成り立つ.

証明は いたって簡単である.

証明. φ, ψ についての仮定より,

$$\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \leq \varphi(a) + \lambda \psi(b)$$

がいえる. よって, f が非減少かつ凸であることを用いて,

$$f\left(\frac{\varphi(a+b)}{1 + \lambda}\right) \leq f\left(\frac{\varphi(a) + \lambda \psi(b)}{1 + \lambda}\right) \leq \frac{f(\varphi(a)) + \lambda f(\psi(b))}{1 + \lambda}$$

となる. この両端辺に $1 + \lambda$ をかければ, (2) になる. □

証明のポイントは 次の2点である.

- φ, ψ に関する不等式 (汎関数の不等式)
- f が凸関数であること (凸関数の定義 = Jensen の不等式)

Hua の不等式を一般化したものの多くは, この2点に着目することで証明できる. 定理 A, B を この2点に着目してみたら, ということがわかるだろうか? それを考えていこう.

§2. Pearce-Pečarić の不等式 A について

Pearce-Pečarić の不等式 A は, 次のように一般化できる.

定理 1. X をノルム空間とする. また, f を $[0, \infty)$ 上の非減少凸関数とする. このとき, 任意の $\alpha > 0$, $\delta \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $h_1, \dots, h_n \in X^*$ (X の共役空間) に対して,

$$(3) \quad f\left(\left|\delta - \sum_{i=1}^n h_i(x_i)\right|\right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \|h_i\| f(\alpha \|x_i\|) \geq \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n \|h_i\|}{\alpha} f\left(\frac{\alpha |\delta|}{\alpha + \sum_{i=1}^n \|h_i\|}\right)$$

が成り立つ.

§1 の論法で証明する (われわれの不等式を直接用いる証明も可能である).

証明. 三角不等式と よく知られた汎関数の不等式より,

$$\begin{aligned} |\delta| &= \left| \left(\delta - \sum_{i=1}^n h_i(x_i) \right) + \sum_{i=1}^n h_i(x_i) \right| \leq \left| \delta - \sum_{i=1}^n h_i(x_i) \right| + \sum_{i=1}^n |h_i(x_i)| \\ &\leq \left| \delta - \sum_{i=1}^n h_i(x_i) \right| + \sum_{i=1}^n \|h_i\| \|x_i\| \end{aligned}$$

がいえる. よって, f が非減少かつ凸であることを用いて,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha|\delta|}{\alpha + \sum_{i=1}^n \|h_i\|}\right) &\leq f\left(\frac{\alpha\left|\delta - \sum_{i=1}^n h_i(x_i)\right| + \sum_{i=1}^n \|h_i\|(\alpha\|x_i\|)}{\alpha + \sum_{i=1}^n \|h_i\|}\right) \\ &\leq \frac{\alpha f\left(\left|\delta - \sum_{i=1}^n h_i(x_i)\right|\right) + \sum_{i=1}^n \|h_i\| f(\alpha\|x_i\|)}{\alpha + \sum_{i=1}^n \|h_i\|} \end{aligned}$$

となる. この両端辺に $\frac{\alpha + \sum_{i=1}^n \|h_i\|}{\alpha}$ をかければ, (3) になる. $\square$

定理1において, $X = \mathbb{C}$ の場合を考えよう. 各 $i = 1, \dots, n$ について, $w_i \in \mathbb{C}$ とし, $h_i \in \mathbb{C}^*$ を $h_i(z) = w_i z$ ($z \in \mathbb{C}$) と定める. このとき, $\|h_i\| = |w_i|$ ($i = 1, \dots, n$) である. そこで, この h_i と $x_i = z_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$) を定理1にあてはめると, Pearce-Pečarić の不等式 A が即座に得られる.

§3. Pearce-Pečarić の不等式 B について

Pearce-Pečarić の不等式 B によく似た不等式を, S. Dragomir が示している.

Dragomir の不等式 ([1, Theorem 2]). 任意の $\alpha > 0$, $\delta, a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(4) \quad \left|\delta - \sum_{i=1}^n a_i z_i\right|^2 + \alpha \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \geq \frac{\alpha |\delta|^2}{\alpha + \sum_{i=1}^n |a_i|^2}$$

が成り立つ.

この不等式は, [1] で証明されているが, §1 の方法で証明することもできるし, 定理1からみちびくこともできる.

Pearce-Pečarić の不等式 B(1) と Dragomir の不等式 (4) は, 左辺の第2項だけが異なっていて, $n \geq 2$ のとき, それらは明らかに差異がある. 不等式 (4) は いろいろな方法で証明されているので, 不等式 (1) が あやしく思えてくる. 実際, (1) において, $n \geq 2$ とし,

$$\alpha = 1, \quad \delta = 4, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = \dots = a_n = 0, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = \dots = z_n = 0$$

とおくと,

$$\left|\delta - \sum_{i=1}^n a_i z_i\right|^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 + \left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2\right) = 3 < \frac{16}{5} = \frac{\alpha |\delta|^2}{\alpha + \sum_{i=1}^n a_i^2}$$

となって, (1) が成り立たない. よって,

Pearce-Pečarić の不等式 B は 正しくない!!

原論文 [4] では, (1) の証明で 次の不等式を引用している.

引用不等式 (cf. [4, Proposition 2.1]). 任意の $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(5) \quad \left|\sum_{i=1}^n a_i z_i\right|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 + \left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2\right)$$

が成り立つ.

この不等式の出所はよくわからないが, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ($(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$) に対して,

(6) (1) が成立 for $\forall \alpha > 0, \delta, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \iff$ (5) が成立 for $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

がいえる. 実際, “(1) $\Leftarrow$ (5)” は, [4] の (1) の証明 (この部分は正しい) のとおり, 証明ができる. “(1) $\Rightarrow$ (5)” を示すには, (1) において, $\delta = \sum_{i=1}^n a_i z_i$ とし, $\alpha \rightarrow 0$ とすればいい. こうして, 同値性 (6) が示せた. (1) は正しくないのだから, 結果として, (5) も正しくない. 論文 [4] の証明のミスは, (5) を引用したところにあった.

さて, 不等式 (1) は正しくないが, すべての $\alpha > 0, \delta, a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して,

$$(1)' \quad \left| \delta - \sum_{i=1}^n a_i z_i \right|^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 + \left| \sum_{i=1}^n z_i \right|^2 \right) \geq \frac{\alpha |\delta|^2}{\alpha + \sum_{i=1}^n |a_i|^2}$$

が成り立たないわけではない. そこで, すべての $\alpha > 0, \delta, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して (1)' が成り立つような $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ 全体の集合 A_n を考えてみよう. 面倒なので, $n=2$ の場合を考える. この場合, (1)' は,

$$(7) \quad \left| \delta - (a_1 z_1 + a_2 z_2) \right|^2 + \frac{\alpha}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2) \geq \frac{\alpha |\delta|^2}{\alpha + |a_1|^2 + |a_2|^2}$$

となり,

$$A_2 = \{ (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 : (7) \text{ が成立 for } \forall \alpha > 0, \delta, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \}$$

である. A_2 は, 具体的には 次のようになり, $\mathbb{R}^2$ 全体を覆わない.

$$(8) \quad A_2 = \{ (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 : |a_1|^2 + |a_2|^2 \leq 4 \operatorname{Re}(\bar{a}_1 a_2) \}.$$

(8) の証明. (6) より, $(a_1, a_2) \in A_2$ であるための必要十分条件は, すべての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して,

$$|a_1 z_1 + a_2 z_2| \leq \frac{1}{2} (|a_1|^2 + |a_2|^2) (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2)$$

が成り立つことである. この不等式を整理すると,

$$(9) \quad |a_2|^2 |z_1|^2 + \operatorname{Re}((|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2a_1 \bar{a}_2) z_1 \bar{z}_2) + |a_1|^2 |z_2|^2 \geq 0$$

となる. $a_2 \neq 0$ の場合, (9) は, 左辺を平方完成して,

$$|a_2|^2 \left| z_1 + \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - 2a_1 \bar{a}_2}{2|a_2|} z_2 \right|^2 - \frac{(|a_1|^2 + |a_2|^2)(|a_1|^2 + |a_2|^2 - 4\operatorname{Re}(a_1 \bar{a}_2))}{4|a_2|^2} |z_2|^2 \geq 0$$

となる. この不等式が, すべての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して成り立つための必要十分条件は,

$$(10) \quad |a_1|^2 + |a_2|^2 \leq 4 \operatorname{Re}(a_1 \bar{a}_2)$$

である. 一方, $a_2 = 0$ の場合, (9) は, $\operatorname{Re}(|a_1|^2 z_1 \bar{z}_2) + |a_1|^2 |z_2|^2 \geq 0$ となり, この不等式が, すべての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して成り立つための必要十分条件は, $a_1 = 0$ である. また, (10) は, $|a_1|^2 \leq 0$ となり, これも $a_1 = 0$ と同値である. こうして,

$$(a_1, a_2) \in A_2 \iff |a_1|^2 + |a_2|^2 \leq 4 \operatorname{Re}(a_1 \bar{a}_2)$$

が示せた. □

§4. Pearce-Pečarić の不等式 B の修正

Pearce-Pečarić の不等式 B を修正することにしよう. §1 の論法を用いると, 次の不等式が示せる.

定理 2. X をノルム空間とする. また, $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする. このとき, 任意の $\alpha > 0, \delta \in \mathbb{C}, x \in X, g, h \in X^*$ ($g \neq 0$) (X の共役空間) ($g \neq 0$) に対して,

$$(11) \quad |\delta - g(x)|^p + \alpha(\|g-h\| \|x\|^p + |h(x)|^p) \geq \frac{|\delta|^p}{(1 + \alpha^{1-q}(1 + \|g-h\|))^{p-1}}$$

が成り立つ.

証明. $\alpha > 0, \delta \in \mathbb{C}, x \in X, g, h \in X^*$ ($g \neq 0$) とする. すべての $z \in X$ について,

$$|g(z)| \leq |g(z) - h(z)| + |h(z)| \leq \|g-h\| \|z\| + |h(z)|$$

だから, 関数 $f(t) = t^p$ が非減少かつ凸であることを使って,

$$|g(z)|^p \leq (1 + \|g-h\|)^p \left(\frac{\|g-h\| \|z\| + |h(z)|}{1 + \|g-h\|} \right)^p \leq (1 + \|g-h\|)^p \frac{\|g-h\| \|z\|^p + |h(z)|^p}{1 + \|g-h\|}$$

つまり,

$$(12) \quad |g(z)| \leq \alpha^{1-q}(1 + \|g-h\|) \left(\frac{\alpha^q}{1 + \|g-h\|} (\|g-h\| \|z\|^p + |h(z)|^p) \right)^{\frac{1}{p}}$$

となる.

そこで, $G = X$ とし, G 上の非負値関数 φ, ψ を,

$$\varphi(z) = |g(z)|, \quad \psi(z) = \left(\frac{\alpha^q}{1 + \|g-h\|} (\|g-h\| \|z\|^p + |h(z)|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (z \in G)$$

と定義する. すると, 明らかに φ は劣加法的である. また,

$$\lambda = \alpha^{1-q}(1 + \|g-h\|)$$

とおくと, (12) より, $\varphi(z) \leq \lambda \psi(z)$ ($z \in G$) が成り立つ. つぎに, $[0, \infty)$ 上の非減少凸関数 f を, $f(t) = t^p$ ととる. さらに, $g \neq 0$ を用いて, $g(y) = \delta$ となる $y \in X = G$ をえらび, $a = y - x, b = x$ とおいて, §1 のわれわれの不等式にあてはめると, 不等式

$$|g(y) - g(x)|^p + \alpha(\|g-h\| \|x\|^p + |h(x)|^p) \geq \frac{|g(y)|^p}{(1 + \alpha^{1-q}(1 + \|g-h\|))^{p-1}}.$$

が得られる. この式は (11) にほかならない. $\square$

定理 2 において, X を n 次元複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ とし, $p = q = 2$ とする. また, α を $\frac{\alpha}{2}$ におきかえ, $x = (z_1, \dots, z_n) \in X = \mathbb{C}^n$ とする. さらに, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ をとり, $g, h \in X^* = (\mathbb{C}^n)^*$ を,

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \quad ((x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n)$$

と定める. このとき, $\|g-h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i - 1|^2}$ であることに留意して, 定理 2 を適用すると, 次の系が得られる.

系. 任意の $\alpha > 0, \delta, a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ($(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$) に対し

て, $\kappa = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i - 1|^2}$ とおくと,

$$\left| \delta - \sum_{i=1}^n a_i z_i \right|^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\kappa \sum_{i=1}^n |z_i|^2 + \left| \sum_{i=1}^n z_i \right|^2 \right) \geq \frac{\alpha |\delta|^2}{\alpha + 2(1 + \kappa)}$$

が成り立つ.

この系は, Pearce-Pečarić の不等式 B の修正版になっている.

付記: ここでは, 煩雑さをさけるため, 不等式の等号成立条件を述べなかった. この講演の内容は, 等号成立条件などの補足事項を含め, 近いうちに 別の形で発表する予定である.

最後に: 古田 孝之先生は, 私どもの拙い講演を盛り上げてくださいました. また, 藤井 正俊先生は, 暖かいお言葉をくださり, 文献 [2] を 教えてくれました. おふた方の心遣いは, 私どものはかりしれない激励になりました. 感謝いたします.

参 考 文 献

- [1] S.S.Dragomir, *Hua's inequality for complex numbers*, Tamkang J.Math., **26** (1995), 257–260.
- [2] J.I. Fujii, *Operator inequalities for Schwarz and Hua*, Sci. Math. Jpn. **2** (1999), 263–268.
- [3] L.K. Hua, *Additive theory of prime numbers* (Translated by N.B. Ng) in *Translations of Math. Monographs*, **13**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1965.
- [4] C.E.M.Pearce and J.E.Pečarić, *On Hua's inequality for complex numbers*, Tamkang J.Math., **28** (1997), 193–199.
- [5] H. Takagi, T. Miura, T. Kanzo and S.-E. Takahasi, *A reconsideration of Hua's inequality*, *submitted*.