

定常軸対称 Einstein 方程式の準周期解の構成について

京大 教養 伊達悦朗

定常軸対称な Einstein 方程式、つまり

$$-ds^2 = f(dp^2 + d\bar{z}^2) + g_{ab} dx^a dx^b, \quad a, b = 0, 1, \quad \det(g_{ab}) = -P^2$$

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, p, \bar{z})$$

f, g_{ab} は $(p, \bar{z})$ のみの関数、

の形の metric に對して、それから計算される Ricci tensor

$R_{ij} = 0$ という形で表わされる f, g_{ab} に対する二階の非線

型偏微分方程式系、の解を求めた方法について、最近いろいろ

な立場から論じられている。

その中で、Belinski-Zakharov [1] は、この方程式系をパラ

λ -タ-を含む線型方程式系の可積分条件の形に書き、一種

の Bäcklund 変換を与えた：

今 a metric の形の場合、 $R_{ij} = 0$ なる方程式系は次の形にま

とめられた。

$$\begin{cases} (PgPg^{-1})_p + (PgPg^{-1})_z = 0, & g = (g_{ab}), \\ (\log f)_p = -p^{-1} + (4p)^{-1} \text{tr}((PgPg^{-1})^2 - (PgPg^{-1})^2), \\ (\log f)_z = (2p)^{-1} \text{tr}(p^2 g_p g^{-1} g_z g^{-1}). \end{cases} \quad (1)$$

この方程式の形から、 $\log f$ の微分係数は、 g, p のみで表わされていることがわかる。又、 $\log f$ に対する可積分条件も g が (1) を満たしているならば、満たしていることがわかる。従って以下では、(1) を満たし、対称で $\det g = -p^2$ とする g を求めたことを問題とする。

新しい変数 U, V を

$$U = PgPg^{-1}, \quad V = PgPg^{-1}$$

によって導入すると、考える方程式系は

$$\begin{cases} U_p + V_z = 0 \\ U_z - V_p + p^{-1}V + p^{-1}[U, V] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

となる。(二番目の方程式は、 U, V が与えられたとき、それから、 $g_p = p^{-1}Ug$, $g_z = p^{-1}Vg$ を満たす g が求まったための可積分条件)

Belinski-Zakharov は、この方程式系 (2) が線型方程式系

$$D_1\psi = \frac{pV - \lambda U}{\lambda^2 + p^2} \psi, \quad D_2\psi = \frac{pU + \lambda V}{\lambda^2 + p^2} \psi, \quad \psi = \psi(\lambda, p, z) \quad (3)$$

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + p^2} \partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_p + \frac{2\lambda p}{\lambda^2 + p^2} \partial_\lambda, \quad \lambda: \text{任意}$$

の可積分条件であることが指摘された。

線型方程式系 (3) を満たす。 ψ, U, V があれば、 U, V は (2) を満たす。更に、 $g_1 = P^T U g$, $g_2 = P^T V g$ を満たす g は

$g = \psi(0, p, z) C$, C は定数行列、 η 形で求めらるゝことになり
 かつ、 η 1 η $g_2 = -P(-\det g)^{-\frac{1}{2}} g$ とおくとき、 g_2 は (1) を満たし、 $\det(g_2) = -P^2$ を満たすことになりかつ、従って、 $g_2(g)$ が対称になる。従って、定常軸対称な Einstein 方程式の解が得られることになる。

Belinski-Zakharov は、定常軸対称な Einstein 方程式 $g = f$ の解 f_0, g_0 が与えられたとき、(従って、 U_0, V_0, ψ_0 が与えられたとき) それらを用いて、(3) を満たす、新しい ψ, U, V (ψ は $\psi = \gamma \psi_0$ の形で) を構成する方法を与えている。その際に、得られる $g(g_2)$ が対称になるように構成している。

このノートでは、まず Belinski-Zakharov の構成法を、少し異なる立場から捉えることから始めて、続いて、準周期解 (適切な呼び方ではないかも知れないが) の構成について考える。

従来、散乱の逆問題の方法が適用されている非線型方程式の多くの場合には、対応する線型方程式は、パラメータ λ に関する微分を含まず、 λ は独立変数には依存していません。そのような場合には、準周期解を考えることは、ある一つの代数曲線とその上の η time bundle の変形を考えることに対

応していた。今考えている定常軸対称な Einstein 方程式の場合には、線型方程式 (3) はパラメータ λ に関する微分を含んでいる。又、Maison [2] は、パラメータが、独立変数に依存する形の線型方程式の可積分条件として、(1) を書き直している。このように、線型方程式がパラメータに関する微分を含む場合、あるいはパラメータが、独立変数に依存する場合には、上に述べた、代数曲線との対応関係は、このように成りかえりようとするが、ここで準周期解の構成を考える一つの動機である。

ここでは、方程式系 (2) を考える (つまり、 $\det g = -P^2$, g : 対称, という付加条件を忘れないで)、その解は、一定の λ で (P, z) に依存する超楕円曲線の family を考えることにより構成できることを示す。定常軸対称な Einstein 方程式の解を得るには、更に、超楕円曲線の形を制限しなくては必要であると思われる。

1. $\mu_j(P, z)$, $j=1, \dots, N$ (N は任意の自然数) と二次方程式

$$\mu_j^2 - 2(w_j - z)\mu_j - P^2 = 0, \quad w_j \in \mathbb{C}$$

の根とする。(注. $-\frac{P^2}{\mu_j}$ も根となる.)

このとき

$L = \{f(\lambda, p, z) = (f_+(\lambda, p, z), f_-(\lambda, p, z)); f \text{ は } \lambda \text{ の有理関数で}$

$\mu_j(p, z) \text{ に一位の極をもつ}\}$

なる線型空間を考えた。これは (p, z) をとめず毎に $2N+2$ 次元である。更に $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $j=1, \dots, N+1$, 次のような L の部分空間を考える。

$$L_0 = \left\{ f \in L; \begin{aligned} & a_j f_+(-\frac{p^2}{\mu_j}, p, z) + b_j f_-(-\frac{p^2}{\mu_j}, p, z) = 0 \\ & (\lambda - \mu_j)(b_j f_+(\lambda, p, z) - a_j f_-(\lambda, p, z))|_{\lambda=\mu_j} = 0 \end{aligned} \right\} \quad j=1, \dots, N$$

L_0 は 2次元となる。 $f_1, f_2 \in L_0$ の基底で、 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\infty, p, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なるものとし、 $\psi = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ とおく。

$U, V \in$

$$2P\psi_\lambda(ip, p, z) = (V - iU)\psi(ip, p, z), \quad 2P\psi_\lambda(-ip, p, z) = (V + iU)\psi(-ip, p, z)$$

より決める。

$$D_1\psi = \frac{pV - \lambda U}{\lambda^2 + p^2}\psi, \quad D_2\psi = \frac{pU + \lambda V}{\lambda^2 + p^2}\psi$$

なる関数を考えた。 μ_j の選ぶ方から、これは関数は $\lambda = \mu_j$ で一位の極はもたない。又、 U, V の決め方から、 $\lambda = \pm ip$ に極はない。従って、これは関数の行は L に属する。更にこれは行が L_0 に属することも容易に確かめられる。そしてこれは行が $\lambda = \infty$ で 0 となることも容易に確かめる。従って、 L_0 の定義から、これは行の集合である関数は恒等的に零となる。つまり、

$$D_1 \psi = \frac{PV - \lambda U}{\lambda^2 + p^2} \psi, \quad D_2 \psi = \frac{PU + \lambda V}{\lambda^2 + p^2} \psi$$

が成り立ち、 U, V は (2) を満たす。又 L_0 の定義から、

$$\psi(\lambda) \neq \psi(-\frac{p}{\lambda}) \quad \text{が } \lambda \text{ に よる ない こと が 示 せ れ る。 } \quad g = \psi(0, p, z)$$

と お く と、前 に 述 べ た こ と か ら g は (1) を 満 た し て い る が、上
の 恒 等 式 か ら、 g は 対 称 に も 成 り 立 つ。こ う し て、定 常 軸 対
称 の Einstein 方 程 式 の 解 を 構 成 で き る。

尚、こ の よう に し て 得 ら れ る 解 は、Belinski-Zakharov の 方
法 で、 g_0, f_0 は Minkowski 空 間 の metric と し た 場 合 の よう
に 解 と 一 致 す る。

2. 次に よう な 超 楕 円 曲 線 の family を 考 へ る。

$$R(p, z): \mu^2 + \alpha \prod_{j=1}^{g+2} (\lambda - \lambda_j(p, z)) = 0, \quad \alpha: \text{定数}$$

$\lambda_j(p, z)$ は 二 次 方 程 式

$$\lambda^2 - z(a_j - z)\lambda - p^2 = 0, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

の 根。更 に、 $d_j(p, z)$, $j = 1, \dots, g+1$ は $R(p, z)$ の 上 で、 π の

$\mathbb{P}^1$ へ の 射 影 $\lambda(d_j)$ は、二 次 方 程 式

$$(\lambda(d_j))^2 - z(w_j - z)(\lambda(d_j)) - p^2 = 0, \quad w_j \in \mathbb{C}$$

を 満 た す よう な 点 と なる。

$R(p, z)$ 上 の 有 理 関 数 で、 d_j に 一 点 の 極 を も つ も の の 全 体 は
二 次 の 線 型 空 間 と な る。こ の 基 底 ψ_1, ψ_2 を、

$$\psi(p_0^+; p, z) = \psi_2(p_0^-; p, z) = 1, \quad \psi_1(p_0^-; p, z) = \psi_2(p_0^+; p, z) = 0$$

なる条件で選ぶ。(ここで $p_0^\pm$ は $R(p, z)$ 上 a 点で $\mathbb{P}^1$ への射影が ∞ となる点) $U, V \in 1$ と同様に.

$$2p \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \psi_1(p; p, z) & \psi_1(0p; p, z) \\ \psi_2(p; p, z) & \psi_2(0p; p, z) \end{pmatrix} \Big|_{\lambda(p)=ip} = (V - iU) \begin{pmatrix} \psi_1(p; p, z) & \psi_1(0p; p, z) \\ \psi_2(p; p, z) & \psi_2(0p; p, z) \end{pmatrix} \Big|_{\lambda(p)=ip}$$

$$2p \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \psi_1(p; p, z) & \psi_1(0p; p, z) \\ \psi_2(p; p, z) & \psi_2(0p; p, z) \end{pmatrix} \Big|_{\lambda(p)=-ip} = (V + iU) \begin{pmatrix} \psi_1(p; p, z) & \psi_1(0p; p, z) \\ \psi_2(p; p, z) & \psi_2(0p; p, z) \end{pmatrix} \Big|_{\lambda(p)=-ip}$$

(z は $\lambda(p) = \pm ip$ なる点 p であり η の local parameter, θ は sheet change) によって $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ と書く。関数

$$D_1 \psi = \frac{pV - \lambda U}{\lambda^2 + p^2} \psi, \quad D_2 \psi = \frac{pU - \lambda V}{\lambda^2 + p^2} \psi$$

を考える。ここで、作用素 D_j の中の λ は、 $(\frac{d\lambda}{dz})^{-1} \frac{\partial}{\partial z}$ (z は local parameter) とする。これは λ の関数は、 d_j の運動方程式 $R(p, z)$ 上 d_j に二位の極をもたず、 U, V の運動方程式 $\mathbb{P}^1$ への射影が $\pm ip$ となる点でも極をもたず、又 λ_j の運動方程式、それ以外 λ の点では極をもたないことからわかる。(一般の λ_j に対しては、分岐点 λ_j で極をもつ)。従って、これは $R(p, z)$ 上で d_j に高々一位の極をもつ、それ以外では正則な有理関数である。これは p 固定で零点を持つ a であり、 $R(p, z)$ 上恒等的に零であることからわかる。つまり、

$$D_1 \psi = \frac{pV - \lambda U}{\lambda^2 + p^2} \psi, \quad D_2 \psi = \frac{pU + \lambda V}{\lambda^2 + p^2} \psi$$

なる式が、超楕円曲線 $R(p, z)$ a family となる。従って U, V は (2) を満たす。

問題 11.

$$g = \begin{pmatrix} \psi_1(p_0^+; p, z) & \psi_1(p_0^-; p, z) \\ \psi_2(p_0^+; p, z) & \psi_2(p_0^-; p, z) \end{pmatrix}$$

が、いつおそれるのかということはある。その条件は、今のところ分らない。ただ、その為には、出発点に与えられた curve a family とは

$$R(p, z): \mu^2 + \alpha \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda^2 - z(q_j - z)\lambda - p^2) = 0$$

と見なす。 $R(p, z)$ a involution

$$(\lambda, \mu) \longmapsto \left(-\frac{p^2}{\lambda}, \pm \sqrt{(-1)^{g+1}} \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{g+1} \mu\right)$$

を用いること。 B の pole d_i a 個数 2 個 $\gamma = 2$ 等分。必要があると思われた。

References

1. V. A. Belinski and V. E. Zakharov; Jour. Exp. Theor. Phys. vol. 75, 1953 (1978), vol. 77, 3, (1979) (in Russian)
2. D. Maison: Phys. Rev. Lett., vol. 41, 521, (1978), Jour. Math. Phys. vol. 20, 871 (1979)